Etude asymptotique de tests robustes

Author(s):
Huber-Carol, Catherine

Publication Date:
1970

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000310350 →

Thèse no 4553

Etude asymptotique de tests robustes

THÈSE

présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich
pour l'obtention du grade de Docteur ès sciences mathématiques

par

CATHERINE HUBER-CAROL

licenciée ès mathématiques de l'Université de Paris
née le 1er mai 1943
de Thalheim (Canton de Zurich)

Acceptée sur proposition
du rapporteur professeur Dr P. J. Huber
du corapporteur Dr F. R. Hampel

Juris Druck + Verlag Zurich
1970

$$P\left\{\sup_{t\in I_k}(Z_t^n - Z_{\tau_k}^n) > \varepsilon(k,n)\right\} \leqslant \frac{c \cdot B}{\sqrt{n}\left[(H-\eta)(\tau+(2k+1)B)-bB\right]^2}$$

pourvu que $(H-\eta)(\tau+(2k+1)B) - bB$ soit positif, c'est à dire pour tous les k tels que $2k+1 > \frac{b}{H-\eta} - \frac{\tau}{B}$.

Soit k^* tel que $2k^* \leqslant \frac{b}{H-\eta} < 2k^*+1$.

Choisissons Γ assez grand pour que le fait que $Z_{\tau/\sqrt{n}} < -\Gamma$ entraîne que Z_t reste négatif entre $\tau/\sqrt{n}$ et t_{k^*} avec une probabilité voisine de 1.

Nous n'aurons plus alors qu'à considérer ce qui se passe à droite de t_{k^*}:

$$\sum_{k=k^*}^{k_0(n)} P\left\{\sup_{t\in I_k}(Z_t^n - Z_{\tau_k}^n) > \varepsilon(k,n)\right\}$$

$$\leqslant \frac{c}{\sqrt{n}(H-\eta)^2 B}\sum_{k=k^*}^{k_0(n)} \frac{1}{\left((2k+1)+\frac{(H-\eta)\tau-bB}{(H-\eta)B}\right)^2}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{c}{(H-\eta)^2 B}\sum_{k=0}^{k_0(n)-k^*}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

4. Monotonisation de ψ dans un cas particulier

Reprenons l'exemple cité au début du § 3: $p_t(x) = -te^{tx}$ avec $t < 0$ et $x \geqslant 0$. Nous allons tâcher de rendre ψ monotone décroissante en t en remplaçant la constante δ/τ par une fonction $\eta(t)$ qui devra avoir les propriétés suivantes:

(i) $\quad 0 < \eta(t) < -\frac{1}{te}$ $\quad$ car $\eta(t) = \delta/\tau$ qui doit vérifier la condition (3.7) de I.

(ii) $\eta'(t) \geqslant \dfrac{\eta(t)\,\mathrm{Log}(-t\,\eta(t))}{t}$ pour que $k_2'(t)$ soit négatif

(iii) $\eta'(t) \leqslant -\dfrac{1}{t}\, e^{u(t)}\, u(t)$

$e^{u(t)} - u(t) = 1 - t\eta(t)$ pour que $k_1'(t)$ soit négatif

On démontre par intégration que

$$\text{(i) + (ii)} \iff \eta(t) = \frac{e^{tf(t)} - 1}{-t} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} f(t) > 0 \\ f'(t) \leqslant 0 \end{array} \qquad (*)$$

$$\text{(iii)} \iff \eta(t) = \frac{te^{-h(t)} + e^{-te^{-h(t)}} - 1}{-t} \quad \text{avec} \quad h'(t) \geqslant 0 \qquad (**)$$

Il faut donc trouver des fonctions η appartenant à la fois aux deux familles (*) et (**). Remarquons que k_1 est une fonction croissante de δ/τ tandis que k_2 en est une fonction décroissante; le problème n'aura donc de solution que si, à la limite, la fonction $\eta(t)$ qui rend $k_1(t)$ constant rend en même temps $k_2(t)$ décroissant. Si on choisit à priori la valeur k de la fonction constante $k_1(t)$, k devra

1) être négatif (I fin du § 3)

2) vérifier $tk - 1 < 0$ ce qui implique $|k| < |1/t_0|$

Alors $\eta(t)$ a la forme suivante

$$\eta(t) = \frac{e^{tk-1} - tk}{-t} \tag{4.1}$$

Donc si l'on choisit $\dfrac{\delta}{\tau} = \eta(t)$, $k_1(t)$ est constant et égal à k et $k_2(t)$ vaut

$$\begin{aligned} k_2(t) &= \frac{1}{t}\,(1 + \mathrm{Log}(-t\eta(t))) \\ &= \frac{1}{t}\,(1 + \mathrm{Log}(e^{tk-1} - tk)) \end{aligned}$$

Alors la fonction de test

$$(4.2) \qquad \psi_t(x) = \left[\frac{1}{t} + x\right]_k^{\frac{1}{t}(1+\mathrm{Log}(e^{tk-1}-tk))}$$

est monotone décroissante en t. L'équation $\frac{1}{n}\sum_{i\leq n}\psi_t(x_i) = K$ définit donc un nombre unique $\hat{\theta}_n$. Pour obtenir le coefficient de confiance q_n et la longueur τ_n de l'intervalle de confiance $[\hat{\theta}_n - \tau_n , \hat{\theta}_n + \tau_n]$ il faut étudier les variations des deux fonctions

$$\tau(t) = \frac{-t\,\delta}{e^{tk-1}-tk}$$

$$q(t) = \Phi\left(-\frac{K}{\sigma(t)} - \sigma(t)\tau(t)\right) + \Phi\left(\frac{K}{\sigma(t)} - \sigma(t)\tau(t)\right)$$

où $\quad t_o < t < t_1 < 0$

$$k < 0$$

$$|k| < \frac{1}{t_o}$$

$$\sigma^2(t) = E_{p_t}(\psi_t^2(x))$$

a) <u>Variations de $\tau(t)$</u>

$$\tau'(t) = \frac{\delta\, e^{tk-1}}{(e^{tk-1}-tk)^2}\,(tk-1) < 0 \qquad \forall\, t \in [t_o t_1]$$

$$\tau(t) \leqslant \tau(t_o)$$

b) Variations de $q(t)$

On choisit $K = 0$. On doit donc étudier les variations de $\sigma(t)\tau(t)$.
On calcule en fait $\sigma^2(t)\tau^2(t)$

$$\sigma^2(t)\,\tau^2(t) = \frac{2\,\delta^2 \operatorname{Log}(e^{tk-1}-tk)}{e^{tk-1}-tk} + \frac{(e^{tk-1}(1-tk) + \frac{t^2k^2}{2})\,2\,\delta^2}{(e^{tk-1}-tk)^2}$$

dont on étudie les variations en posant $tk - 1 = u$ qui varie entre 0 et -1.
On obtient finalement

$$\max_t q(t) = \Phi(-\min(\sigma(t_0)\tau(t_0), \sigma(t_1)\tau(t_1)))$$

Malheureusement, aucune méthode générale n'a été obtenue pour traiter les cas où, comme dans cet exemple, la fonction de test ψ n'est pas monotone.