Diss. ETH Nr. 6942

UEBER DIE COHOMOLOGIE VON GRUPPEN MIT P-LAENGE 1

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Thomas Diethelm

dipl. Math. ETH

geboren am 31. Dezember 1954

von Stäfa

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. U. Stammbach, Referent

Prof. Dr. G. Mislin, Korreferent

1981

Abstract

Let G be a finite group, whose order is divisible by the prime p , and let k denote the field of p elements. We consider the cohomology $H^n(G,A)$, where A is a simple kG-module. It is well known that $H^n(G,A) \neq 0$ implies that A lies in the principal block of kG . We ask if the converse is true, i.e. if to every simple kG-module A in the principal block there is an $n \in \mathbb{N}$ with $H^n(G,A) \neq 0$.

Swan proved that this is true for the trivial kG-module k . Therefore the above question has a positive answer for p-nilpotent groups ($G = O_{p'p}G$) . In this paper we show :

If G has p-length 1 ($G = O_{p'p\,p'}G$) , there are infinitely many $n \in \mathbb{N}$ with $H^n(G,A) \neq 0$.

If $G = O_{p'p\,p'p}G$, there is at least one $n \geq 0$ with $H^n(G,A) \neq 0$.

The main step in the proof of these results is to analyze the action of a p'-group Q on the cohomology ring $H^*(P,k)$ of a p-group P . We found the following result, which is of interest in its own right :

If the p'-group Q acts faithfully on the p-group P , then every simple kQ-module A is a direct factor of $H^*(P,k)$.

Zusammenfassung

Es sei G eine endliche Gruppe, deren Ordnung durch die Primzahl p teilbar ist, und k sei der Körper mit p Elementen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Cohomologie von G mit Koeffizienten in einem einfachen kG-Modul A . Die Cohomologie $H^*(G,A)$ kann bekanntlich nur dann nicht-trivial sein, wenn der einfache kG-Modul A im Hauptblock von kG liegt.

Es ist eine offene Frage, ob auch die Umkehrung dieser Aussage richtig ist, d.h. ob es zu jedem einfachen kG-Modul A im Hauptblock von kG ein $n \geq 0$ gibt, so dass $H^n(G,A)$ nicht trivial ist.

Swan hat gezeigt, dass das für den trivialen Modul k richtig ist. Aus diesem Resultat folgt, dass für p-nilpotente Gruppen ($G=O_{p'p}G$) die oben gestellte Frage eine positive Antwort besitzt, denn in diesem Fall ist k der einzige einfache Modul im Hauptblock.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass diese Frage für eine weit grössere Klasse von p-auflösbaren Gruppen eine positive Antwort besitzt:

> Gilt $G=O_{p'p\,p'}G$ (G hat p-Länge 1) , so existieren zu jedem einfachen kG-Modul A im Hauptblock von kG unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $H^n(G,A) \neq 0$.
>
> Gilt $G=O_{p'p\,p'p}G$, so existiert zu jedem einfachen kG-Modul A im Hauptblock von kG wenigstens ein $n \geq 0$ mit $H^n(G,A) \neq 0$.

Für den Beweis dieser Resultate muss man die Operation

einer p'-Gruppe Q auf dem Cohomologiering $H^*(P,k)$ einer p-Gruppe P untersuchen. Ich habe dabei das folgende Resultat gefunden, das auch von eigenständigem Interesse sein dürfte:

> Operiert die p'-Gruppe Q treu auf der p-Gruppe P, so ist jeder einfache kQ-Modul A unendlich oft direkter Summand in $H^*(P,k)$.