

# Die dritte Dimension aus einem Einzelbild

**Working Paper****Author(s):**

Rady, Jan

**Publication date:**

1984

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000315061>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**Originally published in:**

Mitteilungen / Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich 36

Institut für Geodäsie und  
Photogrammetrie  
an der Eidgenössischen  
Technischen Hochschule  
Zürich

Mitteilungen Nr.

**36**

# Die dritte Dimension aus einem Einzelbild

Jan Rady

Februar 1984

# Die dritte Dimension aus einem Einzelbild

Dr. sc. techn. Jan Rady

Februar 1984

Copyright by  
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie  
an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

Alle Rechte vorbehalten

Auflage: 450 Exemplare

# Vorwort

Die messtechnische Behandlung der dritten Dimension aus Einzelbildern stellt eine unorthodoxe photogrammetrische Messaufgabe dar. Die Lösung dieses Problems kann dank des elektronischen Rechners, d. h. der Möglichkeit der Ausführung einer grösseren Anzahl von Rechenoperationen mit hoher Stellengenauigkeit, in Betracht gezogen werden. Auf Grund dieser Entwicklung lässt sich die klassische photogrammetrische Einbildauswertung derart verallgemeinern, dass das mathematische Modell der Zentralperspektive durch Zusatzparameter erweitert und die Einführung von Stützinformation in Form unvollständig vorgegebener Objektpunkte vorgenommen wird.

In der vorliegenden Arbeit, die von der Abteilung für Kultur- und Vermessungsingenieure der ETHZ als Dissertation angenommen wurde, hat der Autor nun die Problem-Verallgemeinerung insofern erweitert, indem er die klassische Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschnittes mit dem Problem verknüpfte, die dreidimensionalen Orte von völlig unbekanntem Objektpunkten aus deren Abbildungen auf einer Einzelaufnahme abzuleiten. Die vorgelegte Lösung ist grundsätzlich dadurch gekennzeichnet, dass die zur Anwendung kommende Methodik ganz allgemein im Sinne der Ikonometrie, also als ein spezifischer Fall der Vermessung von Objekten auf Grund von vorliegenden Abbildungen entwickelt wurde. Damit wird der, in meiner Meinung, wesentliche Schritt vollzogen, die Lösung nicht als Spezialfall im Sinne der Philosophie der klassischen Photogrammetrie abzuleiten, sondern auf Grund einer Gedankenfolge zu erarbeiten, welche die heutige computergestützte Bildmessung charakterisiert.

Der Autor benützt als geometrische Grundlage des mathematischen Modells den Einzelstrahl des Abbildungsvorganges. Dadurch wird von vornherein der Weg offen gehalten, die in dieser Arbeit auf die Photographie bezogenen Lösungsschritte auch auf nicht zentralperspektive Abbildungsprozesse anzuwenden.

Die Forderung nach von aussen gegebener zusätzlicher Stützinformation wird allgemein verwendbar durch die Gegenüberstellung der Anzahl unabhängig ableitbarer Bestimmungsgleichungen und der im Problem als Unbekannte auftretenden System- und Objektpunktparameter.

Für die Lösung der Aufgabe von fundamentaler Bedeutung ist dabei, dass es dem Autor gelingt nachzuweisen, dass damit nicht nur die räumliche Ortsbestimmung geeignet ausgewählter Objektpunkte gelingt, sondern dass derartige Information auch zur Bestimmung von Systemunbekannten, d. h. von Elementen der Kammerkalibrierung, als auch der Aufnahmeorientierung beiträgt.

Das Problem der Verarbeitung von überschüssiger Information wird auf eine allgemein anwendbare Form der Ausgleichsrechnung gestützt. Nach einem begründeten Hinweis auf die Bedeutung einer statistisch strengen Behandlung derartiger Aufgaben wird die Lösung, übereinstimmend mit den bei der Auswertung von Messungen sich aufdrängenden statistischen Grundsätzen, angefasst. Nach der Bildung eines grundsätzlich singulären Normalgleichungssystems wird dessen Defekt durch das Hinzufügen problemorientierter Bedingungsgleichungen für die zu bestimmenden Unbekannten beseitigt. Damit ist auch in diesem Auswerteschritt die universelle Anwendbarkeit der vorgeführten Lösung auf andere als hier behandelte Probleme sichergestellt.

Die Arbeit zeichnet sich vor allem dadurch aus, dass sie sich nicht auf die theoretischen Grundlagen der Problemstellung beschränkt, sondern den Anforderungen der praktischen Anwendung gerecht wird. Die behandelte Problematik hat, dies soll hier betont werden, für die Praxis wesentliche Bedeutung. Die Anregung zu der vorgelegten Abhandlung ergab sich aus einer Anfrage der Es ist nun gerade die Forderung nach zumindest eindeutiger Defektbeseitigung, die das behandelte Problem von den typischen photogrammetrischen Triangulationsverfahren unterscheidet. Es wird überzeugend gezeigt, dass die herkömmlichen Arten der Defektbeseitigung bei dem vorliegenden Problem nicht oder zumindest nur in beschränkter Masse zur Anwendung kommen können. Es wird folglich in Verbindung mit den geometrischen Eigenschaften des abgebildeten Objektes nach Ansätzen gesucht, welche die benötigte Information als Funktionen der Orte der interessierenden Objektpunkte liefern. Es wird gezeigt, dass vor allem Symmetrieeigenschaften am zu vermessenden Objekt derartige Information enthalten.

Flugzeugindustrie, die interessiert ist, aus metrisch nur mangelhaft definierten photographischen Aufnahmen neuer Flugzeugtypen der Konkurrenz die Metrik dieser Produkte abzuleiten. Derartige Wünsche sind aber nicht auf Flugzeughersteller beschränkt, weswegen die vorgelegten Erkenntnisse dieser Arbeit einem breiten Interessenkreis zugute kommen sollten. Dazu sei der Autor zitiert: «Künstliche, industriell hergestellte Objekte besitzen oft Regelmässigkeiten, die auf Statik, Dynamik, Fertigungstechnik, manchmal sogar nur auf Ästhetik beruhen. Gelingt es, solche geometrische

Merkmale zu erkennen, mathematisch zu formulieren und in den Lösungssatz zu integrieren, so kann auch aus Einzelbildern räumliche Koordinateninformation gewonnen werden.» Ende des Zitats.

Mit zwei praktischen Beispielen, die auf den hergeleiteten Grundsätzen der Einzelbildauswertung beruhen, führt der Autor eine Gesamtauswertung vor, welche die erfolgreiche Anwendung der erarbeiteten Methode zeigt.

Zürich, im Januar 1984

*Hellmut Schmid*

# Inhaltsverzeichnis

1.	Einleitung	7
2.	Aufgabenstellung	7
3.	Grundbegriffe, Definitionen	7
3.1	Mathematische Grundlagen	9
3.2	Abgrenzung der Aufgabe	10
4.	Lösungsmöglichkeiten	10
4.1	Die Lösung mit Transformations- parametern	10
4.2	Bündelbehandlung	11
4.3	Zusätzliche Stützungsmöglich- keiten	14
5.	Defektbeseitigung beim Einzelbündel	14
5.1	Punktbedingungen	16
5.1.1	Der Fluchtpunkt	16
5.1.2	Symmetrische Doppelpunkte	17
5.2	Linienelemente	19
5.2.1	Punkte einer Geraden	19
5.2.2	Punkte eines Kreises	19
6.	Beschaffung von Näherungswerten	20
6.1	Ein Zahlenbeispiel	23
7.	Das Normalgleichungssystem	24
7.1	Die Koeffizienten-Matrix	24
7.2	Berücksichtigung von Bedingungen	24
7.2.1	Koeffizienten der Bedingungsgleichungen	25
7.2.1.1	Die Fluchtpunktbedingung	25
7.2.1.2	Symmetrischer Doppelpunkt	26
7.3	Die Gewichte	27
7.4	Aufbau und Auflösung des Normalgleichungssystems	27
7.5	Abbruchkriterium	28
8.	Genauigkeitsschätzung	29
8.1	Genauigkeit der Ergebnisse a posteriori	29
8.2	Quantitativer Nachweis	30
9.	Detailauswertung	31
9.1	PC 6 Pilatus Turbo Porter	32
9.2	Northrop F 5 E Tiger	35
10.	Zusammenfassung	41
11.	Literaturhinweise	43
12.	Schlusswort	45





## 1. Einleitung

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der grundsätzlichen Problematik einer ungewöhnlichen und deshalb auch nur spezifisch auftretenden photogrammetrischen Aufgabe. Das Ergebnis, d.h. geometrische Information über das abgebildete Objekt, soll aus Messungen in einer einzelnen photographischen Aufnahme mit Hilfe eines geeigneten Berechnungsalgorithmus gewonnen werden. Die Aufnahmeparameter sind dabei unbekannt und können auch nicht vorgängig beeinflusst werden.

Wie bereits im Vorwort erwähnt, beruht die Anregung zu dieser Arbeit auf einer Anfrage aus der Flugzeugindustrie.

Die Formgebung der heutigen Flugzeuge ist weitgehend durch aerodynamische Gesetzmässigkeiten geprägt. Andererseits wiederum kann die Kenntnis der Form unter Anwendung derartiger Erkenntnisse über die fliegerischen und leistungsmässigen Parameter des zu untersuchenden Objektes Auskunft geben. Der eigentlichen Form ist dabei grössere Bedeutung beizumessen als dem absoluten Massstab. Zumal dieser nur in verhältnismässig engen, für den Fachmann nicht allzu schwer abschätzbaren Grenzen variabel ist.

Und die Bestimmung der Form kann bekanntlich als das typischste Endprodukt der photogrammetrischen Messmethode bezeichnet werden.

Der eigentliche Ansporn zu dieser Arbeit aber ist einer auf den ersten Blick vielleicht unmöglich erscheinenden Anforderung zuzuschreiben, nämlich: die räumlichen Koordinaten des Objektes aus einer Einzelaufnahme zu bestimmen.

Diese Aufgabe konnte, begrenzt auf das spezifisch interessierende Gebiet, gelöst werden. Die dazu verwendeten Werkzeuge dürften jedoch auch in anderen Bereichen der Photogrammetrie anwendbar sein, wenn bekannte oder ableitbare Objekteigenschaften als Stützinformation zur Verfügung stehen.

## 2. Aufgabenstellung

Diese Arbeit hat folgende Zielsetzung:

Es ist zu untersuchen, ob aus einer einzelnen, vorwiegend nicht metrischen und zunächst nicht orientierten Photoaufnahme räumliche Koordinaten interessierender Objektpunkte bestimmt werden können. Bei den Objekten handelt es sich um künstliche Flugkörper, über die keine weiteren Angaben verfügbar sind. Ein Bezugsrahmen wird im Hinblick auf Orientierung und Massstab nicht nötigerweise vorgegeben.

Möchte man sich zur Einordnung dieser Aufgabe der gebräuchlichen Fachterminologie bedienen, so können zu ihrer Charakterisierung die Begriffe:

- unkonventionelle Aufnahmeanordnung
- analytische Auswertung
- simultan selbst-kalibrierende Berechnung
- Einbild-Photogrammetrie

herangezogen werden.

## 3. Grundbegriffe, Definitionen

Eine photographische Aufnahme kann durch die projektive Zuordnung eines objektseitigen und eines bildseitigen Punkthaufens erklärt werden. Die Abbildungsgeometrie wird durch die gegenseitige Lage des Objekt- und des Bildraumes sowie durch die Eigenschaften des Projektors (Linsensystem, Medium usw.) bestimmt.

Für die meisten photogrammetrischen Aufgaben wird angenommen, dass die Objektpunkte mit Hilfe von ungebrochenen, durch ein gemeinsames Projektionszentrum gehenden Lichtstrahlen in einer Bildebene punktförmig abgebildet werden. Als Idealfall einer solchen Projektion wäre eine Aufnahme anzusehen, die im luftleeren Raum mit einer «camera obscura» auf ideal ebener und stabiler Photoschicht entstanden ist.

Durch solche Formulierung ist es möglich, sich lediglich auf eine rein geometrisch fundierte Modellvorstellung zu beschränken und somit auf eine Vielfalt von Nebenerscheinungen und Einflüssen vorderhand zu verzichten. Man nimmt also an, dass verschiedene physikalische und chemische Eigenschaften des Mediums und der Werkzeuge, z.B. Lichtbrechung, Objektivverzeichnung, Filmverzug, Unebenheit des Schichtträgers usw., im Hinblick auf die gewünschten Ergebnisse hinreichend klein sind, um als nicht existent oder zumindest als nicht störend zu gelten bzw. aufgrund vorgängiger Informationserhebung als Korrekturen an die physikalischen Bildkoordinaten angebracht werden können.

Dadurch wird erreicht, dass die mathematische Formulierung der projektiven Abbildung der Zentralperspektive entspricht. Das diesem Modell zugrunde liegende Prinzip – die Kolinearitätsbedingung – kann in seiner Grundform dargestellt werden als  $\mathbf{X}_i = \mathbf{O} + \mathbf{p}_i \cdot \lambda_i$

mit  $\mathbf{X}_i$  als Objektpunktvektor  
 $\mathbf{O}$  als Ortsvektor des Projektionszentrums  
 $\mathbf{p}_i$  als Bildpunktvektor  
 $\lambda_i$  als Massstabsfaktor.

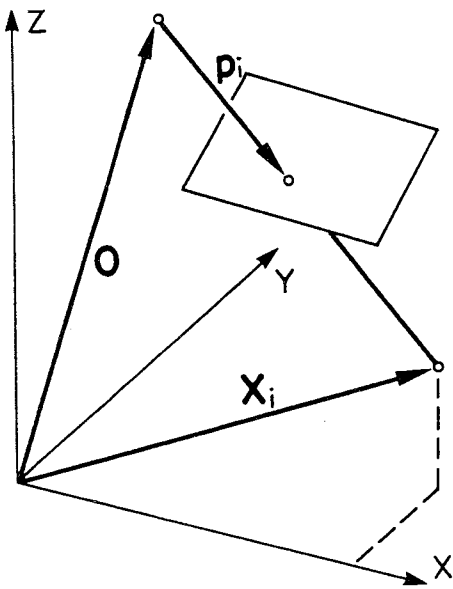


Abbildung 1

Interpretiert man diese Beziehung im Hinblick auf alle auftretenden Abbildungsstrahlen, spricht man meist von einem Strahlenbündel. Dessen Positionierung wird mit der Vorgabe der Raumkoordinaten  $X_0, Y_0, Z_0$  des Projektionszentrums, also des Ortsvektors  $\mathbf{O}$ , erreicht. Die Orientierung des Strahlenbündels wird mit drei Raumdrehungen  $\omega, \varphi, \kappa$  des Kamerakoordinatensystems  $\bar{\mathbf{x}}$  bezüglich des Objektsystems erhalten. Das Kamerakoordinatensystem endlich ist das in das Projektionszentrum translierte Bildkoordinatensystem  $\mathbf{x}$ . Die Translationsparameter sind die Elemente der sog. inneren Orientierung  $X_0, Y_0, c$ .

Damit ergibt sich die mathematische Formulierung  $\mathbf{X}_i = \mathbf{O} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{x}}_i\lambda_i$ , oder

$$\begin{vmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{vmatrix} + \mathbf{D} \begin{vmatrix} x_i - x_0 \\ y_i - y_0 \\ 0 - c \end{vmatrix} \lambda_i \quad (1)$$

Die Aufgabe der Photogrammetrie besteht im allgemeinen darin, solche Strahlenbündel zu rekonstruieren, zu orientieren und für entsprechende Bildpunkte die zugehörigen Objektkoordinaten zu bestimmen.

Die Rekonstruktion und Orientierung von Strahlenbündeln ist in der Literatur ausgiebig behandelt worden und ist – bei ausreichender Stützinformation – unproblematisch. In der Praxis sind die sich mit einem Einzel-Bündel beschäftigenden Lösun-

gen vor allem der Bestimmung von (Näherungs-) Parametern der äusseren Orientierung ( $X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa$ ) vorbehalten. Auch einige Kammerkalibrierungs-Methoden, wie z.B. die Stellarkalibrierung, beruhen auf Einzelbündel-Verfahren. Der Informationsinhalt des Bildes wird vornehmlich verwendet, um die projektiven Parameter des Aufnahmesystems aus der bekannten Geometrie des abgebildeten Objektes zu bestimmen.

Zum Hauptzweck einer Vermessung jedoch – nämlich zur Gewinnung von Objektinformationen – ist ein Einzelbild im allgemeinen ungenügend, da zur Bestimmung von drei unbekanntem Objektkoordinaten nur zwei Beobachtungen zur Verfügung stehen. Die Aufgabe kann also nur gelöst werden, sofern geeignete Zusatz-Information über den abgebildeten Objektpunkt verfügbar ist.

Die bekannteste Form solcher Einzelbildauswertung ist die sog. Entzerrung, wobei die Objektpunkte einer Ebene angehören müssen (z.B.  $Z_i = \text{konst.}$ ). Im Abschnitt 4.1 wird anhand des Spezialfalles «Entzerrung» der sog. Parameter-Ansatz gezeigt.

Solche Lösungsansätze sind aber, um es vorwegzunehmen, für die Zielsetzung unserer Aufgabe ungeeignet, unter anderem wegen erschwerten Zugriffs auf die einzelnen Orientierungsparameter. Wenn also die Entzerrung auf die Vorgabe je einer Punktcoordinate angewiesen ist, kann sie bei räumlicher Ausdehnung des Objektes höchstens partiell angewendet werden. Dabei muss zu jeder Teilentzerrung die notwendige Information erhältlich sein, was wiederum eine Objekt-Kennntnis in höherem Masse nötig macht, wie z.B. bei der Herstellung von Orthophotos. Da solche Information bei unserer Problemstellung definitions-mässig nicht angenommen werden kann, muss man versuchen, die fehlende Kenntnis am Objekt durch erkennbare geometrische Gesetzmässigkeiten zu ersetzen bzw. zu ergänzen.

Künstliche, industriell hergestellte Objekte besitzen oft geometrische Regelmässigkeiten, die aufgrund von Statik, Dynamik, Fertigungstechnik, manchmal sogar Ästhetik entstehen. Gelingt es, solche geometrischen Merkmale in den Lösungsansatz zu integrieren, so kann auch aus Einzelbildern räumliche Koordinaten-Information gewonnen werden.

Ein Beispiel solcher Auswertung zeigte A. Grün [6], wo aus einer orientierten Aufnahme durch Messung des perspektivisch verzeichneten Umrisses einer rotationssymmetrischen Kuppel deren Meridian bestimmt werden konnte. Es wurden dabei mehrere Möglichkeiten gezeigt, die Beziehung des scheinbaren Umrisses zum Meridian für die Rekonstruktion von beliebigen Rotationsflächen auszunützen.

Kager und Krauss beschrieben in [9] Ansätze, mit denen das in charakteristischer Geometrie vorhandene Potential zur Stützung eines photogrammetrischen Bündel-Blocks genützt werden könnte. Ein darauf abstützendes Programm-System zur Auswertung hybrider Information wurde von Kager anlässlich des ISP-Kongresses in Hamburg 1980 vorgestellt [10]. In gewisser Ähnlichkeit zu unserer Aufgabenstellung wird die geometrische Zuordnung beobachteter Punkte, wie z.B. Punkte einer Geraden, Fläche usw., als Stützinformation verwertet. Derartige Bedingungen werden unter dem Gesichtspunkt der vorliegenden Problemstellung im Abschnitt 5 eingehend behandelt.

Anschliessend eine Bemerkung, die besonders im Zusammenhang mit ähnlich gelagerter Problematik angebracht erscheint: Bei derart unkonventionellen Problemstellungen muss man beachten, dass auch trotz reichlich vorhandener Bestimmungstücke die Aufgabe unlösbar bleiben kann. Dies tritt ein, wenn ungünstige Geometrie oder schlechte Parameterwahl keine eindeutige Lösung ermöglichen. Gegebenenfalls kann eine theoretisch und auch numerisch noch mögliche Lösung wegen ihrer schwachen Konditionierung für die Praxis wertlos sein. Deshalb sind Zuverlässigkeitsangaben der Ergebnisse meist unerlässlich.

### 3.1 Mathematische Grundlagen

Die Gleichung (1), explizit in  $\mathbf{x}$  hat nach Eliminierung des Massstabsfaktors die bekannte Form:

$$x = x_0 - c \frac{M}{Q} \quad \text{und} \quad y = y_0 - c \frac{N}{Q} \quad (2)$$

wobei die auf das Projektionszentrum bezogenen räumlichen Koordinaten M, N, Q des Objektpunktes folgende Bedeutung haben:

$$\begin{vmatrix} M \\ N \\ Q \end{vmatrix} = \mathbf{D} \begin{vmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} M &= r_{11} (X - X_0) + r_{12} (Y - Y_0) + r_{13} (Z - Z_0) \\ N &= r_{21} (X - X_0) + r_{22} (Y - Y_0) + r_{23} (Z - Z_0) \\ Q &= r_{31} (X - X_0) + r_{32} (Y - Y_0) + r_{33} (Z - Z_0). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen:

- $x, y$  – Bildkoordinaten
- $x_0, y_0, c$  – Koordinaten des Projektionszentrums im räumlich aufgefassten Bildkoordinatensystem
- $X, Y, Z$  – Objektpunktkoordinaten
- $X_0, Y_0, Z_0$  – Koordinaten des Projektionszentrums
- $r_{11} - r_{33}$  – Elemente der Drehmatrix  $\mathbf{D}$ .

Die Koordinaten beziehen sich auf ein orthogonales (Rechts-)System mit linearem, einheitlichem Massstab.

Die Umkehrung dieser Gleichungen, die später noch benötigt wird, führt auf:

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{u}{w} \quad \text{und} \quad Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{v}{w} \quad (3)$$

wobei

$$\begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} = \mathbf{D}^T \begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ 0 - c \end{vmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} u &= r_{11} (x - x_0) + r_{21} (y - y_0) - r_{31} c \\ v &= r_{12} (x - x_0) + r_{22} (y - y_0) - r_{32} c \\ w &= r_{13} (x - x_0) + r_{23} (y - y_0) - r_{33} c. \end{aligned}$$

Der X, Y, Z-Reihenfolge der Drehachsen entsprechend (s. Abbildung 1), basieren die im folgenden verwendeten Formeln und Ableitungen auf einer

$\omega, \varphi, \kappa$ -Drehanordnung.

Vollständigkeitshalber seien die Elemente der entsprechenden Drehmatrix hier aufgeführt:

$$\begin{aligned} r_{11} &= \cos \varphi \cos \kappa \\ r_{12} &= \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ r_{13} &= \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ r_{21} &= -\cos \varphi \sin \kappa \\ r_{22} &= \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ r_{23} &= \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ r_{31} &= \sin \varphi \\ r_{32} &= -\sin \omega \cos \varphi \\ r_{33} &= \cos \omega \cos \varphi. \end{aligned}$$

Die nominellen Winkelwerte beziehen sich auf ein (mitgedrehtes) Drehachsen-System.

Charakteristische Eigenschaften einer solchen Drehmatrix können verwendet werden, um z.B. bei pseudo-linearen Lösungsansätzen die Beziehung zur regulären Matrix wiederherzustellen. Bekanntlich gilt für die Orthogonalität die Eigenschaft

$$\begin{aligned} r_{11} r_{12} + r_{21} r_{22} + r_{31} r_{32} &= 0 \\ r_{12} r_{13} + r_{22} r_{23} + r_{32} r_{33} &= 0 \\ r_{11} r_{13} + r_{21} r_{23} + r_{31} r_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (E 1)$$

und für die Normierung

$$\begin{aligned}r_{11}^2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 &= 1 \\r_{21}^2 + r_{22}^2 + r_{23}^2 &= 1 \\r_{31}^2 + r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1\end{aligned}\quad (\text{E } 2)$$

Manchmal ist es vorteilhafter, eine weniger bekannte Eigenschaft anzuwenden, die besagt, dass jedes  $r_{ij}$ -Element einer orthogonalen Drehmatrix gleich seiner Adjunkten ist. Unter einer Adjunkten (oder auch algebraischem Komplement) des Elementes  $r_{ij}$  versteht man seine Unterdeterminante, deren Vorzeichen positiv oder negativ wird, je nachdem die Summe der Indizes  $(i + j)$  gerade oder ungerade ist. Zum Beispiel

$$r_{11} = r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32}. \quad (\text{E } 3)$$

Wie z. B. die Formel (2) zeigt, führen die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Beobachtungen (Bildkoordinaten  $x$  und  $y$ ) und den zu ermittelnden Grössen zu einem nicht-linearen Gleichungssystem, das wie üblich mit der Taylorreihe linearisiert wird. Zur Ausgleichung des Gleichungssystems wird auch in diesem Fall die bewährte Methode, das GAUSSsche Prinzip der kleinsten Quadrate angewendet. Deshalb sollen auch die für die Anwendung dieser Methode gestellten Anforderungen, wie etwa normalverteilte, unkorrelierte Beobachtungen, vernachlässigbar kleine systematische Modellfehler usw., als erfüllt angenommen werden. Etwaige kleine Abweichungen von diesen Anforderungen haben für die hier behandelte Problemstellung auf das berechnete Resultat keinen wesentlichen Einfluss.

### 3.2 Abgrenzung der Aufgabe

Obschon das Bildmaterial, welches dieser Aufgabe zu Grunde liegt, im allgemeinen durch die Verwendung von nicht-metrischen Kammern entsteht, wird für die Zwecke dieser Studie auf eine zusätzliche Verfeinerung der inneren Orientierung (vor allem auf Koeffizienten, welche die Radial- und Dezentrierungs-Verzeichnung simulieren) verzichtet. Es wird bei der jeweiligen Aufnahme lediglich untersucht, ob deren Informationsinhalt zur Bestimmung der Bildweite bzw. der Koordinaten des Bildhauptpunktes ausreichend ist.

Ferner wird angenommen, dass sowohl die Unebenheit des Schichtträgers als auch die photo-chemische Verarbeitung die Qualität der Auswertevorlage hinsichtlich der Abbildungsgeometrie nur unbedeutend beeinflussen.

Die etwaigen Auswirkungen der Refraktion können ebenfalls vernachlässigt werden, da die Aufnahmeentfernungen meistens klein sind. Ist

ausnahmsweise eine Aufnahme aus grösserer Entfernung erstellt worden, so kann man davon ausgehen, dass bei entsprechend schmalen Strahlenbündel alle Abbildungsstrahlen annähernd der selben Refraktionswirkung ausgesetzt waren. Daraus resultiert eine geringfügige Änderung der Transformationsparameter zwischen Kamera- und Objektkoordinaten-System. Dieser Tatsache müsste Rechnung getragen werden, wenn die Stützinformation an beiden Systemen gleichzeitig einzuführen wäre – ein nur theoretisch denkbarer Fall.

Aus dieser Betrachtung ausgeschlossen bleiben auch zusätzlich (manipulierte) Aufnahmen, bei denen zwischen dem Originalnegativ und der zur Auswertung verwendeten Vorlage eine projektive Deformation stattgefunden hat (zufällige oder absichtliche Verzerrung beim Kopieren oder Vergrössern, Druck usw.). Bekanntlich besteht zwischen Bildern derselben Punktanzahl immer eine projektive Beziehung. Grundsätzlich kann also aus einer zentralperspektivischen Projektion durch eine anschliessende projektive Abbildung jede beliebige projektive Deformation erzeugt werden. Insbesondere auch solche, die durch eine reelle Zentralperspektive überhaupt nicht erhältlich wären. Dabei ist diese Verzerrung lediglich auf die Änderung der Parameter der inneren Orientierung sowie der Drehungen zurückzuführen, während der Aufnahmeort mit demjenigen der Originalaufnahme identisch ist (projektive Kongruenz) [5].

Die Auswertung solcher Aufnahmen bedingt innerhalb des Orientierungsvorganges eine gleichzeitige Rückführung der Verzerrung zum Original. Dies ist zu erreichen, wenn das mathematische Modell um Parameter erweitert wird, die Funktionen entsprechender Orientierungselemente sind.

## 4. Lösungsmöglichkeiten

### 4.1 Die Lösung mit Transformationsparametern

Dieser Lösungsansatz beruht auf der Tatsache, dass die Orientierungsparameter, d.h. die ursprünglichen Systemunbekannten nicht direkt, sondern in Form von gewissen Kombinationen dieser Grössen, als Transformationsparameter auftreten. Diese Transformationsparameter haben u.U. die Eigenschaften von linear unabhängigen Grössen und können bei eindeutigen Lösungen ohne Kenntnis der Näherungswerte direkt bestimmt werden.

Ein solches Verfahren, die (direkte lineare Transformation) (DLT), wurde von Abdel-Aziz und

Karara [1] beschrieben. Etwas später haben sich Bopp und Krauss [2] [3] mit der Elf-Parameter-Lösung konsequenter beschäftigt und daraus ein schnellkonvergierendes, allerdings nicht mehr lineares Kalibrierungs- und Orientierungs-Verfahren abgeleitet.

Da später noch ein in Grundsätzen der DLT ähnlicher Lösungsansatz für die Bestimmung von Näherungswerten der Orientierung angegeben wird, sei diese Methode hier am Beispiel der Entzerrung einer Ebene gezeigt.

Die Gleichung für die x-Bildkoordinate (2) kann nach einer Unterteilung auf Punkt- (i) und System-Unbekannte (o) geschrieben werden zu

$$x = x_o - c \frac{M_i + M_o}{Q_i + Q_o} = x_o \frac{Q_i - c}{Q_i + Q_o} + \frac{M_i + x_o \frac{Q_o - c}{Q_i + Q_o}}{Q_i + Q_o}$$

Wird ein Bezugsrahmen so festgelegt, dass die X, Y-Ebene parallel zur Objektebene ist, so kann die nun konstante Z-Koordinate (ebenes Objekt) zu den punkt-invariablen Systemunbekannten zugeordnet werden. Somit ist

$$M_i = r_{11} X_i + r_{12} Y_i \\ M_o = -r_{11} X_o - r_{12} Y_o + r_{13} (Z_i - Z_o)$$

und

$$Q_i = r_{31} X_i + r_{32} Y_i \\ Q_o = -r_{31} X_o - r_{32} Y_o + r_{33} (Z_i - Z_o).$$

Nach der Division der rechten Seite der Gleichungen (2) mit  $Q_o$  (da diese für beide Gleichungen identisch ist), und gewisser Umformung, erhält man die bekannten 8-Parameter-Ausdrücke für

$$x_i = \frac{A_x X_i + B_x Y_i + C_x}{D X_i + E Y_i + 1}$$

und (4)

$$y_i = \frac{A_y X_i + B_y Y_i + C_y}{D X_i + E Y_i + 1}.$$

Aus den zu (2) spiegelbildlichen Gleichungen (3) können auf ähnliche Weise die Ausdrücke

$$X_i = \frac{a_x x_i + b_x y_i + c_x}{d x_i + e y_i + 1}$$

und (5)

$$Y_i = \frac{a_y x_i + b_y y_i + c_y}{d x_i + e y_i + 1}$$

gebildet werden.

Die Reversibilität der Gleichungen (4) und (5) beziehungsweise deren Koeffizienten kann aus der Umkehrbarkeit der Zentralperspektive abgeleitet werden (P. Tham [23]). Die Beziehungen der

einzelnen Orientierungsgrößen zu den linear unabhängigen Transformationsparametern wurden durch H. Schmid [16] behandelt.

Die Transformationsparameter  $A_x, B_x, \dots, E$ , oder  $a_x, b_x, \dots, e$ , sind komplizierte Funktionen der einzelnen Orientierungsparameter, wie zum Beispiel

$$A_x = \frac{x_o r_{31} - c r_{11}}{-r_{31} X_o - r_{32} Y_o + r_{33} (Z_i - Z_o)}.$$

Mit Vorgabe von vier zugeordneten Koordinatenpaaren ist die Aufgabe direkt lösbar. Bei Überbestimmung führt sie jedoch auf eine nicht lineare Form, deren Auflösung Annäherungswerte erfordert.

Wenn man die Passpunkt-Information durch das Festhalten von einigen Orientierungselementen ergänzen oder ersetzen möchte, so kann dies auch nur unter Verzicht auf die lineare Unabhängigkeit der Transformationsparameter erfolgen. Hinzu kommt, dass die zu berücksichtigenden Orientierungselemente in der Regel nicht fehlerfrei sind, was bei statistisch konsequenter Lösung eine komplizierte Formulierung von Funktionsgewichten zur Folge hat. Auch die simultane Bestimmung von Koordinaten-Unbekannten bringt eine nicht-lineare Verknüpfung in das Gleichungssystem hinein und macht eine iterative Auflösung notwendig.

Der wesentlichste Vorteil dieser Methode besteht in der Unabhängigkeit von pre-kalibrierten Elementen der inneren Orientierung. Die Methode ist aber nur dort vorteilhaft, wo ausreichende Objektinformation verfügbar ist und die einzelnen Orientierungselemente nicht quantitativ behandelt oder ausgewiesen werden müssen. Das letztere ist zwar für unsere Aufgabe nicht wesentlich, könnte aber bei evtl. Verwendung von Messbildern (Tests) zusätzliche Schwierigkeiten bereiten.

Grundsätzlich setzt dieses Verfahren eine ebene Objektpunktanordnung voraus. Ausserdem lässt die anfangs gestellte Anforderung auf minimale Objektinformation diese Methode für die zu untersuchende Problematik als ungeeignet erscheinen.

## 4.2 Bündelbehandlung

Die bekannteste Art der Verwendung eines Einzelbündels ist der räumliche Rückwärtsschnitt. Dabei werden die Elemente der inneren Orientierung  $c_o, x_o, y_o$  meistens vorgegeben, wodurch eine von der Genauigkeit dieser Parameter abhängige Rekonstruktion des Strahlenbündels zur Verfügung steht. Die Aufgabe besteht somit darin, dieses Bündel zu positionieren und zu orientieren, d.h. die Elemente der äusseren Orientierung zu bestimmen. Bei entsprechender Formulierung ist es möglich, die Bestimmung von Objektkoordina-

ten in denselben Auflösungsschritt einzubeziehen. Dabei besteht in bezug auf die Dreidimensionalität der Objektform grundsätzlich keine Einschränkung.

Die Lösung einer so formulierten Aufgabe ist nur im Zusammenhang mit einem übergeordneten Bezugsrahmen sinnvoll und möglich. Ist dieser nicht (vollständig) definiert, so spricht man von einem Defekt (D) des Systems. Bei dreidimensionalen Problemen ist dieser Defekt, d.h. der Informationsmangel in bezug auf das übergeordnete System, von Rang sechs. Im allgemeinen tritt bei Messanordnungen, wo nur Richtungsbeobachtungen vorliegen, noch die Forderung nach einem Massstabsfaktor auf, wodurch sich in dementsprechenden Fällen der Rang des Defektes auf sieben erhöht.

Die Aufgabe des Rückwärtsschnittes führt gemäss der allgemeinen zentralperspektivischen Modellformulierung aufgrund der Kollinearitätsbedingung bei  $\langle i \rangle$  Objektpunkten zu folgender Parameterbilanz:

Unbekannte (u)			Bestimmungs- gleichungen (b)
Elemente der äusseren Ori- entierung	Massstabs- faktor	Objektpunkt- Koordinaten	
$X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa$	$\lambda_i$	$X_i, Y_i, Z_i$	$3i$ (vgl. (1))

Es ist daraus ersichtlich, dass bei dieser Formulierung für jeden Strahl  $\langle i \rangle$  ein dazugehöriger Massstabsfaktor  $\lambda_i$  auftritt. Der gesamte Defekt setzt sich somit aus dem System- und den einzelnen Punkt-Defekten zusammen ( $D = 6 + i$ ). Da die zur Defektbeseitigung eingeführten Parameter gleichzeitig die Anzahl der Unbekannten verringern, können sie als Bestimmungsstücke betrachtet werden. Somit ist die allgemeine Parameterbilanz:

$$u - D = b$$

oder

$$(6 + 4i) = 3i + (6 + i).$$

Aus dieser Beziehung ersieht man, dass eine Lösung für  $i = 0$  mit  $D = 6$  besteht, d.h. allein mit der Vorgabe der Elemente der äusseren Orientierung ( $X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa$ ).

Beim Vorhandensein eines einzelnen Strahles (d.h.  $i = 1$  und  $D = 7$ ) können z.B. wiederum alle Orientierungselemente vorgegeben sein, wodurch der Systemdefekt bis zum Rang 6 beseitigt ist. Das noch fehlende siebente Bestimmungsstück, das definitionsgemäss zur Massstabsbestimmung geeignet sein muss, muss deshalb am Objekt-

punkt selbst wirksam werden. Dieses Bestimmungsstück kann entweder als die Länge des orientierten Strahles definierender Massstabsfaktor  $\lambda_i$  oder durch die Vorgabe einer Objektpunkt-Koordinate, d.h. durch die Bereitstellung einer entsprechenden Komponente von  $\lambda_i$ , eingeführt werden (z.B.  $\lambda_{Z_i}$  aus  $Z_i - Z_o$ ).

Sind alle drei Objektkoordinaten eines bestimmten Punktes  $\langle i \rangle$  gegeben, müssen zumindest vier geeignete Elemente der äusseren Orientierung vorgegeben sein. Aufgrund dieser Überlegungen ergibt sich zunächst die Tatsache, dass die zur Defektbeseitigung nötigen Parameter grundsätzlich an beliebigen Stellen in das System eingeführt werden können. In unserem Fall jedoch unter der Einschränkung, dass für jeden auftretenden Objektpunkt mindestens eine seiner Koordinaten gegeben sein muss. Derartige Information trägt allerdings nicht zur Bestimmung der Orientierungselemente bei. Sie führt jedoch zur Selbstbestimmung des Ortes des Objektpunktes.

Somit interessieren vor allem Objektpunkte, für deren Lage mindestens zwei Koordinaten vorgegeben sind (Typ  $\langle j \rangle$ ) und solche, die mit allen drei Koordinaten a priori bekannt sind (Typ  $\langle k \rangle$ ). In der folgenden Tabelle ist die zur Defektbeseitigung notwendige Anzahl von Objektpunkten zusammengestellt, aufgegliedert nach der Anzahl vorgegebener Koordinaten je Objektpunkt:

Die Zeilen mit verbleibendem Informationsmangel  $\langle \text{Null} \rangle$  stellen vier eindeutige Lösungen dar, die sich entsprechend der gewählten  $j + k$ -Punktkombination ergeben. Problem 2 zeigt, dass für sechs Punkte des Types  $\langle j \rangle$ , also bei der Vorgabe von zwei Koordinaten je Objektpunkt, eine eindeutige Lösung besteht. Natürlich müssen geeignete Koordinatenpaare ausgewählt werden, um die Singularität des Lösungssystems zu vermeiden.

Problem 3 zeigt, dass ein Vollpasspunkt (Typ  $\langle k \rangle$ ) und vier Punkte des Types  $\langle j \rangle$  zu einer eindeutigen Lösung führen.

Im Problem 4 wird eine weitere eindeutige Lösung vorgeführt, mit zwei Vollpasspunkten und zwei Punkten des Types  $\langle j \rangle$ .

Das Problem 5 stellt den klassischen Rückwärtseinschnitt mit drei Vollpasspunkten als eindeutige Lösung dar.

Ferner bestehen natürlich weitere eindeutige Lösungen, jeweils dann, wenn sich der durch die gewählte Punktkombination anstehende Defekt durch deren Informationsinhalt ausgleichen lässt.

Die Eliminierung des Massstabsfaktors  $\lambda_i$  in den Gleichungen (1) verringert zwar die Anzahl von Unbekannten auf  $u = 6 + 3i$ , hat aber auf die vorherige Bilanz keinen Einfluss, da die Anzahl der Bestimmungsgleichungen dann auf  $2i$  reduziert wird.

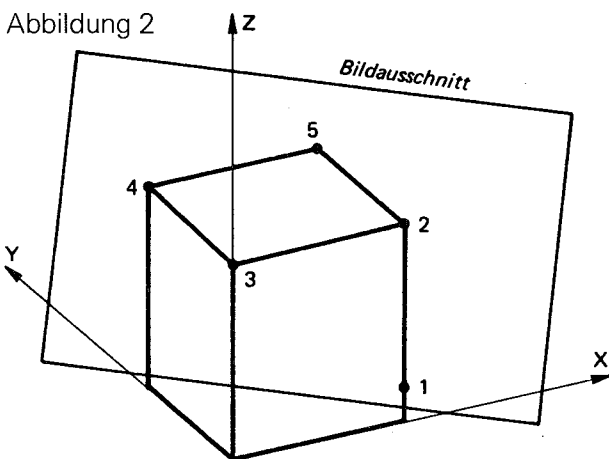
Tabelle 1

Problem Nr.	Punkttyp*		Anzahl der Punkte $i = j + k$	Anzahl der Unbekannten $u = 6 + 4i$	Bestimmungsstücke gegebene Koord.		Rang des Informationsmangels $u - (b + n)$
	j	k			Gleichungen $b = 3i$	$n = 2j + 3k$	
1	0	0	0	6	0	0	$6 - 0 = 6$
2	1	0	1	10	3	2	$10 - 5 = 5$
	2	0	2	14	6	4	$14 - 10 = 4$
	3	0	3	18	9	6	$18 - 15 = 3$
	4	0	4	22	12	8	$22 - 20 = 2$
	5	0	5	26	15	10	$26 - 25 = 1$
	6	0	6	30	18	12	$30 - 30 = 0$
3	0	1	1	10	3	3	$10 - 6 = 4$
	1	1	2	14	6	5	$14 - 11 = 3$
	2	1	3	18	9	7	$18 - 16 = 2$
	3	1	4	22	12	9	$22 - 21 = 1$
	4	1	5	26	15	11	$26 - 26 = 0$
4	0	1	1	10	3	3	$10 - 6 = 4$
	0	2	2	14	6	6	$14 - 12 = 2$
	1	2	3	18	9	8	$18 - 17 = 1$
	2	2	4	22	12	10	$22 - 22 = 0$
5	0	1	1	10	3	3	$10 - 6 = 4$
	0	2	2	14	6	6	$14 - 12 = 2$
	0	3	3	18	9	9	$18 - 18 = 0$

\*j = Punkte mit 2 Koordinaten gegeben

k = Punkte mit 3 Koordinaten gegeben

Die Erweiterung des funktionalen Modells um die Elemente der inneren Orientierung bedingt natürlich eine höhere Anzahl der erforderlichen Bestimmungsstücke. Auch hier sind der Charakter und die Anordnung dieser Information auf die Qualität der zu bestimmenden Parameter ausschlaggebend. Als Beispiel sei die folgende Situation gezeigt:



Nr.	X	Y	Z
1	$l$	0	-
2	$l$	0	$l$
3	0	0	$l$
4	0	$l$	$l$
5	$l$	$l$	$l$

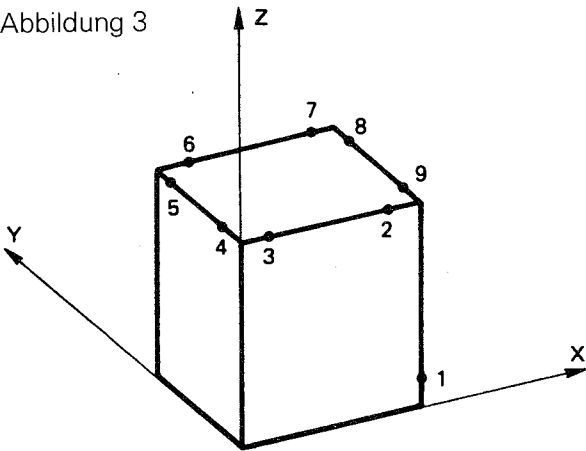
Es liegt eine Teilaufnahme eines Würfels vor (Abbildung 2), die mit einer hochwertigen, d. h. im praktischen Bereich verzeichnungsfreien Amateurkamera, angefertigt wurde. Gesucht ist die innere und äussere Orientierung der Aufnahme. Die Seitenlänge des Würfels ( $l$ ) ist bekannt. Das Bezugssystem kann frei definiert werden.

Mit dem gewählten Koordinatensystem können den gemessenen Punkten 1-5 die obigen Koordinatenwerte zugewiesen werden. Wie die nachfolgende Bilanz zeigt, ist die Aufgabe mit diesen Punkten lösbar:

Anzahl Punkte	Unbekannte	Bestimmungsstücke Gleichungen	gegebene Koord.	Rang des Informationsmangels
$i = j + k$	$u = 9 + 4i$	$b = 3i$	$n = 2j + 3k$	$u - (b + n)$
1	13	3	2	$13 - 5 = 8$
2	17	6	5	$17 - 11 = 6$
3	21	9	8	$21 - 17 = 4$
4	25	12	11	$25 - 23 = 2$
5	29	15	14	$29 - 29 = 0$

Sind die Ecken des Würfels aus irgendeinem Grund nicht direkt messbar, so kann die Aufgabe zum Beispiel mit folgender Messpunktanordnung gelöst werden (Abbildung 3):

Abbildung 3



Nr.	X	Y	Z	Nr.	X	Y	Z
1	l	0	-	6	-	l	l
2	-	0	l	7	-	l	l
3	-	0	l	8	l	-	l
4	0	-	l	9	l	-	l
5	0	-	l				

Im Gegensatz zur 1. Messanordnung kommen in diesem Beispiel nur Teilpasspunkte des Types  $\langle j \rangle$  zur Verwendung. Die Aufgabe ist, wie die nachfolgende Parameterbilanz zeigt, ebenfalls lösbar:

Anzahl Punkte	Unbekannte	Bestimmungsstücke	Rang des Informationsmangels
$i = j + k$	$u = 9 + 4i$	$b = 3i$	$n = 2j$
1	13	3	$13 - 5 = 8$
2	17	6	$17 - 10 = 7$
3	21	9	$21 - 15 = 6$
4	25	12	$25 - 20 = 5$
5	29	15	$29 - 25 = 4$
6	33	18	$33 - 30 = 3$
7	37	21	$37 - 35 = 2$
8	41	24	$41 - 40 = 1$
9	45	27	$45 - 45 = 0$

Bezüglich der Orientierungsparameter sind die Lösungen beider Beispiele identisch. Die Qualität der zweiten Lösung ist – wie sie sich aus Vergleich der invertierten Gleichungssysteme feststellen lässt – jedoch geringer, auch wenn die Messpunkte 2–8 in der unmittelbaren Nähe der Eckpunkte liegen oder mit diesen zusammenfallen würden.

Aus dem bisher Gesagten kann zusammenfassend festgestellt werden, dass:

- Aus einem orientierten Strahlenbündel kann eine beliebige Anzahl von «Neupunkten» bestimmt werden, sofern mindestens eine ihrer Objektkoordinaten vorgegeben ist.
- Punkte mit mehr als einer vorgegebenen Koordinate tragen im Sinne der Parameterbilanz zur Beseitigung des System-Defektes bei oder erlauben eine Überbestimmung ihrer Ortskoordinaten.

### 4.3 Zusätzliche Stützungsmöglichkeiten

Es wurde bereits erwähnt, dass sich für völlig unbekannte Punkte bei Einzelbildauswertung keine Lösung ergibt, da zur Bestimmung von drei unbekanntem Objektkoordinaten nur zwei Beobachtungen zur Verfügung stehen. Naturgemäß liegt jedoch der Hauptzweck dieser Betrachtung gerade in der Bestimmung solcher Punkte. Es stellt sich also die Frage, ob das System auf eine andere Art gestützt werden kann, um den vorhandenen Informationsmangel zu beseitigen.

Bei den bisherigen Betrachtungen ist man gedanklich nur von direkten Messgrößen ausgegangen. Mit anderen Worten, zur Behebung des Informationsdefizits wurden nur vorgegebene Werte von Parametern der Kollinearitätsbedingung verwendet.

Stehen jedoch gewisse Objektunbekannte in einem funktionalen Zusammenhang und ist dieser bekannt, d. h. mathematisch formulierbar, so kann diese Funktion als Stützinformation verwendet werden. Die Voraussetzung dazu ist, dass eine solche Funktion geometrische Information enthält, die von bereits eingeführter Stützinformation unabhängig ist.

Wenn es also z. B. gelingt, zwischen zwei Neupunkten zwei solche funktionale Abhängigkeiten (Bedingungen) zu formulieren, so ergeben sich für dieses Punktepaar zweimal zwei direkte Beobachtungen plus zwei Bedingungen, also sechs unabhängige Bestimmungsgleichungen. Die sechs unbekanntem Punktkoordinaten sind dann – entsprechende geometrische Anordnung vorausgesetzt – eindeutig bestimmbar. Das Punktepaar ist somit (als Einheit) selbsttragend geworden.

Aus der Erweiterung dieser Lösungsidee ergibt sich, dass mehr als zwei zusätzliche Bestimmungsgleichungen eines Punkte-Paares sogar zu dessen Überbestimmung beitragen oder aber auch zur Bestimmung der Systemunbekannten herangezogen werden können.

### 5. Defektbeseitigung beim Einzelbündel

Grundsätzlich können überbestimmte Messaufgaben bei entsprechender Wahl des mathematischen Modells nach dem Prinzip einer bedingten Ausgleichung behandelt werden. Bei der Verwendung eines Modells, das zur vermittelnden Ausgleichung führt, ergibt sich sehr oft auch bei beliebig grosser Überbestimmung zunächst ein singuläres Gleichungssystem [21]. Zu dieser Gruppe gehört unser Problem. Die Singularität muss durch Beseitigung des System-Defektes



behalten werden, indem ein vorgegebener Bezugsrahmen definiert und der Messanordnung zugeordnet wird. Wie bereits erwähnt, müssen bei dreidimensionaler Punktanordnung mit einem unbekanntem, jedoch einheitlichen Massstab sieben geeignete Parameter von aussen zur Verfügung stehen, welche die Lagerung der Punktanordnung durch drei Translationen, drei Rotationen und einer Massstabsanpassung festlegen.

Auf welche Art und an welcher Stelle diese Parameter eingeführt werden, ist bei eindeutiger Lagerung – welche zunächst hier betrachtet werden soll – nur von sekundärer Bedeutung. Zumal die Definition eines Bezugsrahmens bezüglich der zahlenmässigen Ergebnisse immer eine Willkür darstellt.

Gemäss Aufgabenstellung sind wir bei unserem Problem bezüglich der Wahl eines solchen Bezugsrahmens frei. Wir können also folgendes Koordinatensystem einführen:

Die X, Z-Ebene sei mit der Symmetrie-Ebene des Flugkörpers identisch. Die X-Achse sei mit der Flugachse annähernd parallel und in der Flugrichtung positiv. Der Koordinaten-Ursprung sei einfachheitshalber jeweils so gewählt, dass die X- und die Z-Werte positiv bleiben. Die Festlegung des Massstabes erfolgt durch Vorgabe einer Strecke oder Koordinatendifferenz.

Charakteristisch für unsere Aufgabe ist die Tatsache, dass die direkten Beobachtungen nicht einmal zur eindeutigen Bestimmung der Objektgeometrie ausreichen. Bei jedem Punkt muss die zusätzlich entstehende Singularität der Objektpunktage durch Beschaffung von weiteren Bestimmungsstücken abgebaut werden. Während also die Stützwerte zur Beseitigung des System-Defektes an beliebiger Stelle berücksichtigt werden können, muss jedem nicht ausreichend definierten Punkt die entsprechende Zusatzinformation gezielt zugeführt werden. In der Behandlung beider Arten von Stützwerten besteht formell kein Unterschied. Man muss aber beachten, dass eine zur Behebung des System-Defektes gedachte Information nur dann als solche wirksam werden kann, wenn sie sich auf einen im Sinne der inneren Objektgeometrie bereits bestimmten Objektpunkt bezieht.

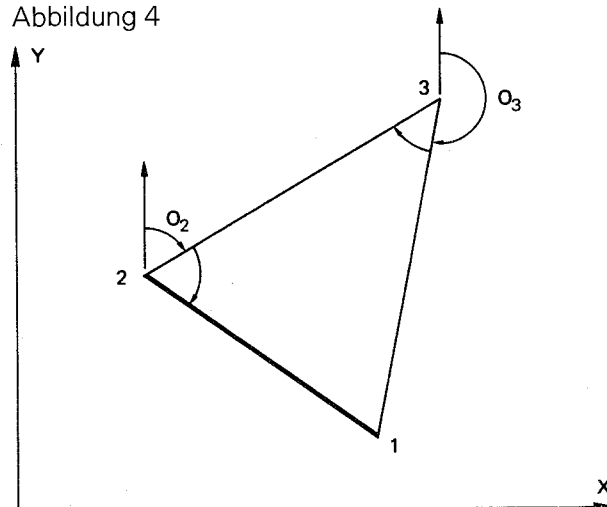
Unter der Annahme, dass der System-Defekt durch geeignete Massnahmen beseitigt wurde, soll im folgenden die zur Behebung des Defektes der Objektgeometrie erforderliche Zusatzinformation diskutiert werden.

Im Abschnitt 4.3 wurde die Behauptung aufgestellt, wonach die mit direkt beobachteten Grössen nur unvollständige Punktbestimmung durch

Berücksichtigung von funktionalen Zusammenhängen ergänzt werden kann. Diese Funktionen müssen von bekannten oder erkennbaren Eigenschaften des Objektes ableitbar sein, auch wenn über die Punkte selbst keine quantitativen Angaben erhältlich sind. Dabei muss die bereits erwähnte Voraussetzung erfüllt sein, wonach derartige Zusatzbedingungen in bezug auf ihren geometrischen Inhalt zur Beseitigung des Objekt-Defektes geeignet sein müssen.

Zur Erläuterung ein einfaches Beispiel: In einem Dreieck wurden auf zwei Punkten (2 und 3) je zwei unorientierte Richtungen und eine Strecke ( $\overline{12}$ ) gemessen (Abbildung 4). Zu bestimmen sind die Koordinaten der Eckpunkte.

Abbildung 4



Mit gebräuchlichen Parametern der Geodäsie aufgestellte Bilanz:

gesucht: 6 Koordinaten  $X_1 Y_1 X_2 Y_2 X_3 Y_3$   
2 Orientierungsunbekannten  $O_2 O_3$   
 8 Unbekannte.

Da der Massstab durch die Streckenmessung festgelegt wird, ist der Defekt des Systems von Rang 3 (zwei Translationen und eine Drehung). Für Ermittlung von Unbekannten stehen somit zur Verfügung:

4 unorientierte Richtungen  
 1 Strecke  
3 Parameter der Defektbeseitigung  
 also 8 Bestimmungsstücke,

mit denen die Aufgabe eindeutig bestimmbar ist.

Wurden nun z. B. die Richtungen am Punkt 2 nicht gemessen, so ist die Aufgabe unlösbar. Weiss man aber, dass dieses Dreieck in bezug auf Punkt 3 gleichschenkelig ist, so kann diese Tatsache als

Bestimmungsstück verwendet werden. Die Bilanz sieht jetzt folgendermassen aus:

gesucht:		gemessen oder vorgegeben:
6	Koordinaten	2 unorientierte Richtungen
	$X_1 Y_1 X_2 Y_2 X_3 Y_3$	1 Strecke
1	Orientierungs-	3 Defekt-Parameter
	unbekannte $O_3$	1 Bedingung $S_{13} = S_{23}$
7	Unbekannte	7 Bestimmungsstücke.

Die Tatsache, dass solche Lösungsphilosophie auch bei anderen, komplexeren Funktionen anwendbar ist, macht die Lösung unserer Aufgabe möglich.

Im wesentlichen bestehen nur wenig Möglichkeiten, aus der Zuordnung eines Punktes zu einem geometrischen Element zusätzliche Information zu gewinnen. Die folgende Tabelle zeigt die maximale Ausbeute an Information bei Beobachtung eines Bildpunktes, der einem vollständig definierten geometrischen Element angehört:

geometr. Element	Definitions-gleichungen	Beobach-tungs-Gleichungen	Unbe-kannte	verwendbare Bestimmungsstücke
Punkt	3	2	3	$3 + 2 - 3 = 2$
Linie	2	2	3	$2 + 2 - 3 = 1$
Fläche	1	2	3	$1 + 2 - 3 = 0$

Während also ein Punkt oder eine Linie überschüssige Information enthalten kann, sind unbekannte Punkte einer (definierten) Fläche gerade noch selbsttragend. Folglich leisten diese weder zur Bestimmung von Orientierungsunbekannten noch zur evtl. Parameter-Bestimmung der Fläche selbst irgendeinen Beitrag. Derartige Punkte können deshalb auch einzeln, ausserhalb des Gesamt-Systems bestimmt werden.

Für die weitere Betrachtung sollen also nur solche Kombinationen herangezogen werden, die durch formulierbare Zusammenhänge zwischen den Unbekannten zur Auflösung des Systems beitragen können. Solche funktionale Verknüpfungen werden hier als Bedingungen zwischen den Objektpunkt-Koordinaten formuliert und als solche behandelt.

Ausgeschlossen aus dieser Betrachtung bleiben solche Bedingungen, die eine nicht-photogrammetrische Verknüpfung zwischen den Orientierungs- und Objektpunkt-Parametern darstellen, da sie bei vorliegender Aufgabenstellung in nur theoretisch vorstellbaren Fällen auftreten. Die Berücksichtigung solcher Verknüpfungen ist durch entsprechende Anwendung der vorgestellten Lösungsphilosophie aber ohne weiteres möglich.

Eine weitere Abgrenzung dieser Betrachtung besteht darin, dass bei allen im folgenden behandelten Punktanordnungen eine eindeutige geometrische Bestimmbarkeit vorausgesetzt wird. Als Beispiel: Es wurde gezeigt, dass mit einem orientierten Strahl und Vorgabe einer beliebigen Koordinate (d. h. Ebene) die übrigen zwei Punktkoordinaten – als Durchstosspunkt – bestimmt werden können. Ist dieser Strahl nun zufällig zur X, Z-Ebene parallel, so führt die Vorgabe eines Y-Wertes offensichtlich zur Singularität. Bereits eine Annäherung an solche Situation kann bei der Auflösung des Gleichungssystems zu numerischen Schwierigkeiten führen.

Eine umfassende Behandlung aller in Frage kommenden Bedingungen oder deren Kombinationen ist für unsere auf das Grundsätzliche abzielende Problematik nicht wesentlich. Im folgenden werden deshalb nur einige in ihren Eigenschaften charakteristische Bedingungen diskutiert.

## 5.1 Punktbedingungen

Der Formelapparat gängiger Punktverbindungen, wie räumliche Strecke oder Richtung, ist in bezug auf kartesische Koordinatensysteme hinreichend bekannt und kann vorausgesetzt werden. Anwendbar ist diese Kenntnis bei unserer Problematik jedoch nur in Ausnahmefällen, da in der Regel keine derartigen Beobachtungen vorliegen.

Bei der Vermessung morphologischer Objekte kommen zwei Arten von Punktverbindungen nicht vor. Es sind dies:

- die Fluchtpunkte
- die objektbezogene symmetrische Punktanordnung.

Gerade diese sind es jedoch, insbesondere die Symmetrie-Bedingung, mit deren Hilfe die Lösung unserer Aufgabe möglich wird.

### 5.1.1 Der Fluchtpunkt

Parallele Geraden werden durch die Zentralperspektive im allgemeinen konvergent abgebildet. Die Abbilder solcher Geraden schneiden sich im sog. Fluchtpunkt. Dieser ist definiert als Durchstosspunkt in der Abbildungsebene derjenigen Geraden, die durch das Projektionszentrum geführt wird und mit den abgebildeten Geraden parallel ist. Die nicht direkt messbaren Bildkoordinaten eines Fluchtpunktes können – mitsamt ihrer Varianz-Kovarianz-Werte – als Schnittpunkt der Verlängerungen zugehöriger Geraden bestimmt werden. Es ist bekannt, dass die Fluchtrichtungen zur Bestimmung von Orientierungswinkeln verwendbar sind.

Verhältnismässig einfach zu formulieren sind die Bedingungen für diejenige Geradenschar, die mit einer Koordinaten-Ebene parallel ist. Bei einer Parallelität mit z. B. der X, Y-Ebene ist definitionsgemäss die Fluchtpunkthöhe  $Z = Z_0$ , woraus sich aus den Gleichungen (3) über die Grenzwerte

$$\lim_{X, Y \rightarrow \infty} w = 0$$

die zu erfüllende Bedingungsgleichung

$$r_{13} (x - x_0) + r_{23} (y - y_0) - r_{33} c = 0 \quad (6)$$

ableiten lässt.

Zwei solche Fluchtpunkte definieren bekanntlich den sog. Bildhorizont, mit dessen Hilfe die (azimut-abhängigen) Primär- und Sekundär-Drehungen bestimmbar sind.

Durch geeignete Wahl des Bezugsrahmens kann man bei künstlichen Objekten erreichen, dass die Punktverbindungen auch zu einer der Koordinatenachsen parallel sind. Da sich der Fluchtpunkt gedanklich im Unendlichen befindet, ist die Beobachtungsgleichung für alle Punkte der Fluchtgeraden identisch. Zum Beispiel: die Beobachtungsgleichungen für den Fluchtpunkt in X-Richtung sind gültig für alle Punkte mit den Koordinaten  $X \neq X_0$ ,  $Y = Y_0$  und  $Z = Z_0$ . Diese Werte in die Gleichungen (2) eingesetzt, ergeben folgende Bedingungsgleichungen.

$$\begin{aligned} r_{31} (x - x_0) + r_{11} c &= 0 \\ r_{31} (y - y_0) + r_{21} c &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Gleichungen für die Y-Fluchtrichtung:

$$\begin{aligned} r_{32} (x - x_0) + r_{12} c &= 0 \\ r_{32} (y - y_0) + r_{22} c &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Anschaulich ist die Ermittlung von Drehungen beim Fluchtpunkt der Vertikalen, dem sog. Nadirpunkt. Seine Koordinaten im Objektraum ( $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z \neq Z_0$ ) in die Gleichungen (2) eingesetzt, ergeben folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} r_{33} (x - x_0) + r_{13} c &= 0 \\ r_{33} (y - y_0) + r_{23} c &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Wie in den Gleichungen (8), treten auch bei den letzten zwei Gleichungen Drehmatrix-Elemente auf, die jeweils alle Drehwinkel enthalten. Da aber jeweils nur zwei Bestimmungsgleichungen vorliegen, muss eine der Drehungen vorgegeben werden, um die übrigen zwei bestimmen zu können. Man kann sich, um diese Tatsache zu verdeutli-

chen, ein um den Nadir-Strahl rotierbares Bild vorstellen; der Winkel zwischen diesem Strahl und der Bildebene bleibt konstant und der Bildhorizont stets parallel zur Grundriss-Ebene.

Es ist ersichtlich, dass mit mindestens einer Fluchtrichtung, die zu einer der Koordinaten-Ebenen parallel ist, und einer (achsenparallelen) Richtung (oder selbstverständlich einem Passpunkt) alle drei Drehwinkel ermittelt werden können.

Im optimalen Fall schliesslich, d. h. wenn in allen drei Koordinatenrichtungen je ein Fluchtpunkt verfügbar ist, können ausser den drei Drehwinkeln auch noch die Elemente der inneren Orientierung bestimmt werden. Die sechs Bedingungsgleichungen (7), (8), (9), gemeinsam aufgelöst, vermitteln die gesuchten Orientierungsgrössen. Diese Tatsache kann geometrisch erklärt werden: Man stelle sich das Objektraum-Bezugssystem parallel verschoben vor, so dass dessen Ursprung im Projektionszentrum liegt. Die (Abbildungen) der Fluchtpunkte sind definitionsgemäss gleichzeitig die Durchstosspunkte der Koordinaten-Achsen mit der Bildebene. Im allgemeinen Fall kann die Bildebene im positiven Achsen-Raum nur eine einzige Lage einnehmen, bei der die Fluchtpunkte auf den Achsen dieses Systems zu liegen kommen. Die Länge der Normalen zur Bildebene ist in bezug auf das lokale System gleich dem Projektionsabstand (c). Die Koordinaten des Fusspunktes dieser Normalen im Messsystem der Bildebene ergeben die Koordinaten des Bildhauptpunktes  $x_0$  und  $y_0$ . Aus der räumlichen Richtung der Normalen können die Orientierungswinkel abgeleitet werden.

### 5.1.2 Symmetrische Doppelpunkte

Die vorgestellte Lösungsidee wurde abgeleitet aufgrund der Tatsache, dass die Formgebung heutiger Flugzeuge von der Aerodynamik am meisten beeinflusst wird und dadurch eine entsprechend ausgeprägte Symmetrie der Konstruktion besteht. Die Wahl des vorher definierten Bezugsrahmens, der zur Beseitigung der System-Singularität erforderlich ist, berücksichtigt diese Gegebenheit. Ein derart festgelegtes Koordinatensystem kann auch vorteilhaft zur Behebung des Objekt-Defektes eingesetzt werden, nämlich überall dort, wo beide Bildpunkte eines symmetrischen Punkt-Paares messbar sind. Für solche Punkte-Paare – wir bezeichnen sie hier als symmetrische Doppelpunkte – können dank dem gewählten Bezugssystem die Symmetrie-Bedingungen sehr einfach formuliert werden, indem man deren Koordinaten wertmässig gleichsetzt. Wir bedienen uns hier der in der Stereophotogrammetrie gebräuchlichen Notation für Punkt

links (') und rechts ('') und können durch eine einfache Bilanz für einen Doppelpunkt mit

- 6 unbekanntem Punktkoordinaten  $X' Y' Z' X'' Y'' Z''$
- 4 beobachteten Bildkoordinaten  $x' y' x'' y''$
- 3 Bedingungen  $X' = X'', Y' = -Y'', Z' = Z''$ ,

d. h. 7 Bestimmungsstücken

bereits eine einfache Überbestimmung feststellen. Mit anderen Worten, ein nach den Koordinaten

völlig unbekannter symmetrischer Doppelpunkt ist im Sinne der Parameterbilanz mit einem Teilpasspunkt des Types  $\langle j \rangle$  gleichwertig.

Betrachten wir das folgende Beispiel:

Zur Beseitigung des System-Defektes (räumlich, mit Massstabsanpassung, Rang=7) wird die räumliche Strecke zwischen Punkten 1 und 2, sowie die Höhe des symmetrischen Doppelpunktes 3, vorgegeben (Abb. 5). Die innere Orientierung ist bekannt. Gesucht sind die restlichen Punktkoordinaten sowie die Orientierung.

Die Bilanz der eindeutigen Lösung:

Punkte	Gegebene Koordinaten	Unbekannte	Bestimmungsstücke (b)		gegeben. Koord.	Rang des Informationsmangels	
			Bestim. Gleich.	Beding. Gleich.			
i	Nr.	$u = 6 + 4i$	3i	m	n	$u - (b + n + m)$	
1	1	X Y Z	10	3	0	3	$10 - 6 = 4$
2	2	X Y Z	14	6	0	6	$14 - 12 = 2$
3	3'	- - Z	18	9	0	7	$18 - 16 = 2$
4	3''	- - -	22	12	3	7	$22 - 22 = 0$

Jeder zusätzliche Doppelpunkt trägt bereits zur Überbestimmung der Lösung bei:

5	4'	- - -	26	15	3	7	$26 - 25 = 1$
6	4''	- - -	30	18	6	7	$30 - 31 = -1$

Die auf die Y, Z-Ebene reduzierte, schematische Darstellung veranschaulicht, dass nur eine Lösung (d. h. Lage des Projektionszentrums) möglich ist, bei der alle Strahlen zu den zugehörigen Punkten führen und die Punktverbindungen gleichzeitig sowohl mit der Y-Achse parallel sind, als auch diese durch die Symmetrie-Achse (Z) halbiert werden.

Dieses Lösungsprinzip ist auch räumlich gültig.

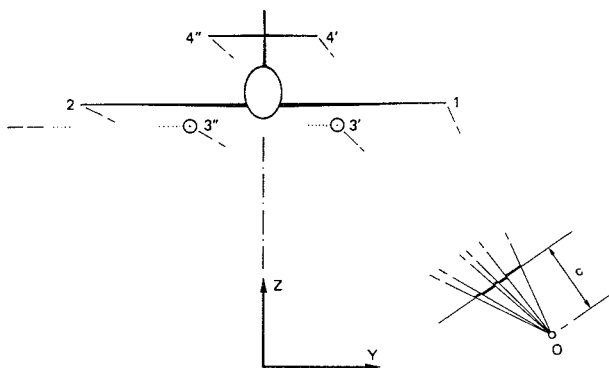


Abbildung 5

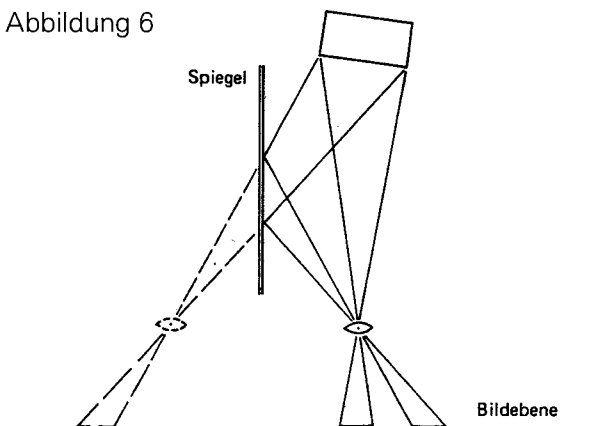
Man erkennt auch, dass diese Bestimmungsart in gewissen Lagen versagt. Befindet sich zum Beispiel das Projektionszentrum in der Symmetrie-Ebene, so ist die Bestimmung von derartig gestützten Punkte-Paaren nicht eindeutig. Da in solchem Fall die Abbildungsstrahlen ebenfalls symmetrisch angeordnet sind, so ist bei deren Rekonstruktion die Symmetrie-Bedingung unwirksam; die abgebildete Punktverbindung kann entlang dieser Strahlen «rutschen», wobei die Bedingung  $Y' = -Y''$  immer erfüllt wird.

Eine mehrfache Symmetrie, wie sie z. B. bei Raketenkörpern anzutreffen ist, ergibt selbstverständlich einiges mehr an Stützinformation. Andererseits können durch direkte Bedingungen zwischen den Punktkoordinaten auch solche Punkte-Paare verwertet werden, die nur teilweise oder überhaupt nicht symmetrisch sind, dafür aber andere, durch spezifische Koordinaten-Verhältnisse erfassbare Verknüpfungen aufweisen. Solche Punkte werden an dieser Stelle deshalb erwähnt, weil sie ausser den Fluchtpunkten die einzigen sind, bei denen die Bedingungen ohne Einführung von zusätzlichen Unbekannten formuliert werden können.

Während ein symmetrischer Doppelpunkt in der Regel oft vorkommt und auch relativ leicht erkennbar ist, sind andere, derart verwendbare Zusammenhänge seltener und von Fall zu Fall unterschiedlich, so dass man sie kaum vorhersagen kann. Vielfach ist es der «Erfindungsgabe» des Auswerters überlassen, den Informations-Ertrag solcher Verknüpfungen zu beurteilen und ihre Verwendbarkeit abzuschätzen.

Ebenfalls zu erwähnen an dieser Stelle ist noch die früher manchmal praktizierte, indirekte (oder sogar unbewusste) Anwendung der Symmetrie-Bedingung bei der sog. Spiegel-Photogrammetrie. Dabei wurden die aufzunehmenden, vorwiegend kleineren Objekte und deren Spiegelbilder mit einer Überweitwinkel-Kammer gleichzeitig auf demselben Bild abgebildet.

Abbildung 6



Das Spiegelbild wurde als eine mit einer zweiten Kammer entstandene Aufnahme betrachtet. Dementsprechend wurde von der Doppelabbildung ein Duplikat hergestellt und das so entstandene «Stereopaar» in einem herkömmlichen Analoggerät ausgewertet.

Da diese Methode aus praktischen Gründen (Ebenheit des Spiegels, Objekt- und dadurch auch Spiegel-Grösse, Weitwinkel-Objektive und -Auswertegeräte) nur wenig Anwendung fand, ist auch deren theoretische Behandlung auf die Erklärung rudimentärer Geometrie beschränkt geblieben. Eine analytische Behandlung, aus derer sich Hinweise auf die hier diskutierten Zusammenhänge ableiten liessen, ist nicht bekannt.

## 5.2 Linienelemente

Eine Linie im Raum kann als Schnitt zweier Flächen  $F(X, Y, Z) = 0$  und  $G(X, Y, Z) = 0$  aufgefasst werden und ist somit durch diese zwei Gleichungen definiert. Den Bildpunkten eines Linienelementes können folglich zwei zusätzliche Bestim-

mungsgleichungen zugeordnet werden. Die dadurch entstandene Überbestimmung ist in geeigneten Fällen zur Defizitbeseitigung verwertbar. Es wurde jedoch eingangs erwähnt (Seite 16), dass der Beitrag solcher Elemente im Vergleich zu Punktelementen geringer ist. Hinzu kommt, dass ihre Berücksichtigung die Einführung von neuen, teils unbekanntem Parametern nötig macht. Somit ist die praktische Verwendbarkeit eingeschränkt. Deshalb soll diese Lösungsidee nur anhand zweier Beispiele kurz erläutert werden.

### 5.2.1 Punkte einer Geraden

Eine Gerade im Raum ist als Schnitt zweier Ebenen definiert und analytisch durch ein System zweier linearer Gleichungen der Art  $aX + bY + cZ + d = 0$  gegeben. In der Photogrammetrie ist es naheliegend, eine dieser Ebenen als die projizierende Ebene der Geraden zu wählen. Die Spur der zweiten Ebene muss durch mindestens zwei nicht-photographisch erfasste Stützpunkte angegeben werden, davon eine Koordinatenangabe. Der zweite Stützpunkt kann entweder eine zweite (nicht demselben Punkt angehörende) Koordinate, eine Richtung oder eine Strecke sein, wobei die letztere wegen quadratischen Gliedern zwei mögliche Ergebnisse zulässt. Damit ergibt sich, dass mit geeigneten Zusatz-Daten von aussen eine Gerade definiert und deren Punkte bestimmt werden können.

An dieser Stelle soll an eine am Anfang gemachte Bemerkung erinnert werden; trotzdem dass jeder Punkt einer auf diese Art ermittelten Geraden im Sinne der Parameterbilanz eine Überbestimmung mit sich bringt, ist diese für die Orientierung, d. h. für die Beseitigung des System-Defektes, unbrauchbar, da sie keine neue geometrische Information enthält.

Der Inhalt dieser überschüssigen Information ist lediglich zur Aussage über Messpräzision und evtl. zur Verbesserung gewisser Geraden-Parameter einsetzbar.

Wegen Anforderungen an zusätzliche, teils Koordinatenkenntnis voraussetzende Information ist die Geraden-Bedingung nur selten anwendbar. Umso weniger, als dies nur bei bereits orientierten Strahlen und unter Berücksichtigung von neuen Unbekannten möglich ist.

### 5.2.2 Punkte eines Kreises

Ein Kreis wird im allgemeinen als eine Ellipse abgebildet. Deren Mittelpunkt ist jedoch mit dem projizierten Mittelpunkt des Kreises nicht identisch. Eine solche Ellipse kann bei der Rekonstruktion als Spur einer Kegelfläche betrachtet werden, dessen Spitze im Projektionszentrum liegt. Eine Schnittebene, bei der die Spur eines solchen

Kegels einen Kreis bildet, kann nur zwei ausgezeichnete Stellungen im Raum einnehmen. Durch weitere Information kann auch der Abstand dieser Ebenen vom Projektionszentrum ermittelt werden.

Von der Art und Anordnung dieser Information ist es abhängig, wie gross deren Beitrag zur Defekt-beseitigung ausfällt. Während z.B. die gegenseitige Lage der Kreis- und Bildebene per Problem-Definition gegeben ist, kann die Vorgabe des Radius in Kombination mit anderen Stützwerten auch Koordinaten-Information vermitteln, obwohl der Radius normalerweise nur Massstab-Angaben enthält.

Man kann zusammenfassend feststellen, dass die Eigenschaften des Kreises – wie übrigens auch anderer Raumkurven – geeignet sind, um zur Reduzierung des Objekt-, u.U. sogar des System-Defektes beizutragen, da ihre Abbildungen, im Gegensatz zur Geraden, perspektivisch beeinflusst werden.

Vom jeweiligen Problem hängt es schlussendlich ab, ob der Ertrag durch die Berücksichtigung solcher Bedingungen den dazu notwendigen Programmier- und Rechenaufwand rechtfertigt.

## 6. Beschaffung von Näherungswerten

Aufgaben, bei denen die zu bestimmenden Unbekannten untereinander oder in bezug auf beobachtete Grössen nicht-lineare Abhängigkeiten aufweisen, können praktisch nur iterativ gelöst werden. Es bedeutet unter anderem, dass man einigermassen gute Annäherungswerte zum Endergebnis benötigt, um dem Iterationsprozess eine zweckmässige Ausgangslage zu geben. Die Anzahl der benötigten Iterationen ist vor allem von der Güte dieser Näherungen abhängig. Schlecht angesetzte Näherungswerte können auf Grund mangelnder Stabilität eine Divergenz des Iterationsprozesses zur Folge haben, obwohl von der Problemformulierung her eine Lösung möglich ist. Schlussendlich führen direkte Lösungen – so z. B. beim eindeutigen klassischen räumlichen Rückwärtsschritt – zu reellen Nebenlösungen, deren Ausschaltung durch das Einführen von einigermassen guten Annäherungswerten in die Iterationslösung erreicht wird.

Um nicht nur dieser Situation zu begegnen, sondern vor allem den Rechenaufwand zu reduzieren, stellt sich also die Aufgabe, möglichst gute Näherungen für die unbekannt Parameter zu bestimmen. Der linearisierte und somit nur im Differentiellen gültige Lösungsalgorithmus sollte

danach mit wenigen Schritten eine vorgegebene Iterationsschranke erreichen.

Diesbezügliche, sich mit ähnlicher Problematik befassende Arbeiten z. B. von Van den Hout und Stefanovic [7], Killian und Meissl [11], Rinner [15], haben eines gemeinsam: man sucht nach linearen Beziehungen im zu lösenden Problem, sei es durch Umformen von ursprünglichen oder Einführen von neuen, zusätzlichen Unbekannten. Konsequenterweise in dieser Richtung gingen Schmid und Heggli [20] vor, wo die Näherungswerte für eine räumliche Koordinaten-Transformation mit erweiterten Parametern bestimmt wurden. Vorbedingung bei solchen Ansätzen ist eine gewisse Überbestimmung des (ursprünglichen) Systems, damit für die neuen Unbekannten genügend Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen. Man muss jedoch bedenken, dass die Umformung von Unbekannten evtl. eine neue, öfters nicht durchschaubare «Geometrie» mit sich bringt, wodurch u.U. schon ein im Rahmen der Präzision liegendes Rauschen der Messwerte zu recht ungenauen Näherungen führen kann.

Hinzu kommt, dass der Charakter des algebraischen Systems und die Anzahl der Unbekannten sich auf die Dimensionierung der Koeffizienten unterschiedlich auswirken und mitunter numerische Schwierigkeiten mit sich bringen können. Derartige Lösungen sollten also nur wenige, möglichst unveränderte, jedoch linear unabhängige Parameter aufweisen.

Trotz der Tatsache, dass bei der hier diskutierten Aufgabe im gerade erwähnten Sinne keine überschüssige Objekt-Information verfügbar ist, konnte wiederum mit Hilfe der Symmetrie-Bedingung ein solcher Ansatz gefunden werden.

Die Gleichung (2) kann für den linken und rechten symmetrischen Punkt gleichgesetzt werden, womit sich

$$(x' - x_0) Q' + c M' = (x'' - x_0) Q'' + c M''$$

ergibt. Mit Vereinfachungen für die Koordinatenbezeichnungen  $X' = X'' = X$ ,  $Y' = Y$ ,  $Y'' = -Y$  und  $Z' = Z'' = Z$  kann man schreiben

$$\begin{aligned} (x' - x_0) [r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)] \\ + c [r_{11}(X - X_0) + r_{12}(Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)] = \\ (x'' - x_0) [r_{31}(X - X_0) + r_{32}(-Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)] \\ + c [r_{11}(X - X_0) + r_{12}(-Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)] \end{aligned}$$

oder nach einer Umformung

$$r_{31}X_0 + r_{32}Y_0 + r_{33}Z_0 - r_{31}X - r_{33}Z =$$

$$\frac{2cr_{12}Y + r_{32}Y(x' + x'' - 2x_0)}{x' - x''}$$

Auf die gleiche Art kann aus der Gleichung für die y-Koordinate der Ausdruck

$$r_{31}X_0 + r_{32}Y_0 + r_{33}Z_0 - r_{31}X - r_{33}Z =$$

$$\frac{2cr_{22}Y + r_{32}Y(y' + y'' - 2y_0)}{y' - y''}$$

gebildet werden. Nach Gleichsetzen der rechteitigen Ausdrücke in den letzten zwei Gleichungen ergibt sich schliesslich die Bedingung:

$$\left(c\frac{r_{12}}{r_{32}} - x_0\right)(y' - y'') - \left(c\frac{r_{22}}{r_{32}} - y_0\right)(x' - x'') + x''y' - x'y'' = 0. \quad (10)$$

Man sieht, dass jeder symmetrische Doppelpunkt Anlass zu einer solchen Gleichung gibt, ohne dass irgendwelche Kenntnisse bezüglich der koordinatenmässigen Lage der Objektpunkte nötig wären. In den Parametern treten nur Bildgrössen sowie die Elemente der Drehmatrix auf. Durch Eliminierung von Objektkoordinaten sind zwar die Translationen entlang der X- und Z-Achse herausgefallen, nicht aber die Raumdrehungen. Ebenfalls invariabel wird bei vorgegebenem Massstab die Y-Translation, was umgekehrt bedeutet, dass die Vorgabe von je einem Koordinatenwert zur Beseitigung des gesamten Defektes ausreichend ist. Die Wirksamkeit der Symmetrie-Bedingung wird auf diese Weise am besten verdeutlicht.

Zur Bestimmung von Näherungen ist die obige Gleichung (10) in dieser Formulierung nur anwendbar, sofern die innere Orientierung vorgegeben ist. Beim Fehlen solcher Information ist jedoch in gewissen Fällen diese schätzbar bzw. kann sie aus mit verschiedenen Ausgangswerten durchgerechneten Näherungen ausgewählt werden. Die endgültige Bestimmung wird dann der vollständigen Formulierung der iterativen Auflösung überlassen.

Beim Betrachten der Klammerausdrücke kann man feststellen, dass diese der jeweiligen x- bzw. y-Koordinate der Y-Fluchtrichtung [Gleichung (8)] entsprechen. Diese Tatsache hat zum Vorteil, dass die Messungen der Orientierungspunkte unverändert, ohne den Umweg über die Fluchtpunkt-Bestimmung, übernommen werden können. Die Werte der Parameter  $P_1$  und  $P_2$  ergeben sich mit der Auflösung des linearen Gleichungssystems über die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & P_1 & P_2 \\ \begin{array}{c} y' - y'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{array}{c} -x' + x'' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \end{array}$$

und dem zugehörigen Vektor der Absolutglieder

$$\mathbf{w} = \begin{array}{c} x'y'' - x''y' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

als

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w}.$$

Diese vermitteln mit

$$R_1 = \frac{r_{12}}{r_{32}} = \frac{P_1 - x_0}{c}$$

$$R_2 = \frac{r_{22}}{r_{32}} = \frac{P_2 - y_0}{c}$$

einfache Verhältnisse der Drehmatrix-Elemente. Mit der Anwendung der Normierungseigenschaft (E 2, Seite 10) ist

$$r_{32} = \pm \frac{1}{(1 + R_1^2 + R_2^2)^{1/2}}$$

womit die zweite Spalte der Drehmatrix wertmässig bestimmbar ist. Die Wahl des entsprechenden Vorzeichens für die einzelnen Drehwinkel kann z. B. durch die Angabe des Y, Z-Quadranten erreicht werden. Dabei gilt:

Quadrant

I	$Y_0 > 0$	$Z_0 > 0$	$\rightarrow r_{32} > 0$
II	$Y_0 < 0$	$Z_0 > 0$	$\rightarrow r_{32} < 0$
III	$Y_0 > 0$	$Z_0 < 0$	$\rightarrow r_{32} < 0$
IV	$Y_0 < 0$	$Z_0 < 0$	$\rightarrow r_{32} > 0$

Der Vorgang kann gewissermassen «automatisiert» werden, indem man die y-Bildkoordinate des Y-Fluchtpunktes zur Hilfe nimmt, wobei

$$\omega \geq 0 \text{ wenn } y \geq 0 \rightarrow r_{32} \leq 0 \text{ ist.}$$

Dies gilt allerdings, wie auch bei der Bestimmung mit Quadranten, nur unter der Voraussetzung, dass sich die Drehwinkel im Intervall

$$-\frac{\pi}{2} < \omega, \varphi, \kappa < \frac{\pi}{2}$$

bewegen.

Eine andere Möglichkeit, wie man die Vorzeichen-Unsicherheit umgehen kann, bietet sich mit zusätzlicher Anwendung von horizontalen Fluchtrichtungen. Deren Gleichung

$$r_{13}(x - x_0) + r_{23}(y - y_0) - r_{33}c = 0$$

kann wiederum zu einem einfach aufzulösenden linearen Gleichungssystem zusammengestellt

werden. Es ergibt sich auf ähnliche Weise, mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P_1 & P_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ C \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} & \begin{array}{c} Y - Y_0 \\ C \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \end{array}$$

ein Lösungsvektor

$$\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{w}$$

wobei  $\mathbf{w}$  ein Einheitsvektor ist. Die Bedingungs-gleichung wurde vorgängig mit  $r_{33}$  dividiert, um bei der Auflösung des Systems eine nicht-triviale Lösung zu erhalten. Die so bestimmten Parameter können auf einheitliche Art umgenannt werden, wonach

$$R_3 = P_1 = \frac{r_{13}}{r_{33}} \quad \text{und} \quad R_4 = P_2 = \frac{r_{23}}{r_{33}}$$

Mit den Ergebnissen des ersten Systems, d. h.

$$R_1 = \frac{r_{12}}{r_{32}} \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{r_{22}}{r_{32}}$$

sowie der Eigenschaft (E 3) können nun folgende Gleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_{22} r_{33} - r_{23} r_{32} = (R_2 - R_4) r_{32} r_{33} \\ r_{21} &= -r_{12} r_{33} + r_{13} r_{32} = -(R_1 - R_3) r_{32} r_{33} \\ r_{31} &= r_{12} r_{23} - r_{13} r_{22} = (R_1 R_4 - R_3 R_2) r_{32} r_{33} \end{aligned}$$

Mit deren Kombination schliesslich können die Werte für

$$\kappa = \arctan \frac{-r_{21}}{r_{11}} = \arctan \frac{R_1 - R_3}{R_2 - R_4}$$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{r_{31}}{r_{11}} \cos \kappa \right) = \arctan \left( \frac{R_1 R_4 - R_3 R_2}{R_2 - R_4} \cos \kappa \right)$$

$$\omega = \arctan \frac{R_3 \cos \varphi + \sin \varphi \cos \kappa}{\sin \kappa}$$

berechnet werden.

Kann die zur X-Achse parallele Fluchtrichtung ebenfalls ermittelt werden, so vereinfacht sich die Bestimmung von Drehwinkeln durch die Tatsache, dass die Rotation um die Primärachse bei mitgedrehten Drehachsen auf die erste Spalte der verwendeten Drehmatrix keinen Einfluss hat (siehe Seite 9). Deshalb können aus den Gleichungen für die X-Fluchtrichtung (7) die Werte für

$$\kappa = \arctan \frac{-r_{21}}{r_{11}} = \arctan \left( \frac{Y - Y_0}{X - X_0} \right)$$

und

$$\varphi = \arctan \frac{r_{31} \cos \kappa}{r_{11}} = \arctan \left( \frac{-C \cos \kappa}{X - X_0} \right)$$

direkt entnommen werden.

Bei Betrachtung der verwendeten Ausdrücke ist ersichtlich, dass die Ergebnisse weder numerische noch Interpretations-Schwierigkeiten bereiten, solange die Einhaltung des früher genannten Intervalls gewährleistet ist.

Mit den genäherten Drehwinkeln sollen nun die noch fehlenden Koordinaten des Aufnahme-Ortes bestimmt werden. Da als Vergleichsgrösse meistens ein Abstand zwischen einem symmetrischen Punkte-Paar (z. B. die Flügelspannweite) vorgegeben wird, kann man solchen Punkten direkt Koordinatenwerte zuweisen. Mit der nochmaligen Anwendung der Symmetrie-Bedingung kann die Grundgleichung (3), für die linke und rechte Seite gleichgesetzt und durch die Beziehung  $Z' = Z''$  vereinfacht, umgeformt werden zu

$$(Y' - Y_0) \frac{W'}{V'} = (Y'' - Y_0) \frac{W''}{V''}$$

Aus dieser Gleichung ist mit der Gleichsetzung von  $Y' = -Y'' = Y$  der Wert für

$$Y_0 = Y \frac{W' V'' + W'' V'}{W' V'' - W'' V'} \quad (11)$$

erhältlich. Dieser in die ursprüngliche Gleichung (3) eingesetzt, ergibt für

$$Z_0 = Z' - (Y' - Y_0) \frac{W'}{V'}. \quad (12)$$

Mit diesen Ergebnissen kann der Durchschnittswert (eine Überbestimmung) für

$$X_0 = X - (Z - Z_0) \frac{u' W'' + u'' W'}{2 W' W''} \quad (13)$$

berechnet werden.

Diese Gleichungen dienen anschliessend auch zur Bestimmung von Näherungswerten für die einzelnen Koordinaten der unbekanntensymmetrischen Doppelpunkte.

Man kann also bei der vorliegenden Aufgabenstellung erreichen, dass Näherungswerte sowohl für die Orientierungsparameter wie auch für Punktkoordinaten mit verhältnismässig geringem rechnerischen Aufwand, ohne Schätzung, Vorkenntnisse bezüglich der Orientierungsgrössen oder anderer Zusatzinformation erhältlich sind.



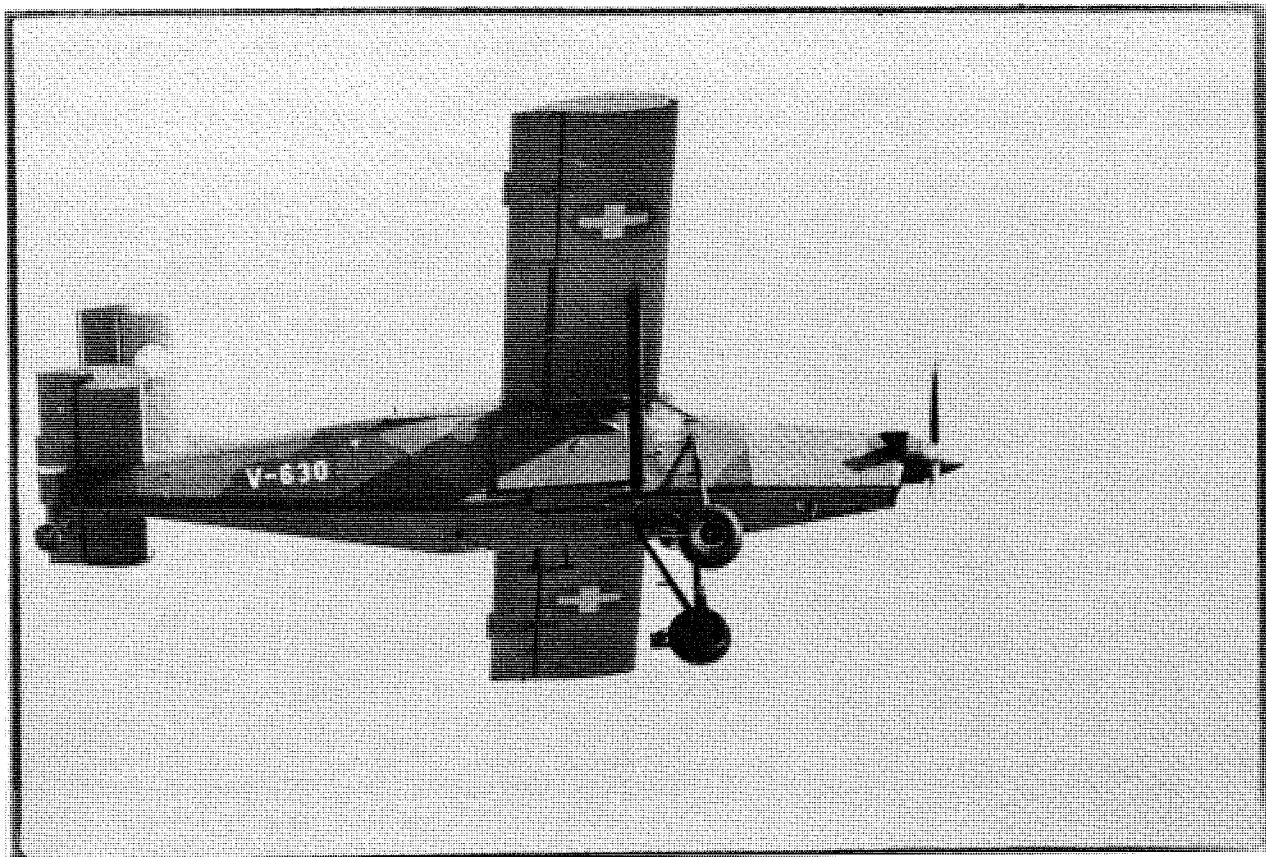


Abbildung 7

### 6.1 Ein Zahlenbeispiel

Ein eher etwas schlecht konditioniertes Beispiel (grosse Brennweite, d. h. schmales Strahlenbündel) soll hier diese Methode quantitativ illustrieren:

Aufnahme:

PC-6 Pilatus Turbo Porter

Aufgenommen vermutlich mit Tele-Zoom, auf Kleinbildformat

Ca. 8fache Vergrösserung als Messvorlage

Sechs symmetrische Doppelpunkte gemessen

X-Fluchtpunkt bestimmbar

Daraus ergeben sich, hier den ausgeglichenen Werten gegenübergestellt, folgende Näherungswerte:

Die Anzahl von benötigten Iterationen ist, ausser von der geometrischen Anordnung, auch von der Rechenschärfe und Iterationsschranke beeinflusst. Bei erwähntem Beispiel benötigte man mit einem Tischrechner mit 12 signifikanten Stellen (Hewlett-Packard 9830) vier Iterationen, bis alle Koordinatenänderungen kleiner als 1 cm blieben.

Tabelle 2

Wert (Meter/Grad)	genähert	ausgeglichen	Differenz
c	* - 2.00	- 2.03810	0.03810
$x_0$	0.00	- 0.00259	0.00259
$y_0$	0.00	- 0.00320	0.00320
$X_0$	4.59	4.54	0.05
$Y_0$	- 91.46	- 92.62	1.16
$Z_0$	- 42.06	- 42.16	0.10
$\omega$	- 71.06	- 71.22	0.16
$\varphi$	4.41	4.31	0.10
$\kappa$	3.52	3.60	-0.08
$X_1$	** 10.00	10.00	-
$Y_1$	**± 7.55	± 7.55	-
$Z_1$	** 3.00	3.00	-
$X_2$	4.58	4.62	-0.04
$Y_2$	± 2.55	± 2.62	-0.07
$Z_2$	** 2.70	2.70	-
$X_3$	9.21	9.22	-0.01
$Y_3$	± 0.56	± 0.56	0.00
$Z_3$	1.51	1.53	-0.02
$X_4$	10.01	10.00	0.01
$Y_4$	± 4.08	± 4.08	0.00
$Z_4$	2.93	2.93	0.00
$X_5$	11.59	11.57	0.02
$Y_5$	± 5.17	± 5.18	-0.01
$Z_5$	2.90	2.90	0.00
$X_6$	14.56	14.51	0.05
$Y_6$	± 0.27	± 0.27	0.00
$Z_6$	1.58	1.58	0.00

\* Brennweite auf 250 mm geschätzt, hier der Bildgrösse angepasst

\*\* vorgegeben

## 7. Das Normalgleichungssystem

Betrachtet man alle zum Problem gehörenden Parameter als zu verbessernde (Beobachtungen)  $\mathbf{L}$ , so kann das mathematische Modell als deren Funktion  $\mathbf{F}(\mathbf{L}) = \mathbf{O}$  dargestellt werden [19]. Der Vektor  $\mathbf{L}$  enthält ausser den gewichteten (Beobachtungen)  $l$  auch die zu bestimmenden Parameter  $\mathbf{X}$ , denen zunächst das Gewicht  $\mathbf{P}_x = \mathbf{O}$  zugeordnet ist. Die Varianz-Kovarianz-Matrix  $\sigma$  wird entsprechend gebildet. Bei Funktionen, die ihrem Charakter nach nicht linear sind, wird gewöhnlich eine Linearisierung mit der Taylorreihe vorgenommen, wobei im allgemeinen nur die Glieder erster Ordnung berücksichtigt werden. Dadurch ist die Gültigkeit von so abgeänderten Funktionen auf das Differentielle beschränkt und erfordert deshalb eine iterative Auflösung.

Nach dem eingangs erwähnten Prinzip ist die Summe der gewichteten quadratischen Verbesserungen zum Minimum zu machen. Der Lösungsvektor  $\Delta$  ist als Produkt der invertierten Normalgleichungsmatrix und dem zugehörigen Widerstandsvektor  $\mathbf{w}^*$  als

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{w}^*$$

erhältlich. Der Lösungsvektor wird danach zum Vektor der Näherungswerte  $\mathbf{X}^0$  addiert, womit das Iterationsergebnis

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0 + \Delta$$

erhalten wird.

Wiederum mit Hinweis auf einschlägige Literatur stellen wir uns hier mit dieser allgemeinen Schilderung des Problems zufrieden. Lediglich spezifische Eigenschaften der hier behandelten Lösung, beziehentlich die durch diese sich nötig machenden Massnahmen sollen im folgenden näher betrachtet werden.

### 7.1 Die Koeffizienten-Matrix

In Anlehnung an [19] werden die Ableitungen der Beobachtungsfunktion nach den direkten Beobachtungen in einer mit  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{l}}$  bezeichneten Matrix zusammengefasst. Den Beobachtungen wird eine Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_l$  zugeordnet, die der bekannten oder angenommenen Streuung der Messwerte  $\sigma_l$  entspricht, wobei  $\sigma_l^{-1} = \mathbf{P}_l$  ist. Bei Annahme von unkorrelierten Beobachtungen ist die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_l$  eine Diagonalmatrix. Sind zudem die direkt beobachteten Grössen explizit darstellbar, so ist  $\mathbf{A}$  eine Einheitsmatrix, wodurch  $\mathbf{A} \mathbf{P}_l^{-1} \mathbf{A}^T = \sigma_l$  wird, d. h. ein Reduktionsschritt kann vermieden werden.

Die ersten Ableitungen der Beobachtungsfunktion nach den Unbekannten bilden die Koeffizienten der Teilmatrix

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}$$

Da die hier gewählte  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\kappa$ -Drehanordnung in der Literatur nicht immer behandelt wird, wie auch als Beleg für den angewendeten Formalismus, sind in der Tabelle 3 (nächste Seite) diese Koeffizienten angegeben. Dabei sind die Ableitungen der Abbildungsgleichungen (2) bezeichnet mit

$$b_{xu} = \frac{\partial F_x}{\partial X_u} \quad \text{und} \quad b_{yu} = \frac{\partial F_y}{\partial X_u}$$

Die manchmal angegebene Form für

$$b_{x,y4-6} = \frac{\text{Zähler mit Tab. 3 identisch}}{-c \frac{Z - Z_0}{v}}$$

ist im Normalfall der Luftphotogrammetrie etwa gleichwertig. Bei unkonventioneller Aufnahmeanordnung ist es jedoch denkbar, dass  $Z - Z_0 = 0$  wird, was bei den oben angegebenen Ausdrücken zu numerisch undefinierten Koeffizienten führt. Diese Schwierigkeit kann durch die Anwendung des strengen Formalismus vermieden werden. Andererseits sieht man, dass für die in diesem Fall auftretenden Koordinaten des Objektraumes (Q) [vgl. Gl. (2)], auch gute Näherungswerte benötigt werden. Gegebenenfalls könnte für jede Iteration die Aufstellung einer neuen Koeffizientenmatrix nötig werden.

### 7.2 Berücksichtigung von Bedingungen

In das vorher beschriebene Normalgleichungssystem können Bedingungen zwischen den Variablen des Gleichungssystems auf folgende Arten eingeführt werden:

a Das bestehende Normalgleichungs-System, dem die Beobachtungsfunktionen zu Grunde liegen, wird mit den Bedingungsgleichungen gerändert. Somit erhält man die Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_l & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & -\sigma_c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \\ -\mathbf{k}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_l^* \\ \mathbf{w}_c \end{bmatrix}$$

u	X	$b_{xu}$	$b_{yu}$
1	c	$-\frac{M}{Q}$	$-\frac{N}{Q}$
2	$x_0$	1	0
3	$y_0$	0	1
4	$X_0$	$\frac{x r_{31} + c r_{11}}{Q}$	$\frac{y r_{31} + c r_{21}}{Q}$
5	$Y_0$	$\frac{x r_{32} + c r_{12}}{Q}$	$\frac{y r_{32} + c r_{22}}{Q}$
6	$Z_0$	$\frac{x r_{33} + c r_{13}}{Q}$	$\frac{y r_{33} + c r_{23}}{Q}$
7	$\omega$	$y r_{31} + (c + \frac{x^2}{c}) r_{21} - \frac{x}{c} y r_{11}$	$-x r_{31} + \frac{x}{c} y r_{21} - (c + \frac{y^2}{c}) r_{11}$
8	$\varphi$	$(c + \frac{x^2}{c}) \cos \kappa - \frac{x}{c} y \sin \kappa$	$-(c + \frac{y^2}{c}) \sin \kappa + \frac{x}{c} y \cos \kappa$
9	$\kappa$	y	-x
10	X	$-b_{x4}$	$-b_{y4}$
11	Y	$-b_{x5}$	$-b_{y5}$
12	Z	$-b_{x6}$	$-b_{y6}$

mit  $x = \bar{x} - x_0$  und  $y = \bar{y} - y_0$ , wobei  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die Messwerte darstellen.

wobei  $\sigma_c$  die den Bedingungen, d.h. den  $\mathbf{w}_c$ -Werten zugeordnete Varianz-Kovarianz-Matrix,  $\mathbf{k}_c$  ein Korrelaten-Vektor und  $\mathbf{w}_c$  der Absolutglied-Vektor sind. Die Koeffizienten der **C**-Matrix sind entweder von Haus aus linear oder mit der Taylorreihe linearisierte Anteile der Bedingungsgleichungen in bezug auf die Unbekannten.

b Die Bedingungen werden wie Messgrößen (fiktive Beobachtungen) behandelt und als solche formell schon in der **B**-Matrix berücksichtigt. Die Koeffizienten sind mit der Version 'a' identisch, da sie ebenfalls als Ableitungen der Bedingungsgleichungen nach den Unbekannten erhalten werden.

## 7.2.1 Koeffizienten der Bedingungsgleichungen

### 7.2.1.1 Die Fluchpunktbedingung

Geht man davon aus, dass die Bildkoordinaten einer (achsenparallelen) Fluchtrichtung bestimm-

bar sind, so kann der entsprechende Fluchpunkt wie ein Teilpasspunkt behandelt werden (siehe 5.1.1).

Das Einführen einer Fluchtrichtungs-Bedingung ist erst angebracht, wenn entweder die Bildkoordinaten des Fluchpunktes nicht bestimmbar sind – wie etwa bei nur einer einzelnen, in entsprechender Richtung verlaufenden Punktverbindung – oder wenn die Koordinaten des Fluchpunktes im Objektraum nicht (ausreichend) angegeben werden können. Im ersten Fall kann man sich die Aufgabe erleichtern, indem die entsprechenden Koordinaten mit einer allgemeinen Bedingungsgleichung gleichgesetzt werden, wie z. B. für eine Z-parallele Punktverbindung (Nadirrichtung) mit  $X_1 = X_2$  und  $Y_1 = Y_2$ .

Als typisches Beispiel für den zweiten Fall kann die horizontale Fluchtrichtung betrachtet werden. Da diese bei derartigen Problemen ziemlich oft vorkommt, sollen deren Koeffizienten hier angegeben werden:



$$\mathbf{B}_i = \begin{matrix} & \frac{\delta F}{\delta O} & \frac{\delta F}{\delta X} & \frac{\delta F}{\delta Y} & \frac{\delta F}{\delta Z} \\ \begin{matrix} b_{x'1-9} & b_{x'10} & b_{x'11} & b_{x'12} \\ b_{y'1-9} & b_{y'10} & b_{y'11} & b_{y'12} \\ b_{x'1-9} & b_{x'10} & -b_{x'11} & b_{x'12} \\ b_{y'1-9} & b_{y'10} & -b_{y'11} & b_{y'12} \end{matrix} & & & & i,
 \end{matrix}$$

mit unveränderten Gewichtsmatrix der direkten Beobachtungen  $\mathbf{P}_i$ .

Im Rechenprogramm, das diese Untersuchungen quantitativ belegte, wurde diese Variante integriert.

Die Annahme einer «unendlich streng» geltenden Symmetrie ist bei der hier behandelten Problematik durchaus vertretbar, wenn man bedenkt, dass die zahlreichen Abweichungen vom mathematischen Modell den Einfluss einer eventuellen Unvollkommenheit der Symmetrie überwiegen dürften.

### 7.3 Die Gewichte

Wie eingangs erwähnt, wird bei mathematischem Modell davon ausgegangen, dass alle zum Problem gehörenden Parameter «beobachtet» wurden. Da Beobachtungen im allgemeinen mit unterschiedlicher Qualität ausgeführt werden, sind sie dieser Qualität entsprechend auch zu gewichten. Dies geschieht durch die Einführung differenzierter Gewichte für die einzelnen Modellparameter, wobei einem zu bestimmenden, also unbekanntem (de facto nicht direkt beobachteten) Parameter ein Gewicht  $p_L = 0$  zugewiesen wird. Gemäss dem stochastischen Modell sind dann nur solche Parameter nach jeder Iteration zu verbessern.

Die Bedingungen zwischen den Parametern müssen ebenfalls unterschiedlich gewichtet werden, wenn man deren Wirkung differenzieren möchte.

Alle Gewichte haben sich auf einen gemeinsamen Normierungsfaktor zu beziehen, der hier als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit a priori  $s_0$  bezeichnet wird. Die einzelnen Gewichte sind dann mit Hilfe von angenommenen mittleren Fehlern der Parameter  $s_{Li}$  als

$$p_{Li} = \frac{s_0^2}{s_{Li}^2}$$

erhältlich.

Bei den photogrammetrischen Messungen wird oft vereinfachend angenommen, dass alle Bildkoordinaten unkorreliert und mit gleicher Ge-

nauigkeit beobachtet wurden. Setzt man  $s_0$  dieser Genauigkeit gleich, so ist die Gewichtsmatrix der direkten Beobachtungen  $\mathbf{P}_i$  eine diagonal besetzte Einheitsmatrix. Da die Inverse einer solchen Matrix ebenfalls eine Einheitsmatrix ist, kann die entsprechende Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen  $\sigma_i$  direkt angegeben werden.

Eine Gewichtung von zu bestimmenden Parametern bewirkt eine entsprechend beschränkte Variabilität der vorgegebenen Grössen, d. h. also deren «Festhalten». Dies geschieht, indem die normierten Varianz-Kovarianz-Werte an den entsprechenden Stellen des Normalgleichungssystems aufaddiert werden. Auf diese Art werden auch die erforderlichen Input-Werte zur Beseitigung des System- oder Objekt-Defektes eingeführt. Da sich auch diese Gewichte auf den gemeinsamen, den Bildgrössen angepassten Gewichtseinheitsfehler  $s_0$  beziehen, darf man sich bei den praktischen Berechnungen nicht daran stossen, dass realistische Gewichtskoeffizienten z. B. für die Objektpunkt-Koordinaten durch auf den ersten Blick als klein erscheinende Werte (etwa  $10^{-6}$ ) dargestellt werden. Dass solche Grössen trotzdem wirksam werden, erklärt sich aus deren Vergleich mit den dazugehörigen, ebenfalls kleinen Werten der b-Koeffizienten, die bei der Bildung der Normalgleichungs-Anteile noch quadriert werden.

Funktionale Zusammenhänge zwischen solchen Parametern, die untereinander durch keine direkte Beobachtung in Verbindung stehen, werden als Bedingungsgleichungen formuliert. Deren Gewichte  $p_C$  müssen dann in Form von Funktionsgewichten berücksichtigt werden. Diese lassen sich mit Hilfe der den betreffenden Stützwerten zugeordneten Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_X$  gemäss klassischer Fehlerfortpflanzung berechnen (ausführlich in [21]), als

$$\sigma_C = \mathbf{C} \mathbf{P}_X^{-1} \mathbf{C}^T$$

Da die zusätzlichen Bedingungen bei vorliegender Problematik vorwiegend zur Beseitigung des Objekt-Defektes Verwendung finden, d. h. nur unbekannte Parameter funktional miteinander verknüpfen, kann man deren Funktionsgewichte auch direkt angeben.

### 7.4 Aufbau und Auflösung des Normalgleichungssystems

Die Grösse des Normalgleichungssystems ist durch die Anzahl der zu bestimmenden Parameter gegeben. Aus praktischen Gründen ergibt sich oft die Notwendigkeit, die Dimension des Gleichungssystems zu reduzieren. Bekanntlich kann

eine gruppenweise ausgeführte Reduktion der zu berechnenden Parameter nur für Gruppen von untereinander unkorrelierten Unbekannten erfolgen.

Als einfaches Beispiel einer solchen Gruppe können die X, Y, Z-Koordinaten eines einzelnen Objektpunktes betrachtet werden.

Der Normalgleichungs-Anteil  $\mathbf{N}_i$  der direkten Beobachtungen einer solchen Gruppe 'i' wird gebildet als

$$\mathbf{N}_i = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B}]_i \quad (15)$$

Entsprechend ist der Widerspruchsvektor  $\mathbf{w}^*$  zu formen:

$$\mathbf{w}_i^* = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{w}]_i \quad (16)$$

wobei  $\mathbf{w}$  ein «Absolutgliedsvektor» ist, der die Differenz der Beobachtungen gegenüber den mit aktuellen Näherungswerten berechneten Werten der Beobachtungsfunktion enthält.

Sind die Parameter einer Gruppe (ausser den direkten Beobachtungen) noch zusätzlich funktional verknüpft, so müssen diese (Zusatz-)Bedingungen in den Reduktionsschritt mit einbezogen werden. Der Anteil an der Normalgleichungsmatrix ergibt sich dann gemäss Lösungsweg 'a' als

$$\mathbf{N}_i = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^T \sigma_C^{-1} \mathbf{C}]_i$$

mit zugehörigem Widerspruchsvektor

$$\mathbf{w}_i^* = [\mathbf{B}^T (\mathbf{A} \mathbf{P}_i^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{w} + \mathbf{C}^T \sigma_C^{-1} \mathbf{w}_C]_i$$

Für die eigentliche Reduktion können nun die Gruppenanteile  $\mathbf{N}_i$  und  $\mathbf{w}_i^*$  noch weiter unterteilt werden, nämlich auf die Anteile der – allen Gruppen gemeinsamen – Orientierungselemente  $\mathbf{N}_O$  und diejenigen der Objektpunkt-Koordinaten  $\mathbf{N}_X$ . Der jeweilige Lösungsvektor  $\Delta$  und Widerspruchsvektor  $\mathbf{w}^*$  wird ebenfalls entsprechend unterteilt. Mit der Bezeichnung  $\mathbf{N}_{OX}$  für die Korrelationsmatrix ist

$\mathbf{N}_O$	$\mathbf{N}_{OX}^T$	·	=	$\Delta_O$	=	$\mathbf{w}_O^*$
$\mathbf{N}_{OX}$	$\mathbf{N}_X$			$\Delta_X$		$\mathbf{w}_X^*$

Wie bereits erwähnt, wird die zur Stützung des Gesamtsystems notwendige Information eingeführt, indem eine die Punktkoordinaten-Werte betreffende Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_X$  zum entsprechenden Punktanteil  $\mathbf{N}_X$  addiert wird.

Der auf die gemeinsamen Orientierungsparameter reduzierte ('R') Normalgleichungs-Anteil ist somit erhältlich als

$$\mathbf{N}_{Ri} = \mathbf{N}_O - \mathbf{N}_{OX}^T (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} \mathbf{N}_{OX}$$

beziehentlich

$$\mathbf{w}_{Ri}^* = \mathbf{w}_O^* - \mathbf{N}_{OX}^T (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} \mathbf{w}_X^*$$

Solche Gruppenanteile können unabhängig von der Punkte- bzw. Gruppen-Anzahl zu einem gemeinsamen System aufsummiert werden. Bei diesem Schritt kann auch die evtl. vorliegende Inverse der Varianz-Kovarianz-Matrix der Orientierungselemente  $\mathbf{P}_O$  zur Stützung oder Beseitigung des System-Defektes berücksichtigt werden. Die zu invertierende Normalgleichungsmatrix ist somit

$$\mathbf{N}_R^* = \mathbf{P}_O + \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{Ri}$$

Mit der Summe der reduzierten Widerspruchsvektoren

$$\mathbf{w}_R^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{w}_{Ri}^*$$

ergibt sich schliesslich der Lösungsvektor für das auf die Orientierungselemente reduzierte System

$$\Delta_O = \mathbf{N}_R^{*-1} \mathbf{w}_R^*$$

Ein Lösungsvektor für die vorher eliminierten Punkt- oder Gruppen-Parameter  $\Delta_X$  ist wieder punkt- oder gruppenweise erhältlich als

$$\Delta_{Xi} = (\mathbf{N}_{Xi} + \mathbf{P}_{Xi})^{-1} (\mathbf{w}_{Xi}^* - \mathbf{N}_{OXi} \Delta_O) \quad (18)$$

wobei  $(\mathbf{N}_{Xi} + \mathbf{P}_{Xi})^{-1}$  hier die statistisch korrekte Matrix  $\mathbf{Q}_{Xi}$  ersetzt (vgl. (19)).

Um die so erhaltenen Ergebnisse werden nun die Näherungswerte von ungewichteten Parametern verbessert und, wenn nötig, für die nächste Iteration als Ausgangswerte verwendet.

## 7.5 Abbruchkriterium

Wegen der Nicht-Linearität des Gleichungssystems muss der gerade beschriebene Vorgang wiederholt werden, bis keine nennenswerte Parameter-Änderungen mehr auftreten, d. h. bis die Elemente des Lösungsvektors (nahezu) Null werden.

Bei geometrisch labilen Konfigurationen kann es manchmal vorkommen, dass ein oder mehrere Parameter noch in verhältnismässig grossen Schritten oszillieren, während die tatsächlich interessierenden Ergebnisse sich nicht mehr wesentlich ändern. Für solche Fälle ist es vorteilhafter, eine Iterationsschranke zu verwenden, deren Entscheidungsgrundlage nicht auf der Änderung von einzelnen Parametern beruht.

Eine Möglichkeit hierzu ist, die Konvergenz der Zielfunktion  $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \text{Minimum}$  zu verfolgen. Demnach ist der Iterationsprozess als beendet zu betrachten, wenn die Änderung der Summe der gewichteten quadratischen Verbesserungen einen bestimmten Anteil ihres eigenen Wertes nicht mehr überschreitet.

## 8. Genauigkeitsschätzung

### 8.1 Genauigkeit der Ergebnisse a posteriori

Die Qualität der ermittelten Ergebnisse, wie sie sich von der geometrischen Seite des Problems her ergeben, wird durch die invertierte Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$  bestimmt. Bei einem reduzierten Normalgleichungssystem können aus der Inversen lediglich Aussagen über die gemeinsamen System-Parameter abgeleitet werden. In unserem Fall also über die Orientierungsunbekannten, d.h.  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{N}_R^{-1}$ . Das entsprechende Ergebnis für die Koordinaten der Objektpunkte ist wiederum gruppenweise durch Rückwärts-Einsetzen erhältlich aus

$$\mathbf{Q}_{xi} = [(\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{N}_{OX} \mathbf{Q}_0 \mathbf{N}_{OX}^T (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1})]^{-1} \quad (19)$$

wobei  $\mathbf{E}$  eine Einheitsmatrix ist.

Trotz der Tatsache, dass in vielen praktischen Fällen nicht ausreichend viele überschüssige Beobachtungen im Gauss'schen Sinne vorliegen, pflegt man die Genauigkeit der Resultate mit Hilfe eines mittleren Gewichtseinheits-Fehlers à posteriori  $m_0$  zum Ausdruck zu bringen. Dieser wird berechnet als

$$m_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - u},$$

wobei  $n - u$  die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen angibt. Es ist ersichtlich, dass die wertmässige Grösse von  $m_0$  von den noch verbleibenden Rest-Verbesserungen abhängig ist, d.h. eine gemeinsame Aussage sowohl über die Erfüllung der Voraussetzungen des mathemati-

schen Modells, als auch über die eigentliche Messpräzision ergibt.

Unter Voraussetzung, dass die mittleren Gewichtseinheits-Fehler vor und nach der Ausgleichung, d.h.  $s_0$  und  $m_0$  im Sinne eines Zuverlässigkeitstests ausreichend übereinstimmen, können die Schätzungen von mittleren Fehlern der einzelnen Parameter mit

$$m_{xi} = \pm m_0 \sqrt{q_{xi}}$$

angegeben werden. Mit  $q_{xi}$  wird dabei das entsprechende Diagonalglied der invertierten Normalgleichungsmatrix  $\mathbf{Q}$  bezeichnet.

Ausser an den so erhaltenen Qualitätsangaben für die einzelnen Parameter ist man oft auch an deren gegenseitiger Abhängigkeit interessiert. Zu diesem Zweck sind die – vorher ebenfalls mitreduzierten – Korrelations-Anteile zu rekonstruieren. Mit der entsprechenden Bezeichnung der Inversen der gemäss Gleichungssystem (17) unterteilten Normalgleichungsmatrix gilt:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_{0X}^T \\ \mathbf{N}_{0X} & \mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_{0X}^T \\ \mathbf{Q}_{0X} & \mathbf{Q}_X \end{vmatrix} \quad (20)$$

Gemäss der Definition einer Inversen ist:

$$\mathbf{N}_0 \mathbf{Q}_0 + \mathbf{N}_{0X}^T \mathbf{Q}_{0X} = \mathbf{E} \quad (21)$$

$$\mathbf{N}_0 \mathbf{Q}_{0X}^T + \mathbf{N}_{0X}^T \mathbf{Q}_X = \mathbf{O} \quad (22)$$

$$\mathbf{N}_{0X} \mathbf{Q}_0 + (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X) \mathbf{Q}_{0X} = \mathbf{O} \quad (23)$$

$$\mathbf{N}_{0X} \mathbf{Q}_{0X}^T + (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X) \mathbf{Q}_X = \mathbf{E} \quad (24)$$

wobei  $\mathbf{E}$  eine Einheits-Matrix,  $\mathbf{O}$  eine Null-Matrix ist.

Der Anteil  $\mathbf{Q}_0$  ist von der Auflösung des reduzierten Systems bereits vorhanden. Somit ist mit der Gleichung (23) die gesuchte Korrelationsmatrix

$$\mathbf{Q}_{0X} = -(\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} \mathbf{N}_{0X} \mathbf{Q}_0 \quad (25)$$

erhältlich. Eine Transposition dieser Gleichung ergibt

$$\mathbf{Q}_{0X}^T = -\mathbf{Q}_0 \mathbf{N}_{0X}^T (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} \quad (26)$$

Mit Hilfe dieser Formeln kann nun die Gleichung für  $\mathbf{Q}_X$ , die eingangs ohne Ableitung angegeben wurde (Gl. (19)), begründet werden. Aus der Gleichung (24) ergibt sich

$$\mathbf{Q}_X = (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{N}_{0X} \mathbf{Q}_{0X}^T),$$

oder nach Einsetzen von (26) die erwähnte Inverse der Objektpunkt-Koordinaten

$$\mathbf{Q}_X = (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1} (\mathbf{E} + \mathbf{N}_{OX} \mathbf{Q}_O \mathbf{N}_{OX}^T (\mathbf{N}_X + \mathbf{P}_X)^{-1}).$$

Es ist ersichtlich, dass der gerade beschriebene Reduktionsvorgang nicht nur bei der hier behandelten speziellen Problematik anwendbar ist, sondern immer dann, wenn eine grössere Anzahl von Unbekannten lediglich über einige wenige Systemparameter miteinander verknüpft sind, wie z. B. bei der allgemeinen Aufgabe einer Koordinatentransformation.

Der grössere Rechenaufwand lässt sich bei den immer kürzeren Zyklus-Zeiten von heutigen Prozessoren besonders deshalb rechtfertigen, weil dadurch erhebliche Ersparnisse an Speicherplatzbelegung möglich werden.

## 8.2 Quantitativer Nachweis

Der Anwender unserer Messergebnisse ist nicht nur an den Ergebnissen selbst interessiert, sondern – und zwar in unserem Fall im erhöhten Masse – auch an deren Aussagekraft. Es ist also die Frage zu beantworten, mit welcher Genauigkeit sich bei der Einzelbild-Methode jeweils die Orientierungselemente und vor allem die Punktkoordinaten bestimmen lassen.

Betrachten wir die erreichbare Genauigkeit wiederum anhand eines Beispiels; und zwar demselben, das bereits zur Bestimmung von Näherungswerten (siehe 6.1) verwendet wurde. Dabei soll die Bestimmbarkeit mit sechs symmetrischen Doppelpunkten untersucht werden, wovon alle Koordinaten des Punkte-Paares 1 sowie der X-Fluchtpunkt zur Festlegung des Koordinaten-Rahmens vorgegeben sind.

Die Messungen stammen aus einer ca. 8fachen Papiervergrößerung und wurden mit einem Bendix-Digitizer ausgeführt. Damit man von der Annahme einer geometrisch idealen Abbildung ausgehen kann, werden die Messfehler um die vermutliche Unvollkommenheit der Bildvorlage vergrössert. Deren Schätzung wurde deshalb (schlechter als in der Praxis erreichbar) mit  $s_0 \pm 0,2$  mm angesetzt. Da die vorliegende Punktzahl nicht ausreichend hohe Überbestimmung ergibt, wird für Vergleichszwecke der mittlere Gewichtseinheits-Fehler a priori verwendet. Diese Massnahme ist auch deshalb zweckmässig, damit man Versionen mit unterschiedlichen Freiheitsgraden unmittelbar miteinander vergleichen kann.

Wie erwähnt, wurde im verwendeten Rechenprogramm der Lösungsweg 'b' realisiert, wobei die Symmetrie-Bedingung mit unendlichem Gewicht berücksichtigt wird (Koeff.-Matrix gem. S. 26).

Dies hat zur Folge, dass die Anzahl der Unbekannten auf  $9 + 3i$  reduziert werden kann, d.h. in unserem Fall ist  $u = 27$ . Aus demselben Grund erhält man für die linke und rechte Seite dann auch jeweils nur eine X, Y oder Z-Koordinatenunbekannte, was auch bedeutet, dass, folgerichtig zur unendlich streng angenommenen Symmetrie, auch deren Genauigkeiten identisch sind. Diese Massnahme hat jedoch auf die eigentliche Parameterbilanz keinen Einfluss; sie hat für dieses Beispiel die Form:

i	Anzahl Punkte	Bestimmungsstücke (b)			Rang des Informationsmangels
		Bestimm. Gleich.	Beding. Gleich.	gegeben. Koord.	
	$u = 9 + 4i$	$3i +$	$3i/2 +$	$n$	$u - b$
12	57	36	18	3	$56 - 58 = -2$

Die Anzahl der eingeführten Stützwerte (3) ist hier ausreichend, da diese für einen symmetrischen Doppelpunkt eingeführt werden, womit jeder Input-Wert durch die Symmetrie-Bedingung (mitsamt seiner Gewichtung) auf die andere Seite übertragen und dadurch die Anzahl der Stützwerte verdoppelt wird.

Die eingeführten Stützwerte wurden mit wirklichkeitsnahen Werten gewichtet ( $s_{X,Y,Z} = \pm 1$  cm), um unter anderem die Neupunkte durch eine evtl. höhere Korrelation nicht unrealistisch zu beeinflussen.

In der Tabelle 4 (nächste Seite) sind die Ergebnisse der Genauigkeitsschätzung von vier verschiedenen Rechendurchgängen zusammengestellt. Der Einfluss der inneren Orientierung auf die Genauigkeit der Objektpunkte wurde untersucht. Folgende Versionen wurden gerechnet:

Version	c	$x_0$	$y_0$	Überbestimmung $b - u$
1	frei	frei	frei	$58 - 56 = 2$
2	frei	frei	fest	$58 - 55 = 3$
3	frei	fest	fest	$58 - 54 = 4$
4	fest	fest	fest	$58 - 53 = 5$

wobei die «festen» Elemente mit einem mittleren Fehler von  $s = \pm 0,001$  mm eingeführt wurden.

In der ersten Version wurde eine gleichzeitige Mitbestimmung aller Orientierungselemente realisiert. Dabei hat sich die früher erwähnte Situation ergeben, wo die schwache Bestimmbarkeit eines Elementes (hier  $y_0$ ) Anlass zu weiteren Orientierungsänderungen gibt, während die Objektkoordinaten sich nicht mehr wesentlich ändern.

Bei den nächsten Versionen wurden schrittweise die Elemente der inneren Orientierung festgehalten. Solche Gewichtung hat bei der gewählten Lösungsart auf die Orientierungsergebnisse selbst natürlich keinen Einfluss. Hingegen wird die Spur



der inversen Normalgleichungsmatrix durch die variable Stützung verändert, was sich auf die Bestimmung der Genauigkeit von mitbestimmten Unbekannten auswirkt. (Selbstverständlich würde in der Praxis das Vorgehen umgekehrt verlaufen; ausgehend von bekannt angenommener innerer Orientierung, wird durch die schrittweise Gewichtsreduzierung von Orientierungselementen nach einer optimalen Lösung gesucht. Der hier begangene Weg wurde gewählt, um die nominalen Werte der Orientierung, d. h. die geometrische Anordnung zwischen den Versionen, nicht mehr zu verändern.)

Element	geschätzte Genauigkeit [Meter/Grad]			
	Version 1	Version 2	Version 3	Version 4
c c	0.000001	0.268188	0.872038	0.881044
xP x <sub>o</sub>	0.000001	0.000001	0.252316	0.275093
yP y <sub>o</sub>	0.000001	0.000001	0.000001	0.483142
XO X <sub>o</sub>	0.349	2.953	7.585	7.938
YO Y <sub>o</sub>	0.461	1.873	15.281	15.896
ZO Z <sub>o</sub>	0.648	7.738	13.473	17.040
ω	0.2515	4.8511	11.0509	15.0481
φ	0.2305	1.7541	4.5396	7.4645
κ	0.5120	5.1782	12.1980	12.8469
X1	0.010	0.010	0.010	0.010
Y1	0.010	0.010	0.010	0.010
Z1	0.010	0.010	0.010	0.010
X2	0.036	0.759	1.750	1.910
Y2	0.018	0.018	0.031	0.032
Z2	0.053	0.547	1.268	1.370
X3	0.017	0.018	0.024	0.024
Y3	0.017	0.017	0.017	0.017
Z3	0.025	0.344	0.786	0.851
X4	0.014	0.015	0.021	0.022
Y4	0.019	0.019	0.019	0.019
Z4	0.015	0.026	0.035	0.037
X5	0.018	0.240	0.568	0.614
Y5	0.021	0.021	0.024	0.025
Z5	0.020	0.117	0.289	0.312
X6	0.042	0.772	1.845	1.993
Y6	0.016	0.016	0.016	0.016
Z6	0.034	0.141	0.348	0.378

## 9. Detailauswertung

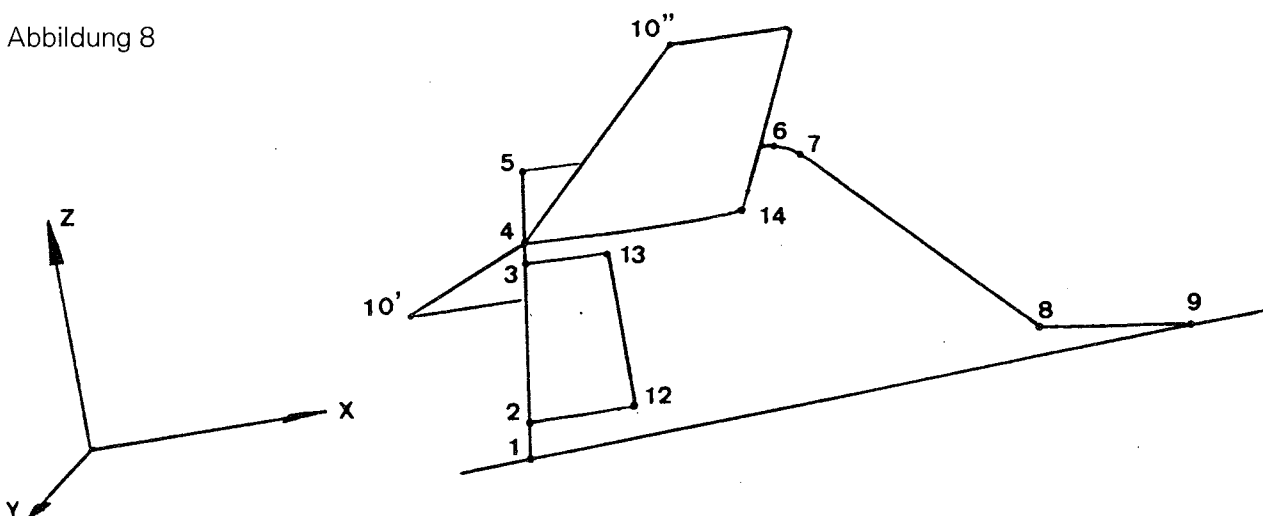
Bei der in der Regel geringen Anzahl von symmetrischen Doppelpunkten oder sonstigen Punkt-kombinationen kann man hier sicher annehmen, dass alle eine überschüssige Information enthaltenden Punkte für die vorher beschriebene Bestimmung der Orientierung verwendet wurden. Es gilt nun aber auch (die Mehrzahl von) solche(r) Information zu verwerten, die den Parameter-Haushalt in keiner Weise verändert, d. h. Punkte oder Punktgruppen zu bestimmen, die selbsttragend sind.

Der Messvorgang selbst bleibt an sich unverändert. Zu jedem gemessenen Punkt muss aber die entsprechende Zusatzangabe zugeordnet werden, am besten unmittelbar vor oder nach der Messung. Mit Hilfe des orientierten Abbildungsstrahles lassen sich dann die (restlichen) Punkt-kordinaten berechnen. Diese Resultate können beim nächsten Messpunkt sofort als Stützinformation verwertet werden. Unter Umständen lässt sich damit, in gewisser Art «interaktiv», die erstere Input-Angabe überprüfen, gegebenenfalls verbessern.

Am meisten und am einfachsten lässt sich die einen Einzelpunkt betreffende Kenntnis einsetzen, indem eine der Punktkoordinaten vorgegeben wird. Als anschaulichstes Beispiel (Abb. 8) könnte man die Silhouette des Seitenruders nennen, wo definitionsgemäss  $Y=0$  eingesetzt werden kann (Punkte 1–9). Wurde entlang einer solchen Linie ein anderes Element angetroffen, das die X, Z-Ebene kreuzt, so können die gemeinsamen, vom ersten Schritt her bekannten Koordinaten diesem Element zugeordnet werden (Z-Koordinate des Punktes 4).

Das Punkte-Paar 10 wurde bereits bei der Orientierung mitbestimmt. Aus diesen Werten kann

Abbildung 8



man schon sehen, ob die Höhenruder-Ebene nach oben (V-Form) oder lediglich die Abflusskante keilförmig nach hinten abgewinkelt ist. In beiden Fällen kann dem Punkt 14 die Höhe des Punktes 4 zugeordnet werden. Normalerweise ist die Auflösung solcher Systeme so gut, dass die daraus resultierende  $Y_{14}$ -Koordinate die Dicke des Seitenruders an dieser Stelle angibt. Auf ähnliche Weise können auch die Punkte 12 und 13 bestimmt werden, wodurch sich die Plausibilität der Dicke-Angaben gegenseitig überprüfen lässt.

Die Punkte 4, 10 und 14 definieren die mittlere Ebene des Höhenruders, womit dessen gesamter Umriss kartiert werden kann.

Aus diesem schematischen Beispiel ist es ersichtlich, dass ein allgemein gültiges Auswerte-Vorgehen sich kaum angeben lässt. Der Auswerter muss mit einer ausgeprägten Kombinationsgabe die erarbeitete Information übertragen und weiterverwenden können. Dabei wird nicht nur die äusserliche Formgebung verwertet, sondern auch andere Merkmale, vor allem die Beschaffenheit oder Eigenschaften der Oberfläche, aus deren man zusätzliche Angaben ableiten kann. Stichwortartig seien hier einige Elemente erwähnt, aus denen sich derartige Zusatzinformation gewinnen lässt, wie etwa:

- konstruktive Merkmale, wie Verwendung von Regelflächen, Rechtecken, Kegelschnitt-Kurven...
- technologische Merkmale, z. B. regelmässige Niet-Abstände,
- Beschriftung, Bemalung, Hoheitszeichen,
- Schattenwurf (Parallelprojektion), usw.

Mit zusätzlichen Kenntnissen aus den Gebieten der Aerodynamik und des Flugzeugbaus kann manchmal eine erstaunlich hohe Detail-Dichte erarbeitet werden.

Ohne dass der Autor über solche Kenntnisse verfügt hätte, sollen im Folgenden zwei Versuchsbeispiele gezeigt werden, um anhand dieser solche Auswerte-Technik zu demonstrieren.

### 9.1 PC 6 Pilatus Turbo Porter

Das bereits bekannte Beispiel (Abb. 7) soll nun zum dritten Mal hier Verwendung finden. Ursprünglich wurde dieses Bild wegen seiner durchschnittlichen Bildqualität und seines charakteristischen Blickwinkels ausgewählt. Man konnte ausserdem annehmen, dass sich die Ergebnisse bei einem Schweizer Fabrikat leichter überprüfen lassen.

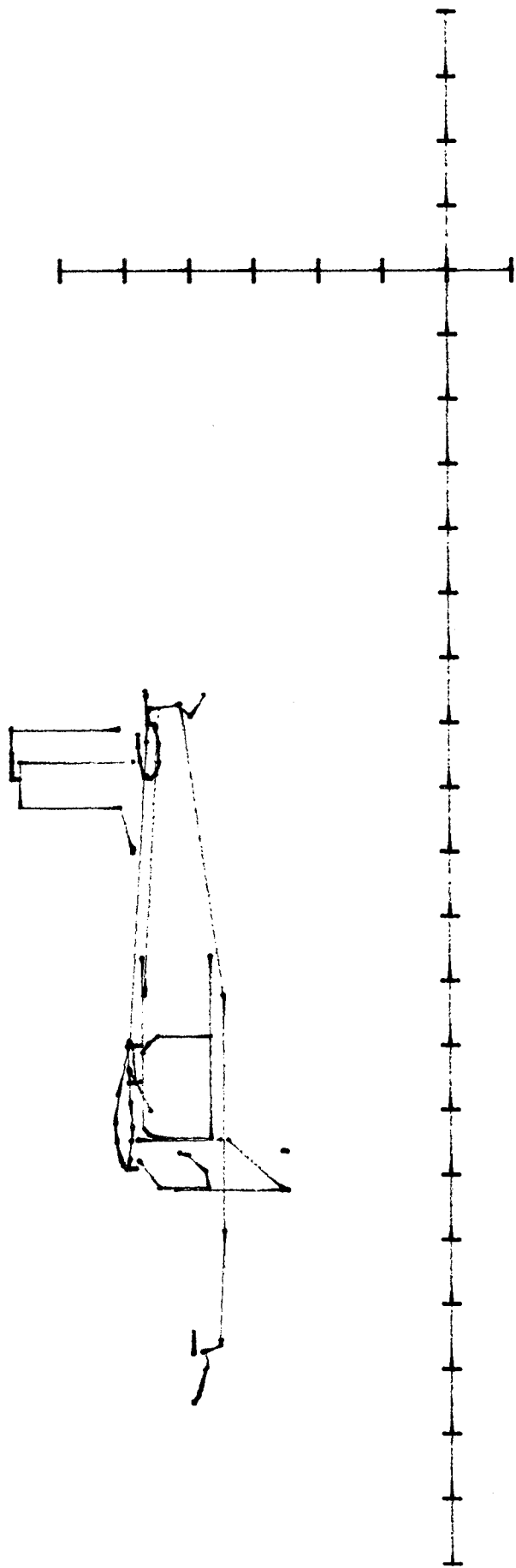
Die Messungen für die Detailauswertung wurden mit identischem Bildmaterial und Digitizer ausgeführt wie für die Orientierung, in unmittelbar danach folgendem Arbeitsvorgang. Die gemessenen Maschinenkoordinaten wurden jeweils mit folgenden Angaben ergänzt:

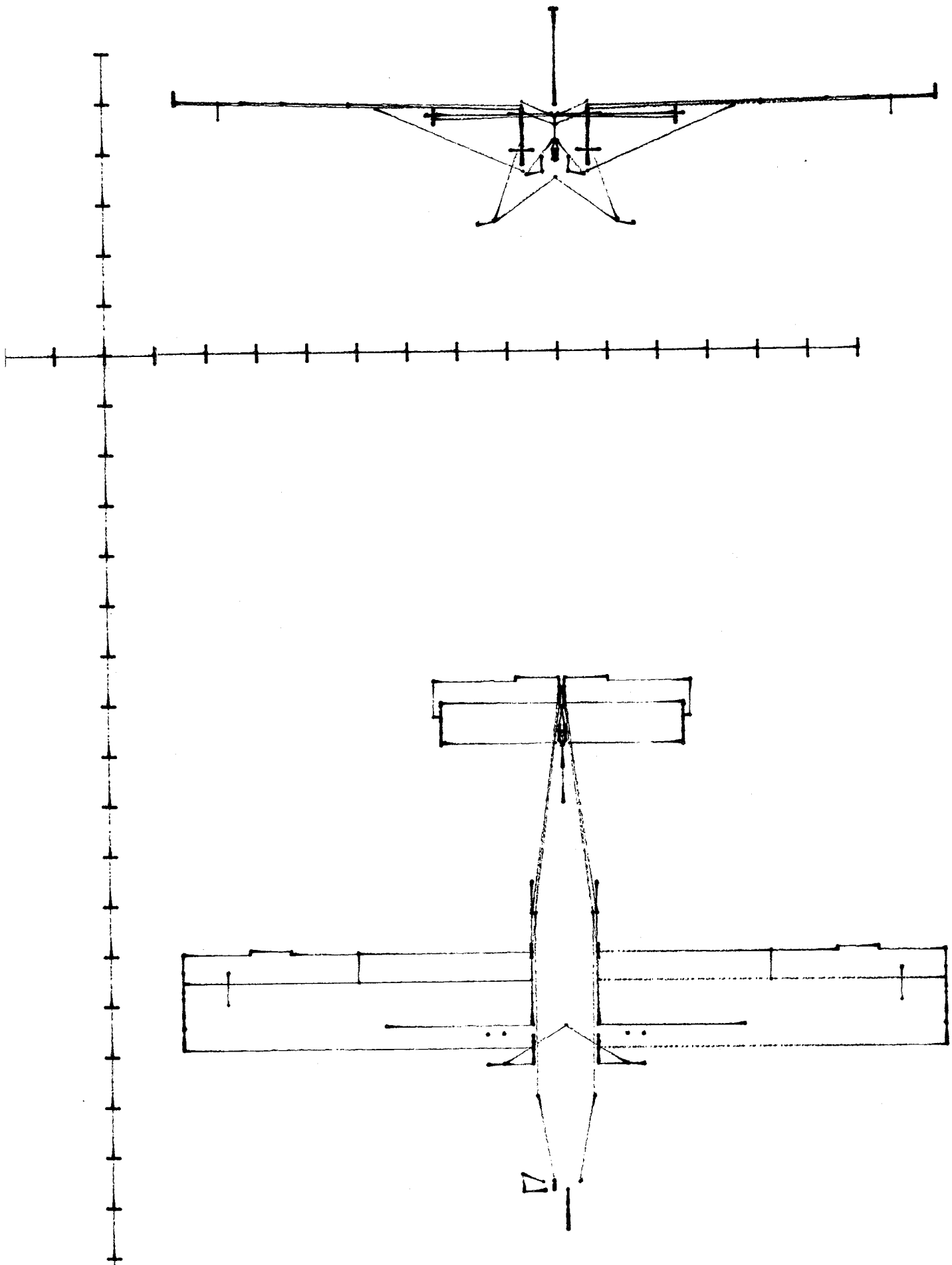
1. Art der Objektdefekt-Beseitigung und die entsprechenden Stützwerte
2. Darstellungsart:
  - keine graphische Darstellung, die Resultate nur als Zwischenergebnisse verwendet
  - Darstellung als Einzelpunkt
  - gradlinige Verbindung mit dem vorher gemessenen Punkt
3. Darstellung in allen oder nur einigen der drei Projektionsebenen (alle Kombinationen möglich).

Alle diese Angaben wurden laufend auf abgespeichert, um bei einer geänderten Orientierung (z. B. Massstabs-Anpassung) auf dieselben Messungen zugreifen zu können.

Unmittelbar nach der Berechnung des neuen Punktes wurde dieser an einem on-line angeschlossenen Plotter – gemäss der gewählten Darstellungsart – aufgetragen. Die berechneten Punktkoordinaten konnte man einer laufend ergänzten Koordinaten-Liste entnehmen. Bei schlechter Messung oder Stützung konnte ein Punkt auch gelöscht oder wiederholt werden.

Das Ergebnis, d. h. die Bestimmung der Form bei vorgegebenem Massstab, in drei Projektionsebenen dargestellt, befindet sich auf den nächsten Seiten.





Es ist zu erwähnen, dass dieser Zeichnung nichts «von Hand» zugefügt wurde, mit anderen Worten, dass alle dargestellten Linien Verbindungen von einzeln bestimmten Punkten sind. Diese Tatsache erklärt auch die nicht gerade hochwertige Qualität der Vorlage.

Ein Vergleich mit der Werkzeichnung (Beilage 1) im Anhang ist aufschlussreich genug, um hier auf einen ausführlichen Kommentar verzichten zu können. Der einzige nennenswerte Unterschied – die Länge des Fahrgestells – lässt sich mit unbelastetem (Auswertung) und belastetem (Werkzeichnung) Zustand der Vorlagen erklären.

## 9.2 NORTHROP F5E TIGER

Bei folgendem Anwendungsbeispiel, das ebenfalls zu Testzwecken bestimmt war, standen mehrere Aufnahmen zur Verfügung. Auf den folgenden Seiten sind die Kopien der auszumessenden Bilder angefügt. Alle drei wurden offensichtlich mit derselben Kleinbildkamera (Negativformat 24x36 mm) aufgenommen. Bei dem zur Verfügung stehenden Bildmaterial handelte es sich um etwa 8fache Vergrößerungen der Originalnegative auf verzugsarmem, plastifiziertem

Photopapier. Über Kamera- bzw. Objektivtyp war nichts bekannt.

Die Bilder sind qualitativ ziemlich gut. Leider geht wegen des nicht gerade feinkörnigen Filmmaterials (Verarbeitung?) einige, manchmal wertvolle Information über die Oberflächenstruktur verloren. Schätzungsweise hätte aus entsprechend besserem Bildmaterial – womit hauptsächlich höheres Auflösungsvermögen des Gesamtsystems gemeint ist – etwa 20% mehr an Detailinformation gewonnen werden können.

Gestützt auf die Ergebnisse der Auswertung kann behauptet werden, dass die Aufnahmekammer über Wechselobjektive verfügen muss. Während nämlich die Bilder 9 und 10 höchstwahrscheinlich mit einem «Normalobjektiv» erstellt wurden, kam beim Bild 11 vermutlich ein Tele-Zoom zur Anwendung.

Die Bildnummern entsprechen der Auswerte-Reihenfolge. Ausschlaggebend bei deren Festlegung war die Anzahl von sichtbaren symmetrischen Doppelpunkten. Zur Massstabsbestimmung wurde der Abstand zwischen den inneren, hinteren Spitzen der Sidewinders-Leitflächen mit 8,14 m als bekannt angenommen. Die X, Y-Ebene wurde in der Orientierung und (nachträglich) in der Höhe

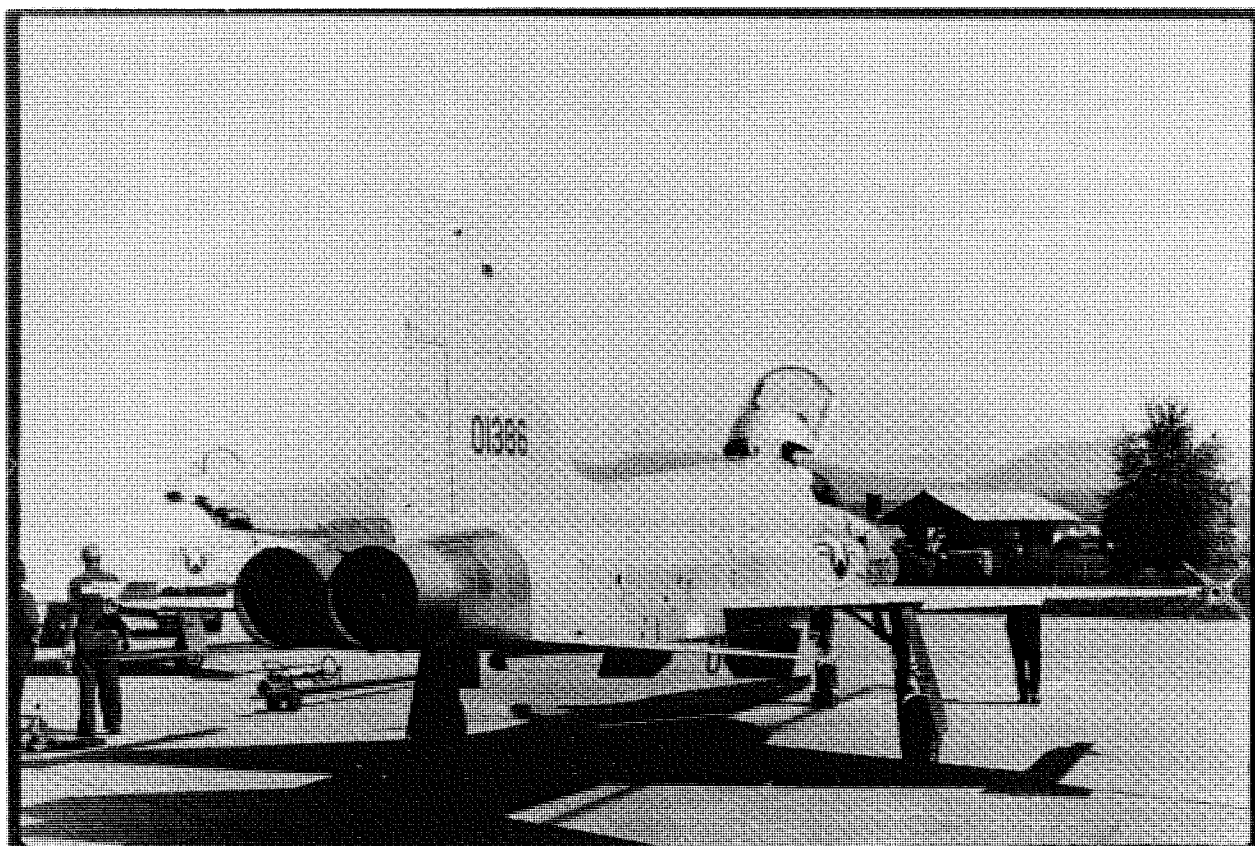


Abbildung 6



Abbildung 10

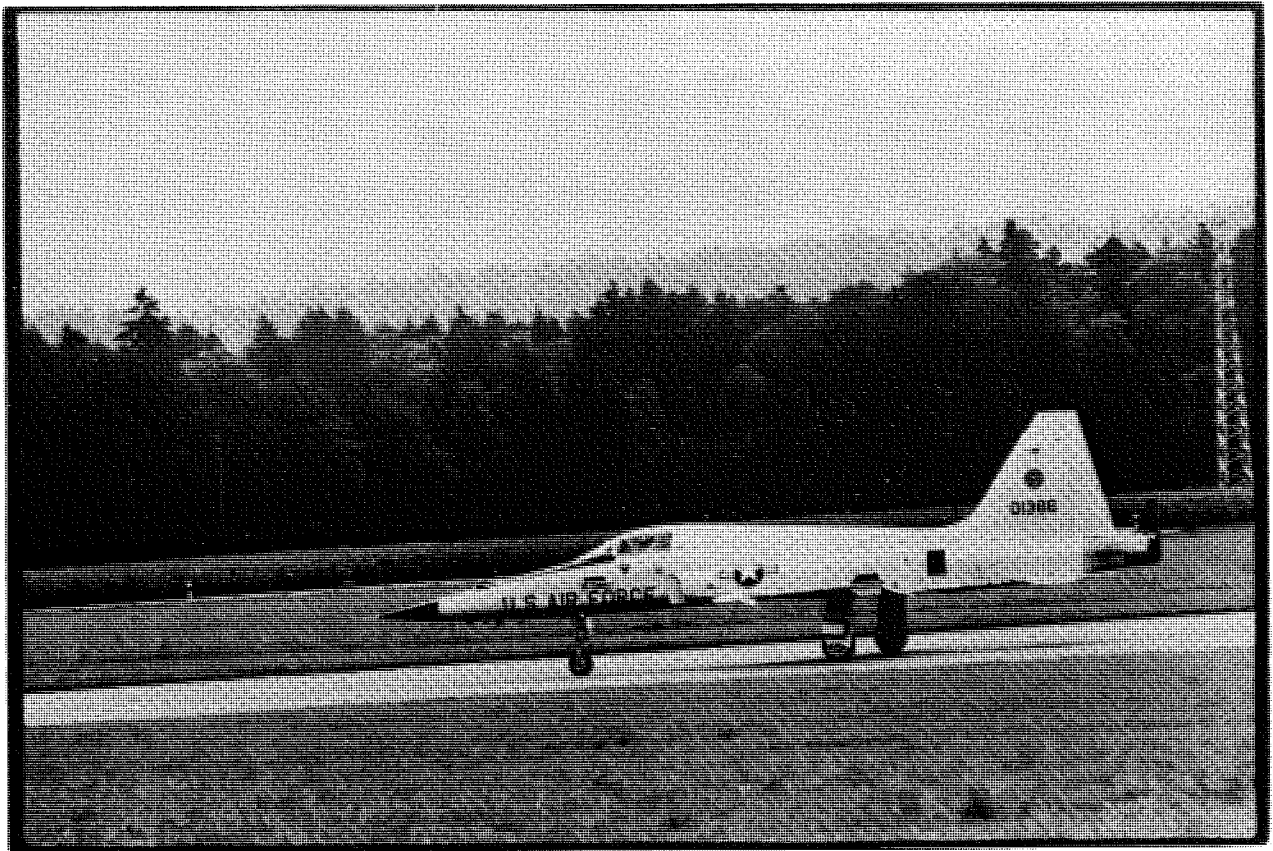


Abbildung 11

so festgelegt, dass sie mit der Oberfläche des Rollfeldes auf den Bildern 9 und 10 identisch ist. Somit konnten auch die parallelen Elemente der Umgebung, wie Trennfugen des Rollfeldes, Hangar usw., als Punkte der Fluchtgeraden mit berücksichtigt werden.

Es ist ersichtlich, dass die Bilder 10 und 11 mangels genügender Anzahl von Symmetrie-Punkten als Einzelbilder kaum ohne erhebliche Schwierigkeiten, oder vielleicht nur in reduzierter Masse, hätten orientiert werden können.

Eine ausreichende Anzahl von definierbaren und messbaren Doppelpunkten war nur beim Bild 9 gegeben. Einige von diesen sind auch in den anderen Bildern sichtbar, jedoch überwiegend nur als Einzelpunkt. Bei solchen Punkten wurden die koordinatenmässigen Ergebnisse aus der Orientierung des vorherigen Bildes eingesetzt. Bei entsprechender Gewichtung konnten sie wie Passpunkte des klassischen Rückwärtseinschnittes behandelt werden. Somit wurden sowohl die im einzelnen mangelhafte Stützinformation ergänzt, als auch alle drei Strahlenbündel über mehrere Punkte miteinander verknüpft. Der Vorgang wurde anschliessend noch wiederholt, um auch rückwärts, d. h. von Bild 11 zu 9, eine Verbindung herzustellen und ausserdem eine Kontrolle zu haben.

Die Messungen erfolgten mit einem Contraves Digitizer MG DAKIB-1152 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie ETHZ. Die Bilder waren während der ganzen Auswertzeit am Digitizer-Tisch befestigt. Dadurch war es möglich, die Messungen jederzeit zu wiederholen, kontrollieren, ergänzen oder zu unterbrechen, weil die Parameter des Messsystems unverändert blieben (Kantung, relative Lage der Bilder zueinander) bzw. im Rahmen der gerätebedingten Messpräzision reproduzierbar waren (Koordinaten der Bildhauptpunkte). Diese Tatsache erleichterte bzw. beschleunigte die Auswertung insofern, als dass zu den Ergänzungen oder zur Übertragung von Informationen von einem Bild zum anderen die entsprechenden Orientierungselemente konstant gehalten wurden. Somit entfiel die Berechnung neuer Orientierungselemente, d. h. die einmal bestimmte Orientierung war durch zusätzliche Messungen nicht mehr geändert worden, wenn dies auch, bei genügendem Informationsinhalt, sinnvoll gewesen wäre.

Die Ergebnisse der Auswertung sind auf den nächsten Seiten wiedergegeben. Es wurden etwa

500 Punkte oder Doppelpunkte gemessen. Wie auch im ersten Beispiel werden nur diejenigen Messungen aufgezeichnet, die zur Darstellung des gesamten Endergebnisses verwendet wurden. Es handelt sich wieder um eine reine Plot-Zeichnung, der nichts von Hand hinzugefügt wurde. Die Verbindungen zwischen den Punkten sind polygonal, ohne Interpolation. Eine Kurvenähnlichkeit ergibt sich nur durch höhere Dichte der Messpunkte.

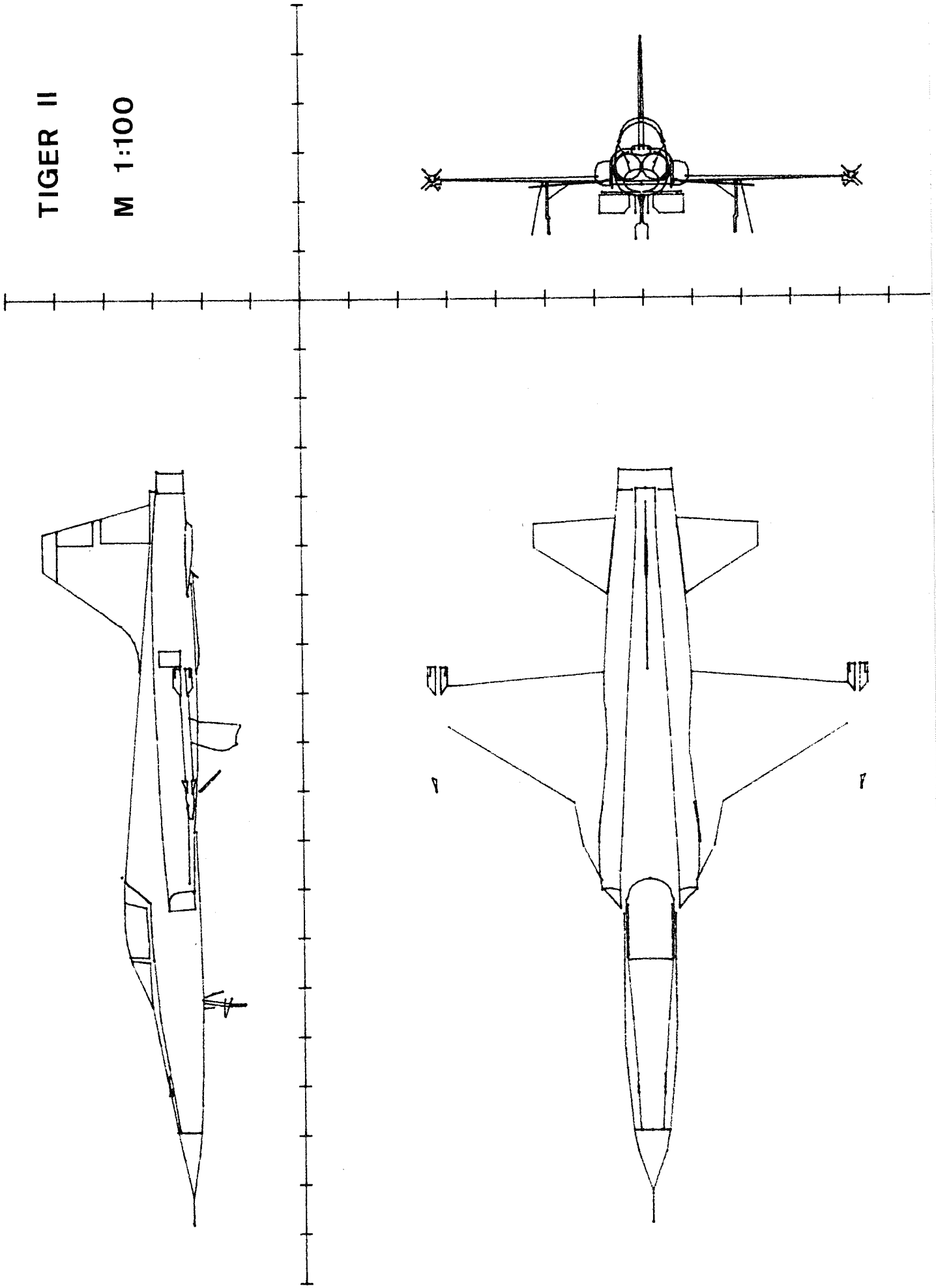
Es wäre zu aufwendig, alle Gedankengänge und Lösungswege bei den einzelnen Punktgruppen schriftlich festzuhalten. Deshalb nur zwei Beispiele, die das Besondere bei solchen Aufgabenstellungen etwas besser veranschaulichen:

- Zur Bestimmung der Dicke des vorderen Rumpfteiles wurde angenommen, dass die «US AIR FORCE»-Aufschrift an beiden Seiten des Rumpfes mit der gleichen Schablone aufgetragen wurde. In Bild 11 hat man mit zunächst nur genähert angenommener Rumpfdicke (Y-Wert) die Abstände zwischen den Buchstaben bestimmt. Diese wurden bei Bild 10 von einem anders bestimmten Punkt aus als X-Differenzen eingesetzt. Aus dem günstigen Blickwinkel resultierten die nun verbesserten Y-Werte.
- Die Bestimmung des Flügel-Grundrisses wäre bei diesen Bildern aus direkten Messungen nicht möglich; man sieht höchstens eine der Tragflächen-Kanten. Da die Grundrissebene mit dem Boden parallel war (sie wurde so gewählt), konnte der geworfene Schatten verhältnismässig gut verwertet werden. Die Sonne liefert bekanntlich eine strenge Parallelprojektion, und auch die Zuweisung des benötigten «Drittwertes» war mit  $Z_i = 0$  denkbar einfach. Es genügte danach, den so bestimmten Tragflächen-Grundriss durch parallele Translation an einige messbare Punkte (Kantenansätze) anzuschliessen. Ohne diese beiden Zufälle – Flugzeug am Boden und Sonnenstrahlung – wäre dieser Teil der Aufgabe ungelöst geblieben.

Eine qualitative Beurteilung der Resultate, obgleich sie sehr wünschenswert wäre, war leider nicht möglich; die geeigneten Unterlagen standen nicht zur Verfügung. Eine aus der statistischen Aussage des mathematischen Modells ableitbare Genauigkeitsangabe – durchschnittlicher mittlerer Fehler der Objektkoordinaten von  $\pm 3$  cm – scheint jedoch realistisch.

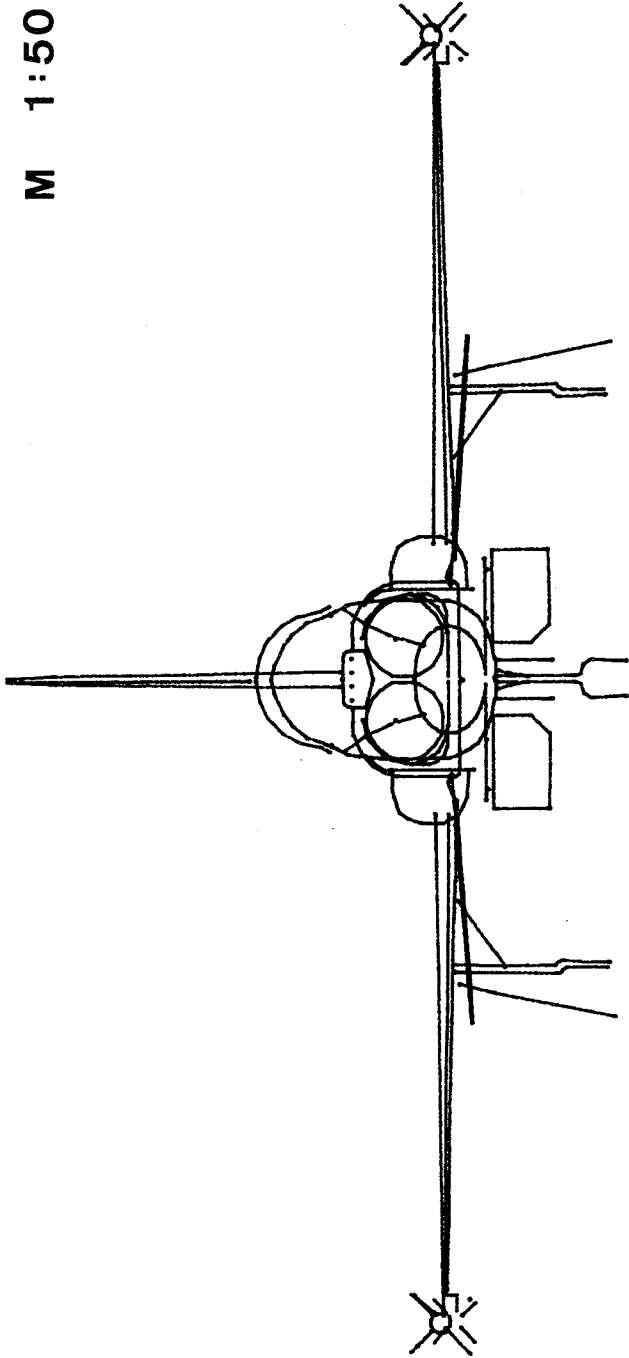
TIGER II

M 1:100





M 1:50





## Zusammenfassung

Die Bestimmung der dreidimensionalen Form künstlich hergestellter Objekte mit Hilfe der photogrammetrischen Einzelbildauswertung ist möglich. Die Voraussetzung dazu ist, die vorhandenen Objekteigenschaften, vor allem geometrische oder technologische Merkmale, zu erkennen und mathematisch zu formulieren. Ausserdem kann man aus der projektiven Verzerrung eines zentralperspektivischen Bildes ebenfalls zusätzliche Orientierungs- und Objektinformation ableiten, wenn die Berücksichtigung von charakteristischen Gegebenheiten einer Zentralprojektion – wie z.B. Fluchtpunkte – in den Lösungsansatz einbezogen wird. Dabei ist der Auswahl derartiger Stützinformation besondere Bedeutung beizumessen, denn nur solche Eigenschaften sind verwertbar, die zur aktuell vorliegenden Bestimmungsaufgabe eine zusätzliche und unabhängige Information mit geometrischem Inhalt vermitteln.

Aus der gegenseitigen Abhängigkeit der Objektform und der Abbildungsparameter bzw. des gewählten Bezugsrahmens ergibt sich, dass die gesamte Mess- und Stützinformation gemeinsam zu behandeln ist. Eine praxisgerechte Auflösung der sich daraus ergebenden grösseren Gleichungssysteme bedingt effiziente, stochastisch korrekte Reduktionsalgorithmen. Für die nicht-lineare, iterativ aufzulösenden Gleichungssysteme sind gute Näherungswerte erforderlich, um eine

Konvergenz der Auflösung günstig zu beeinflussen.

In der vorliegenden Arbeit werden die hierzu notwendigen theoretischen Grundlagen diskutiert. Von der allgemeinen Betrachtung der Bündelbehandlung ausgehend, werden die Lösungsmöglichkeiten erwogen und mit Beispielen des verallgemeinerten räumlichen Rückwärtseinschnittes illustriert. Das bei einer Einzelbildauswertung anstehende Punktdefizit wird durch die Einführung von zusätzlichen Bedingungen, wie z.B. objektbezogene Punktsymmetrie, Zugehörigkeit eines Punktes zu einem geometrischen Element usw., behoben. Für die Beschaffung von Näherungswerten wurde ein neuer linearer Ansatz gefunden, mit dem die Ausgangswerte der Orientierungs- und Objektunbekannten ohne Schätzung oder Vorkenntnisse bestimmt werden können.

Dem Aufbau, der Reduktion und der Auflösung von Gleichungssystemen mit zusätzlichen Bedingungen wurde, mit Rücksicht auf die allgemeine Anwendbarkeit, ein eigenes Kapitel gewidmet. Abschliessend wird anhand zweier Auswertebispiele die qualitative und quantitative Leistungsfähigkeit derartiger Einzelbildauswertungen vorgeführt. Diese sind beim Erfüllen gewisser Voraussetzungen durchaus geeignet, auch aus Einzelbildern einen relativ hohen räumlichen Informationsinhalt zu vermitteln.

---

## Abstract

The determination of the three-dimensional form of artificially produced objects is possible by the restitution of single photographs. The basic requirement is to recognize and to formulate mathematically certain object properties, especially the geometrical or technological characteristics. Additional orientation and object information can be obtained from the projective characteristics of a central perspective photograph, provided that certain factors of a central projection – e.g. vanishing points – have been included in the solution. The correct selection of the input information is important as only such attributes are usable, which give additional and independent information with geometric contents to the solution proper.

It can be seen from the interdependence of object form and projection parameters resp. the chosen initial coordinate-system, that all measurements and object-information have to be treated together. A practice-orientated way for the solution of large equation system requires an efficient, stochastically correct reduction algorithm. Moreover,

linearised, only iterative solvable equation systems require good approximation values in order to influence the convergence of the solution favourably.

In the presented dissertation the necessary theoretical basic principles are discussed. Starting from the general concept of a bundle treatment, the solution possibilities are discussed and illustrated with examples of the generalised resection in space.

The generally existing point defect at the restitution of a single photograph is eliminated by the introduction of additional constrains, such as object orientated point symmetry, affiliation of a point to a geometric element, etc.

Considering the general usefulness, an own chapter has been devoted to the formation, the optimization and the solution of equation systems with additional conditions.

Finally the capacity in the sense of quality and quantity of the restitution of single photographs is illustrated by two examples. It is shown, that even a single photograph yields – if certain criteria are fulfilled – relatively high amount of spatial information.



## 11. Literaturhinweise

- [1] Abdel-Aziz, Y. I. and Karara, H. M.:  
Photogrammetric Potentials of Non-Metric Cameras  
Civil Engineering Studies, Photogrammetry Series No. 36, University of Illinois, 1974
- [2] Bopp, H. und Krauss, K.:  
Strenge oder herkömmliche bedingte Ausgleichung mit Unbekannten bei nichtlinearen Bedingungs-gleichungen?  
Allgemeine Vermessungsnachrichten, Nr. 1, 1978
- [3] Bopp, H. und Krauss, K.:  
Ein Orientierungs- und Kalibrierungsverfahren für nichttopographische Anwendungen der Photogrammetrie  
Allgemeine Vermessungsnachrichten, Nr. 2, 1978
- [4] Caspary, W.:  
Zur Lösung singulärer Ausgleichungsmodelle durch Bedingungs-gleichungen  
Allgemeine Vermessungsnachrichten, Nr. 2, 1978
- [5] Graf, U.:  
Über das Photo eines Photos  
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 21, Nr. 3, Juni 1941
- [6] Grün, A.:  
Photogrammetrische Rekonstruktion von Rotationsflächen aus Einzelbildern  
DGK/C, Dissertation Nr. 212, München 1975
- [7] Hout, C. M. A. van den, und Stefanovic, P.:  
Efficient Analytical Relative Orientation  
Presented Paper, Commission II,  
ISP Congress Helsinki, 1976
- [8] Jordan-Eggert-Kneissl:  
Handbuch der Vermessungskunde, Band IIIa – Photogrammetrie  
J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung Stuttgart 1972
- [9] Kager, H. und Krauss, K.:  
Gemeinsame Ausgleichung photogrammetrischer, geodätischer und fiktiver Beobachtungen  
Presented Paper, Commission V  
ISP Congress Helsinki, 1976
- [10] Kager, H.:  
Das interaktive Programmsystem ORIENT im Einsatz  
Presented Paper, Commission V  
ISP Congress Hamburg, 1980
- [11] Killian, K. und Meissl, P.:  
Zur Lösung geometrisch überbestimmter Probleme  
Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Jg. 64, Nr. 3/4, 1977
- [12] Kruppa, F.:  
Analytische und konstruktive Differentialgeometrie  
Springer-Verlag, Wien 1957
- [13] Linkwitz, K.:  
Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichungsrechnung  
Zeitschrift für Vermessungswesen, Nr. 5 + 6, 1960
- [14] Rady, J.:  
Photogrammetrische Auswertung von unbekanntem Flugobjekten  
Interne Untersuchungs-Berichte 1977, 1979, 1980  
Unveröffentlicht
- [15] Rinner, K.:  
Studien über eine allgemeine voraussetzungslose Lösung des Folgebildanschlusses  
Sonderheft der Österreichischen Zeitschrift für Vermessungswesen und Photogrammetrie, Wien 1963
- [16] Schmid, H. H.:  
An Analytical Treatment of the Orientation of a Photogrammetric Camera  
Report No. 880 of the Ballistic Research Laboratories, Aberdeen Proving Ground, Maryland, 1953
- [17] Schmid, H. H.:  
Eine allgemeine analytische Lösung für die Aufgabe der Photogrammetrie  
Bildmessung und Luftbildwesen, Nr. 4, 1958, Nr. 1, 1959
- [18] Schmid, H. H.:  
Über die Anwendung der Photogrammetrie in der Schweiz  
Fachvorträge der Int. Geodätischen Woche Obergurgl, 1976
- [19] Schmid, H. H.:  
Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie  
Mitteilung Nr. 22 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie, ETHZ  
Zürich, 1977
- [20] Schmid, H. H. und Heggli, S.:  
Räumliche Koordinatentransformation  
Mitteilung Nr. 23 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie, ETHZ  
Zürich, 1978
- [21] Schmid, H. H. und Scherrer, R.:  
Vom freien zum gelagerten Netz  
Mitteilung Nr. 29 des Institutes für Geodäsie und Photogrammetrie, ETHZ  
Zürich, 1980

[22] Schut, G. H.:  
Construction of Orthogonal Matrices and their  
Application in Analytical Photogrammetry  
Photogrammetria, No. 4., 1958–59

[23] Tham, P.:  
Photogrammetric Orientation Data and Determination of their Accuracy  
Stockholm, 1947

## Schlusswort

Die Zielsetzung dieser Arbeit war die Untersuchung von Möglichkeiten zur Gewinnung notwendiger Information, die eine Bestimmung von dreidimensionaler Form eines künstlich hergestellten Objektes mit der Anwendung der Philosophie einer Einzelbildauswertung ermöglicht.

Es sei dem geneigten Leser überlassen, anhand der beigefügten praktischen Beispiele die Anwendbarkeit derartiger Auswertetechnik zu beurteilen. Wenn auch die Methode – nicht zuletzt der ausgeprägten Symmetrie wegen – an beinahe berüchtigt (unfriedlichen) Gegenständen vor demonstriert wurde, so ist deren Applikation keineswegs nur auf diese Gebiete beschränkt. Die Auswertung von nicht-metrischen Amateurbildern kann zu einigen technischen oder juristischen Beweisführungsverfahren der Kriminalistik, des Verkehrswesens usw. eine wertvolle Ergänzung darstellen. Oder zum Beispiel, um auch ein positiveres Anwendungsfeld zu nennen, sei die Formbestimmung bei Prozessen höherer Dynamik zu erwähnen, wo die Synchronität der herkömmlichen Stereopaare nicht mehr gewährleistet werden kann.

Zum Schluss, keineswegs jedoch zuletzt, möchte es der Verfasser nicht unterlassen, seiner ganzen privaten sowie beruflichen Umgebung seinen aufrichtigen Dank auszusprechen. Eine solche Arbeit ist nur selten das Werk eines Einzelnen. Ohne die Unterstützung von vielen ihm nahestehenden,

freundlich gesinnten Menschen wäre sie nicht denkbar.

Der unerschütterliche Glaube des Dr. R. Pozzorini von F+W, Emmen, an die Lösbarkeit solcher Aufgaben hat diese Untersuchung initialisiert. Die anfängliche Skepsis des Referenten, Prof. Dr. H. Schmid, hat sich sehr bald in eine mit der ihm eigenen Vitalität realisierten Unterstützung gewandelt. Ich hatte unter seiner freundschaftlichen Führung über Jahre hinweg die Gelegenheit genossen, wenn auch nicht immer bedingungslos genutzt, insbesondere die analytische Formulierung der Zusammenhänge einer Vermessungsaufgabe zu erlernen und ausgiebig diskutieren zu können. Seine zahlreichen Hinweise und sorgfältigen Korrekturen verhalfen dieser Arbeit zur vorliegenden Form.

Herrn Prof. Dr. M. Jeger, meinem seinerseitigen Dozenten für darstellende Geometrie, danke ich für die liebenswürdige Übernahme des Koreferates. Ich bedaure, dass sein Versuch – in einem Photogrammeter das verlorengegangene Verständnis für die Terminologie der analytischen Geometrie wiederzubeleben – hier nicht erfolgreich genug ausgefallen ist.

Meinen Kollegen im Lehrbereich Photogrammetrie danke ich für die vielseitige Unterstützung und Geduld, mit der sie manche (Einbildgetragene) Kaffeerunde über sich ergehen liessen.

Frau S. Weber, die mit Sorgfalt und Ausdauer das Manuskript ins Leserliche übertragen hat, gebührt mein besonderer Dank, ebenso wie Herrn W. Schneibel, der für die Zeichnungen und Formeln besorgt war.





## Mitteilungen aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Hönggerberg, 8093 Zürich

### ab 1975

18	1975	Der Beitrag der Photogrammetrie zum heutigen Stand der Geodäsie. Prof. Dr. Hellmut Schmid	15.-
19	1976	Das Amtliche Vermessungswesen der Schweiz, Rückblick, Umschau und Ausblick. Prof. Dr. Herbert J. Matthias	25.-
20	1978	Das Geoid in der Schweiz. Dr. Werner Gurtner	25.-
21	1978	Mehrweckkataster. Vorträge an der Informationstagung vom 18./19. Februar 1977	15.-
22	1978	Ein allgemeiner Ausgleichs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie. Prof. Dr. Hellmut Schmid	15.-
23	1978	Räumliche Koordinatentransformation. Eine pseudo-lineare Formulierung als Annäherungslösung für eine strenge Ausgleichung mit entsprechendem Fortran-Programm. Prof. Dr. Hellmut Schmid und Siegfried Heggli	15.-
24	1978	Der Übersichtsplan der amtlichen Vermessung. Bedeutung, Erhaltung, Erneuerung. Vorträge an der Informationstagung vom 10./11. Februar 1978 an der ETH Hönggerberg	25.-
25	1979	Der Mehrweckkataster im Flughafen Kloten. Paul Kasper	15.-
26	1979	ALGOL-Programm TGREFR. Modellatmosphäre und Refraktion. Niklaus Wunderlin	20.-
27	1979	Statistische Methoden zur Beurteilung der Qualität einer Vermessung. Christian Just	15.-
28	1980	De la synthèse d'images appliquée aux maquettes de terrain numériques. Dr. Heinz Hügli	30.-
29	1980	Vom freien zum gelagerten Netz. Prof. Dr. Hellmut H. Schmid Anhang I: Anfelderung eines Netzes unter der Bedingung minimalisierter Klaffungen. René Scherrer. Anhang II: Numerische Beispiele.	15.-
30	1981	Allgemeine Vermittelnde Netzausgleichung. Prof. Dr. Herbert J. Matthias	20.-
31	1981	Zum Einsatz automatisch registrierender Tachymeter in der schweizerischen Parzellarvermessung. Paul Kasper, R. Conzett, J. Kaufmann, H. J. Matthias, H.-R. Schwendener	25.-
32	1982	Das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie. Rückblick auf Entstehung und Entwicklung 1855-1974. Prof. Dr. Fritz Kobold	15.-
33	1982	Complex Crustal Strain Approximation. Dr. Dieter Schneider	40.-
34	1983	Datenstrukturen für Landinformationssysteme – Semantische, topologische und räumliche Beziehung in Daten der Geo-Wissenschaften. Dr. André Frank	30.-
35	1983	Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. Dr. Alessandro Carosio	30.-

# PC-6 TURBO PORTER

## General Description

≡ PILATUS ≡  
AIRCRAFT LTD

Dimensions  
Three View Drawing

