Eine partielle Prädikatenlogik

Author(s):
Clavadetscher-Seeberger, Erna

Publication Date:
1983

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000318338

Diss. ETH 7347

EINE PARTIELLE PRÄDIKATENLOGIK

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

ERNA CLAVADETSCHER-SEEBERGER

dipl.Math.ETH

geboren am 28.August 1947

von Küblis (Kt.Graubünden)

Angenommen auf Antrag von

Prof.Dr.E.Specker, Referent

Prof.Dr.H.Läuchli, Korreferent

1983

ZUSAMMENFASSUNG

Die in dieser Arbeit dargestellte partielle Prädikatenlogik ist eine Verallgemeinerung der klassischen Prädikatenlogik; sie ist dadurch gekennzeichnet, dass gewisse Paare von Aussagen als inkompatibel betrachtet werden können und die Wahrheitswerte eine "partielle Boolesche Algebra" bilden, d.h. eine aus Booleschen Algebren zusammengesetzte Struktur, bei der Boolesche Verknüpfungen nur zwischen Elementen der selben Booleschen Algebra definiert sind.

Die Interpretation der Sprache in einer "P-Struktur" $\mathfrak{T} = \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{b} \rangle$, bestehend aus Individuenstruktur $\mathfrak{M}$ und partieller Boolescher Algebra $\mathfrak{b}$, hat damit folgende Eigenschaft: Die Interpretation $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}(A \to B) = \neg \phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}(A) \vee \phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}(B)$ $(\vec{c} \in |\mathfrak{M}|^{\omega})$ einer Formel $A \to B$ in $\mathfrak{T}$ ist genau dann definiert, wenn die Interpretationen $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}(A)$ und $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}(B)$ in $\mathfrak{T}$ definiert sind und miteinander durch Boolesche Operationen verknüpfbar sind. Weiter wird verlangt: Soll die Formel $(\exists x_i) A$ in $\mathfrak{T}$ eine Interpretation haben, nämlich $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}((\exists x_i) A) = \bigvee_{a \in |\mathfrak{M}|} \phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}|^{c_i}_{a}}(A)$ $(*)$, so müssen die Interpretationen $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}|^{c_i}_{a}}(A)$ für alle $a \in |\mathfrak{M}|$ definiert und paarweise miteinander verknüpfbar sein und es muss das Supremum $(*)$ in $\mathfrak{b}$ existieren. $A_1, \ldots, A_m \Vdash B$ bedeutet in dieser partiellen Logik, dass für jede P-Struktur $\mathfrak{T}$ (des entsprechenden Typs) und für jede Interpretation $\phi^{\mathfrak{T}}_{\vec{c}}$ in $\mathfrak{T}$ aus der Wahrheit der Prämissen $A_1, \ldots, A_m$ die Wahrheit der Konklusion B folgt. Die Allgemeingültigkeit einer Formel F in dieser Logik wird ausgedrückt durch: "Für alle Interpretationen in P-Strukturen gilt: Wann immer die Formel F eine Interpretation besitzt, ist sie (bei dieser Interpretation) wahr."

Der Kalkül der partiellen Prädikatenlogik fusst auf einem Regelsystem $\mathcal{P}$ mit 13 Sequenzen der Form $\underline{S}$: $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ und 7 Regeln $\frac{\underline{S}_1; \ldots; \underline{S}_k}{\underline{T}}$ ($\underline{S}_1, \ldots, \underline{S}_k$, $\underline{T}$: Sequenzen). Der Herleitungsbegriff wird wie üblich definiert: Von den 13 Sequenzen von $\mathcal{P}$ ausgehend gewinnt man mittels der Regeln von $\mathcal{P}$ neue Sequenzen (herleitbare Sequenzen).

Für diesen Kalkül wird ein Vollständigkeitssatz bewiesen: Eine Sequenz $A_1, \ldots, A_m \vdash B$ ist genau dann herleitbar, wenn $A_1, \ldots, A_m \Vdash B$. Ein entsprechender Vollständigkeitssatz gilt für eine partielle Logik, in der als Wahrheitswerte-Strukturen nur transitive partielle Boolesche Algebren zugelassen sind und in der das Regelsystem $\mathcal{P}$ um eine zusätzliche Sequenz erweitert worden ist.

Weiter wird gezeigt: Ist eine Formel $A \leqslant B$ der Verbandstheorie gültig in allen Verbänden, so ist die entsprechend gebildete Formel $A \to B$ der Aussagenlogik gültig in allen transitiven partiellen Booleschen Algebren.

Schliesslich werden einige klassisch allgemeingültige Formeln der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik auf ihre Gültigkeit in der partiellen Logik hin untersucht. Drei Gültigkeitsbegriffe der partiellen Logik werden dabei einem Vergleich unterzogen: Gültigkeit, bezogen auf die Klasse aller partiellen Booleschen Algebren, bezogen auf die Klasse der transitiven partiellen Booleschen Algebren und Gültigkeit, bezogen auf die spezielle partielle Boolesche Algebra $\mathcal{B}(E^3)$, gebildet aus den linearen Teilräumen des Hilbertraumes E^3. Dabei erweist es sich, dass sich diese drei Gültigkeitsbegriffe voneinander und vom klassischen Gültigkeitsbegriff unterscheiden.

ABSTRACT

The partial predicate logic as described in this thesis is a generalization of the classical predicate logic. The generalization consists in admitting certain pairs of propositions to be "incompatible". The truth values constitute a "partial Boolean algebra", i.e. a structure composed of Boolean algebras so that Boolean operations between two elements are only defined within the same Boolean algebra. (Such pairs of elements are said to be compatible.)

Hence the interpretation of the language in a "P-structure" $\mathcal{T} = \langle \mathfrak{M}, \mathfrak{b} \rangle$, consisting of a universe $\mathfrak{M}$ and a partial Boolean algebra $\mathfrak{b}$, has the following property: The interpretation $\phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}(A \rightarrow B) = \neg \phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}(A) \vee \phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}(B)$ $(\vec{c} \in |\mathfrak{M}|^{\omega})$ of a formula $A \rightarrow B$ in $\mathcal{T}$ is defined if and only if the interpretations $\phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}(A)$ and $\phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}(B)$ are defined in $\mathcal{T}$ and if they are compatible. Moreover it is required: In order that an interpretation of the formula $(\exists x_i) A$ in $\mathcal{T}$, namely $\phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}((\exists x_i) A) = \bigvee_{a \in \mathfrak{M}} \phi_{\vec{c}\,|_a^{c_i}}^{\mathcal{T}}(A)$ (*) , exists, the interpretations $\phi_{\vec{c}\,|_a^{c_i}}^{\mathcal{T}}(A)$, $a \in |\mathfrak{M}|$, have to be defined, any two of them have to be compatible, and the supremum (*) has to exist. The meaning of $A_1, .., A_m \Vdash B$ in this partial logic is: For every P-structure $\mathcal{T}$ (of suitable type) and for every interpretation $\phi_{\vec{c}}^{\mathcal{T}}$ in $\mathcal{T}$, the truth of the premises $A_1, .., A_m$ implies the truth of the conclusion B . The validity of a formula F in this logic is expressed by: "For all interpretations in P-structures: Whenever the formula F has an interpretation, it is true (in this interpretation)."

The calculus of the partial predicate logic is based on a sys-

tem $\mathcal{P}$ of rules consisting of 13 sequents of the form $\underline{S}$: $A_1,\ldots,A_m \vdash B$ and 7 rules $\frac{\underline{S}_1;\ldots;\underline{S}_k}{\underline{T}}$ ($\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_k$, $\underline{T}$ are sequents). The concept of derivation is the usual: Starting from the 13 sequents of $\mathcal{P}$ one gets new sequents (derivable sequents) by means of the rules of $\mathcal{P}$.

For this calculus a completeness theorem is proved: A sequent $A_1,\ldots,A_m \vdash B$ is derivable if and only if $A_1,\ldots,A_m \Vdash B$. A similar completeness theorem holds for a partial logic, in which only transitive partial Boolean algebras are admitted as truth value structures and where a supplementary sequent is added to the system $\mathcal{P}$ of rules.

Furthermore it is shown: If a formula $A \leqslant B$ of the lattice theory is valid in all lattices, then the formula $A \rightarrow B$ of the propositional logic corresponding to $A \leqslant B$ is valid in all transitive partial Boolean algebras.

Finally some classically valid formulas of the propositional and of the predicate logic are tested for validity in the partial logic. Three concepts of validity in the partial logic are compared: Validity with respect to all partial Boolean algebras, with respect to all transitive partial Boolean algebras, and validity with respect to the special partial Boolean algebra $\mathcal{L}(E^3)$ consisting of the linear subspaces of the Hilbert space E^3. Thereby these three concepts turn out to be essentially different and also different from the classical concept of validity.