ETH zürich

Research Collection

Doctoral Thesis

Sur l'homologie et la cohomologie d'une couronne

Author(s):
Nicollier, Grégoire

Publication Date:
1984

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000315977

Rights / License:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection. For more information please consult the Terms of use.

ETH Library

Thèse EPFZ n° 7467

SUR L'HOMOLOGIE ET LA COHOMOLOGIE D'UNE COURONNE

THESE

présentée à

L'ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE

DE ZURICH

pour l'obtention du titre de

Docteur ès sciences mathématiques

par

GREGOIRE NICOLLIER

mathématicien diplômé EPFZ

né le 14 août 1957

originaire de Bagnes (VS)

Acceptée sur proposition

du Professeur Urs Stammbach, rapporteur

du Professeur Guido Mislin, corapporteur

1984

Abstract

This thesis investigates the (co)homology of a wreath product G wr K, with particular emphasis on the Z- and Z_p-(co)homology of the iterated regular wreath product $C_p \text{ wr}^q C_p$, where Z denotes the integers, Z_p the integers mod p, C_p the cyclic group of prime order p, and where $C_p \text{ wr}^q C_p$ is defined by $C_p \text{ wr}^0 C_p = C_p$ and $C_p \text{ wr}^{q+1} C_p = (C_p \text{ wr}^q C_p) \text{ wr } C_p$. Our results extend some of Tappe and Nakaoka.

We show that $H_n(C_p \text{ wr}^q C_p, Z)$ is a finite abelian group of exponent p^{q+1} whenever $n \geq 1$. This group is in fact elementary abelian for $1 \leq n \leq p$ and we show how to calculate its rank. We use an explicit free resolution of C_p wr C_p to calculate $H_{p+1}(C_p \text{ wr } C_p, Z)$ for all p, $H_n(C_3 \text{ wr } C_3, Z)$ for n=5,6,7, $H_7(C_5 \text{ wr } C_5, Z)$ and $H_9(C_7 \text{ wr } C_7, Z)$, as well as the cohomology rings $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z)$ and $H^*(C_p \text{ wr } C_p, Z_p)$ for all p. We determine a minimal system of generators and relations for the rings $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z_2)$, $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z)$ and up to dimension 9 for $H^*(C_3 \text{ wr } C_3, Z_3)$. We study the ring structure of $H^*(C_p \text{ wr } C_p, Z_p)$ for odd p, determine the nilpotent elements and show that their order of nilpotence cannot exceed (p+3)/2.
Being a semi-direct product, a wreath product G wr K has an associated Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence. We show that $H_*(G \text{ wr } K, Z_p)$ is isomorphic to the E^2_{**}-term of the spectral sequence for any wreath product, and that $H^*(G \text{ wr } K, Z_p)$ is ring-isomorphic to the E_2^{**}-term whenever the wreath product is of finite support and G is of type FP_∞ over Z_p. Using this isomorphism, we study the ring structure of $H^*(C_p \text{ wr}^q C_p, Z_p)$: there are generators up to at least dimension 2^q if p=2 and $2p^q$ if p is odd; we identify the nilpotent elements and show that their order of nilpotence is at most p.

Résumé

Ce travail traite de la (co)homologie d'une couronne $G \text{ wr } K$; nous nous intéressons en particulier à la (co)homologie de la couronne régulière itérée $C_p \text{ wr}^q C_p$ avec coefficients dans Z (les entiers rationnels) et dans Z_p (les entiers modulo p), où C_p désigne le groupe cyclique d'ordre premier p et où $C_p \text{ wr}^q C_p$ est défini par $C_p \text{ wr}^0 C_p = C_p$, $C_p \text{ wr}^{q+1} C_p = (C_p \text{ wr}^q C_p) \text{ wr } C_p$. Nous étendons certains résultats de Tappe et de Nakaoka. Voici un aperçu du contenu de notre travail.

Nous établissons que $H_n(C_p \text{ wr}^q C_p, Z)$ est un groupe abélien fini d'exposant p^{q+1} pour $n \geq 1$; ce groupe est élémentaire abélien pour $1 \leq n \leq p$ et nous montrons comment en calculer le rang. A l'aide d'une résolution $C_p \text{wr} C_p$-libre explicite nous calculons $H_{p+1}(C_p \text{ wr } C_p, Z)$ pour tout p, $H_n(C_3 \text{ wr } C_3, Z)$ pour $n=5,6,7$, $H_7(C_5 \text{ wr } C_5, Z)$, $H_9(C_7 \text{ wr } C_7, Z)$, et les anneaux de cohomologie $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z)$ et $H^*(C_p \text{ wr } C_p, Z_p)$ pour tout p. Nous calculons un système minimal de générateurs et relations pour les anneaux $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z_2)$, $H^*(C_2 \text{ wr } C_2, Z)$ et jusqu'en dimension 9 pour $H^*(C_3 \text{ wr } C_3, Z_3)$. Nous étudions la structure de l'anneau $H^*(C_p \text{ wr } C_p, Z_p)$ pour p impair, déterminons les éléments nilpotents et montrons que leur ordre de nilpotence est au plus $(p+3)/2$. Une couronne $G \text{ wr } K$ est un produit semi-direct : on peut donc lui associer une suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre. Nous montrons que $H_*(G \text{ wr } K, Z_p)$ est isomorphe au terme E^2_{**} de la suite spectrale pour toute couronne et que $H^*(G \text{ wr } K, Z_p)$ est isomorphe comme anneau au terme E_2^{**} pour toute couronne de support fini dans laquelle G est de type FP_∞ sur Z_p. A l'aide de cet isomorphisme nous étudions la structure de l'anneau $H^*(C_p \text{ wr}^q C_p, Z_p)$: il y a par exemple des générateurs au moins jusqu'en dimension 2^q si $p=2$ et $2p^q$ si p est impair; nous identifions les éléments nilpotents et montrons que leur ordre de nilpotence est au plus p.