

Diss. ETH No 7141

Credibility models allowing durational effects

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
BJØRN ROSTED SUNDT
cand. real.
born 18th December 1951
citizen of Norway

accepted on the recommendation of
Prof. Hans Bühlmann, examiner
Doc. Ragnar Norberg, co-examiner

1982

Summary

Let \tilde{x}_i be the claim amount of an insurance policy from the i -th year it is in force. It is assumed that $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ are conditionally independent and identically distributed given the value of an unknown random parameter $\tilde{\theta}$ characterizing the risk of the policy. These assumptions are customary in credibility theory. What is new in the present thesis, is the introduction of an additional random variable \tilde{t} denoting the time the policy stays in the portfolio. Thus, when the policy has stayed t years in the portfolio, we know that $\tilde{t} > t$. It is assumed that the information $\tilde{t} > t$ gives some knowledge about the value of $\tilde{\theta}$.

Sections 1-3 are of introductory character.

In Sections 3-6 we assume that \tilde{t} is discrete. Section 4 gives a broad discussion of the model under different non-parametric assumptions. The generalized credibility estimators (using information about \tilde{t}) are compared to the classical ones (not using this information). Two parametric examples are given.

In Section 5 we generalize the concept of conjugate classes. The key idea is that the posterior distribution of $\tilde{\theta}$ given $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t$, ($\tilde{t} > t$) should be in the same class as the prior distribution of $\tilde{\theta}$. Such classes giving exact credibility, are discussed more thoroughly.

In Sections 3-5 we assumed that the distribution of \tilde{t} does not depend on the rating scheme of the insurance company. In Section 6 we drop this assumption, and briefly discuss some problems and possibilities in this connection.

Section 7 presents a continuous model, where \tilde{t} is continuous, and where, for given $\tilde{\theta} = \theta$, the claims occur according to a Poisson process with parameter θ .

The rest of the thesis (Sections 8-10) treats statistical inference about the structural parameters in the model of Section 4 based on collateral data. Section 8 treats testing whether durational effects are present. For a non-parametric case the Jonckheere-Terpstra test is proposed, and in a parametric model we

discuss a likelihood ratio test. In Section 9 we propose estimators for the structural parameters. Some of the procedures of Sections 8-9 are applied to a numerical example in Section 10. An automobile liability insurance portfolio of about 10'000 policies was examined. The Jonckheere-Terpstra test rejected the hypothesis "no durational effect" with significance probability 0.0003878.

Kurzfassung

Sei \tilde{x}_1 die Schadenssumme einer Versicherungspolice im i -ten Jahr seit Inkrafttreten der Police. Es wird vorausgesetzt, dass $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots$ bedingt unabhängig und identisch verteilt sind, gegeben der Wert eines unbekanntem Zufallsparameters $\tilde{\theta}$, der das Risiko dieser Police charakterisiert. In der Glaubwürdigkeitstheorie sind diese Annahmen üblich. Was in dieser Dissertation neu ist, ist die Einführung einer zusätzlichen Zufallsvariablen \tilde{t} . Diese Zufallsvariable bezeichnet die totale Zeit, während der die Police im Portefeuille bleibt. Wenn also die Police t Jahre im Portefeuille ist, wissen wir, dass $\tilde{t} > t$ ist. Es wird angenommen, dass die Information $\tilde{t} > t$ etwas über den Wert von $\tilde{\theta}$ aussagt.

Kapitel 1-3 sind einführender Art. In Kapitel 3-6 nehmen wir an, dass \tilde{t} diskret ist. In Kapitel 4 wird das Modell unter verschiedenen nicht-parametrischen Annahmen ausführlich diskutiert. Die verallgemeinerten Glaubwürdigkeitsschätzer - sie benützen Kenntnisse über \tilde{t} - werden mit den klassischen Glaubwürdigkeitsschätzern, welche solche Kenntnisse nicht benützen, verglichen. Wir geben zwei parametrische Beispiele.

In Kapitel 5 verallgemeinern wir den Begriff der konjugierten Klassen. Die grundlegende Idee besteht darin, dass die a posteriori-Verteilung von $\tilde{\theta}$, gegeben $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_t$, ($\tilde{t} > t$), in derselben Klasse wie die a priori-Verteilung von $\tilde{\theta}$ liegt. Wir behandeln Klassen, die exakte Glaubwürdigkeit ergeben, ausführlicher.

In Kapitel 3-5 nehmen wir an, dass die Verteilung von \tilde{t} nicht vom Prämienplan der Versicherungsgesellschaft abhängt. In Kapitel 6 lassen wir diese Annahme fallen und besprechen in Kürze einige Probleme und Möglichkeiten in diesem Zusammenhang.

In Kapitel 7 wird ein kontinuierliches Modell eingeführt, in welchem \tilde{t} kontinuierlich ist, und, für gegebene $\tilde{\theta} = \theta$, die Schäden einem Poisson-Prozess gemäss eintreffen.

Der Rest der Dissertation (Kapitel 7-10) behandelt die statistische Inferenz über die Strukturparameter im Modell von Kapitel 4 unter Anwendung kolateraler Daten. Kapitel 8 behandelt das Testen der Hypothese, dass es keine Dauereffekte gibt. Der Jonckheere-Terpstra Test wird für einen nicht-parametrischen Fall vorgeschlagen, und in einem parametrischen Modell wird ein Likelihood Ratio Test besprochen. In Kapitel 9 schlagen wir Schätzer für die Strukturparameter vor. Einige der Methoden von Kapitel 8-9 werden in Kapitel 10 auf ein numerisches Beispiel angewendet. Ein Autohaftpflichtversicherungssportefeuille von etwa 10'000 Policen wurde untersucht. Der Jonckheere-Terpstra Test lehnt die Hypothese "keine Dauereffekte" mit Signifikanzwahrscheinlichkeit 0.0003878 ab.