Doctoral Thesis

Algorithmen für Normalformen von Graphen

Author(s):
Schnyder, Walter Albert

Publication Date:
1983

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000292736

Diss. ETH 7358

ALGORITHMEN FÜR NORMALFORMEN VON GRAPHEN

Abhandlung

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE

ZÜRICH

vorgelegt von

WALTER ALBERT SCHNYDER

dipl. Math. ETH

geboren am 18. Oktober 1949

von Kriens (Kt. Luzern)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Specker, Referent

Prof. Dr. E. Engeler, Korreferent

Zürich 1983

Zentralstelle der Studentenschaft

ABSTRACT

The introduction of group theoretic methods in investigations of the graph isomorphism problem has recently led to the definition of polynomial time algorithms for testing isomorphism in several families of graphs. These new isomorphism algorithms, however, did not provide complete systems of invariants.

In view of the importance of such invariants for applications (e.g. chemical documentation) it is natural to try to apply the new methods to their computation. Each of the invariants defined in this thesis is a *normal form* , i.e. a function F mapping a class C of graphs into itself such that $F(X)$ is isomorphic to X and X is isomorphic to Y iff $F(X) = F(Y)$.

The main result is a normal form, defined on the class of finite graphs, whose restriction to d-valent graphs on n points is computable in time $O(n^{t(d)})$ for a suitable integer $t(d)$ only depending on d . This normal form is thus computable in polynomial time for graphs of bounded valence.

The proof answers E. Luks's question of determining the

computational complexity of the following problem:

Input: - Generators of a subgroup G of S_m acting on m-digit binary words by permuting digits.

- An m-digit binary word x .

Find: The lexicographically smallest word in the G-orbit of x .

This problem is NP-hard even for groups G of involutions. However, for each Γ_d-group G there is a new ordering (depending only on G) of the m digital positions such that for each x the smallest word (with respect to the new ordering) in the G-orbit of x can be found in time $O(m^{s(d)})$ where $s(d)$ is a constant depending only on d .

ZUSAMMENFASSUNG

Durch den Einsatz gruppentheoretischer Methoden zur Lösung von Graphenisomorphieproblemen sind in den letzten Jahren wesentliche Fortschritte erzielt worden. Die neuen Algorithmen entscheiden die Isomorphie von Graphen, indem sie Erzeugendensysteme von Automorphismengruppen bestimmen; sie berechnen jedoch keine vollständigen Invarianten.

Angesichts der Wichtigkeit der Berechnung solcher Invarianten für die Anwendungen (z.B. bei Dokumentationsaufgaben) stellt sich die Aufgabe, die algebraische Methode auch zu diesem Zweck zu benützen. Die in der vorliegenden Arbeit berechneten Invarianten sind *Normalformen*. Einer Klasse C von Graphen wird eine Abbildung F von C in C (die Normalform) so zugeordnet, dass gilt: $F(X)$ ist isomorph zu X; zwei Graphen X, Y sind genau dann isomorph, wenn $F(X) = F(Y)$.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist eine für endliche Graphen definierte Normalform, deren Einschränkung auf n-punktige, d-valente Graphen in der Zeit $O(n^{t(d)})$ berechenbar ist ($t(d)$ ist eine nur von d abhängige Konstante). Diese Normalform ist folglich für Graphen beschränkter Valenz polynomial berechenbar.

Im Beweis wird die von E. Luks gestellte Frage der Komplexität des folgenden Problems beantwortet:

Input: - Erzeugende einer Untergruppe G von S_m, welche auf m-stellige binäre Wörter durch Permutieren der Ziffern wirkt.
- Ein m-stelliges binäres Wort x.

Bestimme: Das lexikographisch kleinste Wort im G-Orbit von x.

Einerseits ist dieses Problem selbst für Gruppen G von Involutionen NP-hart. Anderseits existiert zu jeder Γ_d-Gruppe G eine nur von G abhängige neue Ordnung auf $\{1,\ldots,m\}$, bezüglich welcher die Minimierungsaufgabe für jedes x in der Zeit $O(m^{s(d)})$ lösbar ist (dabei ist s eine geeignete Funktion).