Krümmungstreue Diffeomorphismen Riemannscher und pseudo-Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Diss. ETH Nr. 7117

KRUEMMUNGSTREUE DIFFEOMORPHISMEN RIEMANNSCHER UND PSEUDO-RIEMANNSCHER MANNIGFALTIGKEITEN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von

Bernhard Ruh
dipl. math. ETH

geboren am 27. Mai 1955

von Ramsen (SH)

Angenommen auf Antrag von:

Prof. Dr. K. Voss, Referent

Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

1982

Kurzfassung

Das von GAUSS und RIEMANN stammende THEOREMA EGREGIUM besagt, dass isometrische Riemannsche oder pseudo-Riemannsche Räume dieselbe (Gauss'sche oder Riemannsche) Krümmung haben. Dass die Umkehrung für 2-dimensionale Räume nicht gilt, kann leicht durch Beispiele gezeigt werden. Wir untersuchen nun, inwieweit die Umkehrung für Räume der Dimension $n \geq 3$ zutrifft:

> Ist ein Diffeomorphismus zwischen Riemannschen oder pseudo-Riemannschen Räumen der Dimension $n \geq 3$, der die Riemannsche Krümmung K (Schnittkrümmung) invariant lässt, eine Isometrie, und falls nicht, wie sehen die Räume und der Diffeomorphismus (lokal) aus ? Wir schliessen dabei den Fall konstanter Krümmung aus.

Das Problem wurde 1967 von R.S. Kulkarni für Riemannsche Räume gestellt und teilweise gelöst: Falls $K \neq \text{const}$ ist, ist jeder krümmungstreue Diffeomorphismus konform und, speziell für $n \geq 4$, isometrisch. Im Falle $n=3$ folgt die Isometrie, wenn die Räume konform-flach sind.
Für 3-dimensionale Räume fand T. Nasu 1974 eine Relation, die im Falle eines krümmungstreuen Diffeomorphismus' erfüllt sein muss. Anschliessend konstruierte S.T. Yau Beispiele von 3-dimensionalen Riemannschen Räumen, zwischen denen nicht-isometrische krümmungstreue Diffeomorphismen existieren. Kulkarni bewies 1977, dass auch im Falle pseudo-Riemannscher Räume krümmungstreue Diffeomorphismen konform sein müssen; weiter behauptete er, dass auch in diesem Fall für $n \geq 4$ nur Isometrien möglich sind.

> In meiner Arbeit werden nun alle Riemannschen und pseudo-Riemannschen Räume bestimmt, welche nicht-triviale krümmungstreue Diffeomorphismen gestatten.

Es zeigt sich dabei folgendes:

> Für $n \geq 4$ gibt es - im Gegensatz zu der Behauptung von Kulkarni - genau eine Klasse von Räumen mit indefiniter Metrik, welche krümmungstreue Diffeomorphismen erlauben. Es handelt sich dabei um die konform-flachen Räume mit rekurrenter Krümmung im Sinne von Walker.
> Bei den 3-dimensionalen Räumen wird bewiesen, dass die von Yau gefundenen Beispiele im Riemannschen Fall die einzigen sind. Bei Zulassung indefiniter Metriken ergeben sich drei weitere Klassen von Beispielen, die wir nach der Art der Eigenwerte des Ricci-Tensors unterscheiden:
> 1) Die Eigenwerte sind reell und verschieden (bei definiter Metrik ist dies immer erfüllt). Man erhält bis auf Signaturänderung die Beispiele von Yau. Ferner können wir die Metrik durch gewisse, nur vom Konformitätsfaktor abhängige, Invarianten ausdrücken.
> 2) Der Ricci-Tensor hat komplexe Eigenwerte. Auch in diesem Fall existiert im wesentlichen nur eine Klasse von Beispielen. Wieder lässt sich die Metrik durch gewisse Invarianten darstellen.
> 3) Der Ricci-Tensor hat einen 3-fachen Eigenwert (ist aber nicht diagonalisierbar). Hier finden sich nochmals 3 verschiedene Typen von Beispielen.

In Kapitel I wird zunächst ein einfacher Beweis gegeben, dass nicht-triviale krümmungstreue Diffeomorphismen konform sind. Anschliessend werden die Beziehungen zwischen konform äquivalenten bzw. krümmungsgleichen Metriken zusammengestellt.

Kapitel II enthält die Diskussion für $n \geq 4$ und $n=3$.
Die Methoden, die wir für die Beweise verwenden, seien hier kurz angegeben:
Für $n \geq 4$ werden die Beziehungen aus Kapitel I verarbeitet. Zudem benützen wir die Klassifikation der rekurrenten Räume durch Walker.
Für $n=3$ wird im Falle 1) & 2) mit Hilfe zweier - von der Forderung der Krümmungsgleichheit abgeleiteter - Gleichungen die kovariante Ableitung der Eigenvektoren des Ricci-Tensors vollständig bestimmt. Man sucht nun drei linear unabhängige Vektorfelder, die sich als Koordinatenbasis benützen lassen und deren Skalarprodukte nur vom Konformitätsfaktor abhängig sind. Sind solche Basisvektorfelder gefunden, geht man mit der durch sie bestimmten Metrik in die Gleichungen für Krümmungsgleichheit und findet noch eine Bedingung an die Invarianten, die sich aber erfüllen lässt.
Da im Falle 3) die kovariante Ableitung durch die oben erwähnten Gleichungen nicht mehr vollständig bestimmt ist und da in gewissen Fällen alle Invarianten verschwinden, ist obige Methode nur begrenzt anwendbar. Wir ziehen deshalb die folgende Methode vor: Man bringt die Metrik mit Hilfe von "isotropen" Gauss'schen Koordinaten in eine möglichst einfache Form und geht mit diesem Ansatz in die Gleichungen für Krümmungsgleichheit.

English Summary

The THEOREMA EGREGIUM of GAUSS and RIEMANN asserts, that isometric Riemannian or pseudo-Riemannian manifolds have the same (Gaussian or Riemannian) curvature. It is easy to show by examples, that the converse isn't true for 2-dimensional spaces. We discuss now, whether it is valid for spaces with dimension $n \geq 3$, i.e. :

> Is a diffeomorphism between Riemannian or pseudo-Riemannian manifolds of dimension $n \geq 3$, which preserves the Riemannian curvature K (sectional curvature), an isometry ? If not, how do the spaces and the diffeomorphism look out (locally) ? We exclude spaces with constant curvature.

R.S. Kulkarni considered this problem for Riemannian manifolds in 1967 and solved it partially: Supposed $K \neq$const each curvature-preserving diffeomorphism is conformal and for $n \geq 4$ even isometric. In case $n=3$ isocurved spaces are isometric if they are conformally-flat.
In isocurved Riemannian 3-manifolds a necessary relation was given by T. Nasu in 1974. Subsequently S.T. Yau constructed examples of isocurved non-isometric Riemannian 3-manifolds.
In 1977 Kulkarni proved, that in the case of pseudo-Riemannian spaces too curvature-preserving diffeomorphisms must be conformal. Further he affirmed, that for pseudo-Riemannian manifolds with $n \geq 4$ only isometries are possible.

> In my paper all Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds are determined, which permit non-trivial curvature-preserving diffeomorphisms.

The results are :

> In case $n \geq 4$ there exist (exactly) one class of spaces with indefinite metric, which permits curvature-preserving diffeomorphisms (this contradicts Kulkarni's proposition). It is the class of conformally-flat pseudo-Riemannian manifolds with recurrent curvature in the sense of Walker.
> When $n=3$ we prove, that in the Riemannian case Yau's examples are the only ones. If indefinite metrics are also permitted, we get (by classification by type of the eigenvalues of the Ricci tensor) three more examples:
>
> 1) The eigenvalues are real and different (this holds for definite metrics). We obtain - up to change of the signature - Yau's examples. Moreover we are able to describe the metric by certain invariants, which are dependent only on the associated function (of the conformal transformation).
> 2) The Ricci tensor has complex eigenvalues. In this case too there exists essentially only one class of examples. Again, we can describe the metric by certain invariants.
> 3) The Ricci tensor has a threefold eigenvalue (but isn't diagonalizable). We find three different types of examples.

In chapter I we give first a simple proof of the statement, that non-trivial curvature-preserving diffeomorphisms are conformal. Then we summarize the relations among geometric objects arising from conformal deformation of metrics respectively from the curvature-preserving hypothesis.

In chapter II we give a classification of all isocurved spaces. The methods we are using in brief:
If $n \geq 4$ we work up the ralations of chapter I. Additionally we need Walker's classification of recurrent spaces.
For $n=3$ and cases 1) & 2) we determine completely the covariant derivative of the eigenvectors of the Ricci tensor. Then we are looking for three linear independent vectorfields, which can be used as coordinate basis and which have scalarproducts dependent only on the associated function. These basisvectorfields induce a metric. Together with the conditions for equality of curvature we obtain a necessary relation for the invariants. But this condition is fulfilled under certain assumptions.
For $n=3$ and case 3) the above method is only partially applicable. We prefer therefore the following method: By the help of "isotropic" Gaussian coordinats we contrive the metric in a form as simple as possible and put it then in the conditions for equality of curvature.