Doctoral Thesis

Homologische Dualität von Moduln, insbesondere über Hopf-Algebren

Author(s):
Biner, Hermann-Josef

Publication Date:
1981

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000239995

Diss. ETH Nr. 6653

HOMOLOGISCHE DUALITAET VON MODULN, INSBESONDERE UEBER HOPF-ALGEBREN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Hermann-Josef Biner

dipl. math. ETH

geboren am 18. April 1952

von Zermatt, Kt.Wallis

angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent

Prof. Dr. U. Stammbach, Korreferent

1981

Einleitung

1. Die homologische Dualität vom Poincaré-Typ, wie sie bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten auftritt, ist auf Gruppen übertragen und verallgemeinert worden (Bieri/Eckmann); sie tritt z.B. bei torsionsfreien arithmetischen linearen Gruppen in natürlicher Weise auf. In der vorliegenden Arbeit wird diese homologische Dualität in einen allgemeinen Rahmen gestellt: Sie wird einerseits, für Moduln über einem beliebigen Ring, mit Hilfe eines dualisierenden Komplexes formuliert, und es zeigt sich, dass die Existenz einer solchen Dualität mit einfachen Endlichkeitsbedingungen äquivalent ist. Anderseits betrachtet man als Ring speziell eine Hopf-Algebra, an Stelle des Gruppenringes einer Gruppe; dies umfasst den Fall der Dualität vom Poincaré-Typ für Gruppen <u>und</u> für Lie-Algebren sowie für deren Tensorprodukte, wie sie bei wichtigen Hopf-Algebren auftreten.

2. Der Fall von Moduln über einem beliebigen Ring wird im zweiten Kapitel behandelt. Für einen Modul A fragt man nach einem "<u>dualisierenden Komplex</u>" $\underline{\underline{D}}$, derart dass für ein $n \geq 0$, für alle k und beliebige Koeffizienten-Moduln B natürliche Isomorphismen existieren:

$$(1) \qquad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-k}(A,B) \cong \mathrm{Tor}_k^{\Lambda}(\underline{\underline{D}},B)$$

Die rechte Seite ist im Sinne der Homologie des totalen Komplexes $\underline{\underline{D}} \otimes_{\Lambda} \underline{\underline{Q}}$ zu verstehen, wobei $\underline{\underline{Q}}$ eine flache Auflösung von B ist. Es zeigt sich, dass für A eine solche Relation (1) genau dann gilt, wenn A vom Typ FP ist, d.h. wenn es eine endliche und endlich erzeugte projektive Auflösung von A gibt. Der dualisierende Komplex $\underline{\underline{D}}$ ist zwar nicht eindeutig bestimmt, wohl aber seine Homologie: $H_k(\underline{\underline{D}}) \cong \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-k}(A,\Lambda)$; wir bezeichnen diese abelsche Gruppe mit der Λ-Modul-Struktur durch Rechtsmultiplikation in Λ kurz mit A^{n-k}. Die rechte Seite von (1) lässt sich durch eine Spektralreihe approximieren:

$$(2) \qquad E^2_{p,q} \cong \mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A^{n-q},B) \xRightarrow{\;p\;} \mathrm{Tor}_{p+q}^{\Lambda}(\underline{\underline{D}},B)$$

Ein wichtiger Fall liegt vor, wenn A vom Typ FP ist und alle A^{n-k} für $k \neq 0$ verschwinden. Dann, und nur dann, gilt:

$$(3) \qquad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{n-k}(A,B) \cong \mathrm{Tor}_k^{\Lambda}(A^n,B) \quad ,$$

und *wir sagen*, A *sei ein* Modul mit Quasi-Dualität und A^n der zu A gehörige dualisierende Modul.

Moduln mit Quasi-Dualität treten *in vielen Fällen auf*. Als Beispiel betrachten wir hier das amalgamierte *freie Produkt* $G := G_1 *_S G_2$, wobei G_1, G_2 und S Dualität-Gruppen im Sinne von Bieri/Eckmann sind. Falls gilt: $cdG_1 = cdG_2 = cdS+1$, ist G selbst eine Dualität-Gruppe. Falls man aber nur voraussetzt $cdS \neq cdG_i$, $i=1,2$, gilt: Sämtliche nicht verschwindenden Endengruppen von G, $H^k(G,\mathbb{Z}G)$, sind Moduln mit Quasi-Dualität über $\mathbb{Z}G$.

3. Im dritten Kapitel wählen wir als Ring eine Hopf-Algebra $\mathcal{H}$ über einem kommutativen Grundring R. In diesem Fall lassen sich weitere Aussagen über Moduln mit Quasi-Dualität machen, speziell für jene, die als R-Moduln projektiv und endlich erzeugt sind. Es lassen sich hinreichende Kriterien dafür angeben, dass ein Quasi-Dualität-Modul A und sein dualisierender Modul A^n als R-Moduln isomorph sind.

Wir erinnern daran, dass die (Co-)Homologie einer Hopf-Algebra definiert ist als: $H_k(\mathcal{H},-) := Tor_k^{\mathcal{H}}(-,R)$ bzw. $H^k(\mathcal{H},-) := Ext_{\mathcal{H}}^k(R,-)$; diese Definition stimmt also *nicht* mit jener der Hochschild-Homologie überein. Es ist nun von Interesse zu fragen, ob der Grundring R selbst - als $\mathcal{H}$-Modul mit trivialer $\mathcal{H}$-Operation - ein Modul mit Quasi-Dualität ist. In diesem Fall sagen wir, $\mathcal{H}$ sei eine Hopf-Algebra mit Quasi-Dualität und man hat Relationen:

$$(4) \qquad H^k(\mathcal{H},B) \cong Tor_{n-k}^{\mathcal{H}}(C,B)$$

für alle k und beliebige Koeffizienten-Moduln B. $C := H^n(\mathcal{H},\mathcal{H})$ ist der dualisierende Modul von R.

Ist $\mathcal{H}_1 \overset{j}{\rightarrowtail} \mathcal{H} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{H}_2$ eine *Hopf-Algebren-Erweiterung*, A *ein* Quasi-Dualität-Modul über $\mathcal{H}_2$ mit projektiver Dimension m, der $\mathcal{H}$-Modul B als $\mathcal{H}_1$-Modul via j ein Quasi-Dualität-Modul über $\mathcal{H}_1$ mit projektiver Dimension n, und sind ferner B sowie sein dualisierender Modul B^n R-flach, dann ist auch $A \otimes B$ mit $\mathcal{H}$-Diagonaloperation ein Quasi-Dualität-Modul über $\mathcal{H}$ mit projektiver Dimension n+m.

4. Im vierten Kapitel untersuchen wir den Begriff der Dualität für Moduln über einer Hopf-Algebra $\mathcal{H}$. Wir nennen A einen Modul mit homologischer

Dualität, falls ein dualisierender Modul D existiert, derart dass man für die Homologie der Hopf-Algebra selbst Dualitätsrelationen hat:

$$(5) \qquad H^{n-k}(\mathcal{X};\mathrm{Hom}(A,B)) \cong H_k(\mathcal{X};D\otimes B)$$

für alle k und beliebige Koeffizienten B. $\mathcal{X}$ operiert in Hom(A,B) bzw. $D\otimes B$ diagonal. Der dualisierende Modul D ist auch hier eindeutig bestimmt.

Falls die Hopf-Algebra $\mathcal{X}$ R-flach ist, lässt sich über den Zusammenhang zwischen Dualität und Quasi-Dualität folgendes aussagen:

(1) Ist A ein R-projektiver Quasi-Dualität-Modul, so liegt genau dann Dualität vor, falls der dualisierende Modul von A R-flach ist.

(2) Umgekehrt ist jeder R-projektive Dualität-Modul A ein Modul mit Quasi-Dualität.

In beiden Fällen stimmt der dualisierende Modul der Dualität überein mit demjenigen der Quasi-Dualität.

Ist R selbst ein Dualität-Modul über $\mathcal{X}$, nennen wir $\mathcal{X}$ eine Hopf-Algebra mit Dualität. In diesem Fall wird der Isomorphismus der Dualität durch das Cap-Produkt mit der "Fundamentalklasse" von $\mathcal{X}$ induziert, ganz analog wie im Falle der Dualität-Gruppen.

Eine Erweiterung von Dualität-Hopf-Algebren ist wieder eine Dualität-Hopf-Algebra. Falls sich eine Hopf-Algebra als schiefes Tensorprodukt der Universellen Enveloppe einer Lie-Algebra und eines Gruppenringes schreiben lässt, reduziert sich die Untersuchung, ob Dualität vorliegt, auf die Lie-Algebra und die Gruppe selbst.

5. Im ersten Kapitel werden die nötigen Vorbereitungen getroffen, die uns erlauben mit Hopf-Algebren zu arbeiten. So werden z.B. Assoziativitäts-Formeln zwischen $-\otimes-$ und Hom(-,-) hergeleitet und es wird definiert, was unter einer Erweiterung von Hopf-Algebren zu verstehen ist. Eine solche Erweiterung führt auf Spektralreihen ähnlich der Lyndon-Hochschild-Serre-Spektralreihe im Falle einer Gruppenerweiterung.

Herrn Professor B.Eckmann, unter dessen Leitung diese Dissertation ausgeführt wurde, bin ich zu grösstem Dank verpflichtet. Ich verdanke ihm nicht nur die Idee zu dieser Arbeit, sondern er war auch ihrer Ausführung mit vielen wertvollen Anregungen und seinem steten Interesse ausserordentlich förderlich.