Bilineare Integration

Diss. ETH Nr. 6875

BILINEARE INTEGRATION

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Thomas Kappeler

Dipl. Math. ETH

geboren am 12. Februar 1953

von Bülach (Zürich)

Angenommen auf Antrag von :

Prof. Dr. C. Constantinescu , Referent

Prof. Dr. H. Föllmer , Korreferent

1981

Kurzzusammenfassung .

Es wird ein bilineares Integral für lokalkonvexe Räume definiert und untersucht . Ausgegangen wird von einem Messraum $(S,\mathcal{S})$ und lokalkonvexen Räumen X, Y und Z , welche durch eine separatstetige , bilineare Abbildung von $X \times Z$ mit Werten in Y verknüpft sind . Es werden dann Funktionen f auf S mit Werten in X bezüglich eines Masses μ auf $\mathcal{S}$ mit Werten in Z integriert . Das Integral $\int f\, d\mu$ ist dann ein Mass auf $\mathcal{S}$ mit Werten in Y . Seine Definition ist in natürlicher Weise den Eigenschaften von lokalkonvexen Räumen angepasst . Es ergibt das Lewisintegral als Spezialfall und verallgemeinert das Dobrakov - Integral . Ausführlich werden mögliche Verallgemeinerungen des Satzes von Radon - Nikodym für das bilineare Integral studiert . Dabei werden zwei Methoden - die Mischmethode und die Bausteinmethode - entwickelt und auf das Dobrakov- sowie das Lewisintegral angewendet . Gegenbeispiele zeigen , dass für das Dobrakov- und Lewisintegral keine stärkeren Aussagen erwartet werden können .

Sei $(S,\mathcal{S},\lambda)$ ein Massraum und X ein Banachraum . Dann bezeichne $L_1(X,\lambda)$ den Banachraum der λ-Aequivalenzklassen von bezüglich λ Bochner - integrierbaren Funktionen auf S mit Werten in X . Es wird ein Beitrag zur Charakterisierung der Kompaktheit von Teilmengen von $L_1(X,\lambda)$ bezüglich verschiedener Topologien auf $L_1(X,\lambda)$ geleistet . Eine Teilmenge W von $L_1(X,\lambda)$ besitzt definitionsgemäss die Intervalleigenschaft , falls für jedes A aus $\mathcal{S}$ sowie $\dot{f}$ und $\dot{g}$ aus W auch das Element $\dot{f}\chi_A + \dot{g}\chi_{S\setminus A}$ in W liegt .

Wir geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür , dass eine Teilmenge von $L_1(X,\lambda)$ mit der Intervalleigenschaft schwach kompakt ist . Ebenso wird gezeigt , wie aus Teilmengen von $L_1(X,\lambda)$ mit gewissen Eigenschaften grössere

schwach kompakte Teilmengen von $L_1(X,\lambda)$ erzeugt werden können . Es wird eine Reihe von illustrativen Gegenbeispielen vorgelegt . Es schliesst sich ein Beitrag zur Charakterisierung der Kompaktheit von Teilmengen des Raumes von Massen auf S mit Werten in einem lokalkonvexen Raum Z bezüglich verschiedener Topologien an . Die vorgelegten Resultate über Kompaktheit finden in dieser Arbeit ihre Anwendung bei der Verallgemeinerung des Satzes von Radon - Nikodym , sie dürfen aber auch für sich allein ein Interesse beanspruchen .

Abstract .

A bilinear integral for locally convex spaces is defined and studied . Take a measurable space $(S,\mathcal{S})$ and locally convex spaces X , Y and Z which are connected by a bilinear , separate continuous map from $X \times Z$ with values in Y . Functions f on S with values in X will be integrated with respect to a measure μ on $\mathcal{S}$ with values in Z . The (indefinite) integral $\int f\,d\mu$ is then a measure on $\mathcal{S}$ with values in Y . Its definition is connected in a natural way with the properties of locally convex spaces , it furnishes the Lewis - integral as a special case and generalizes the Dobrakov - integral .

Possible generalizations of the Radon - Nikodym - theorem for the bilinear integral are studied . Two methods - the mixing method and the building stone method - are developed and they are applied to the Dobrakov - and Lewis - integral . Counterexamples show that for the Dobrakov - and Lewis - integral no stronger theorems can be expected .

Let $(S,\mathcal{S},\lambda)$ be a measure space and X a Banach space . Then with $L_1(X,\lambda)$ we denote the Banach space of λ - equivalence classes of (with respect to λ) Bochner integrable functions on S with values in X . We give a further contribution to characterize compactness of subsets of $L_1(X,\lambda)$ with respect to different topologies on $L_1(X,\lambda)$. A subset W of $L_1(X,\lambda)$ has - by definition - the interval property if and only if for every A in $\mathcal{S}$ and $\dot{f}$ and $\dot{g}$ in W the element $\dot{f}\dot{\chi}_A + \dot{g}\dot{\chi}_{S\setminus A}$ lies in W .

We give necessary and sufficient conditions for a subset of $L_1(X,\lambda)$ with the interval property to be weakly compact . Furthermore we show how to generate weakly compact subsets of $L_1(X,\lambda)$ from smaller ones . We give a number of

illustrative counterexamples . We also give a contribution for characterizing compactness of subsets of the space of measures on S with values in a locally convex space with respect to several topologies . The given results on compactness find their application to generalize the Radon - Nikodym-theorem , but they might have an interest in their own .