Diss. ETH Nr. 7904

QUADRATISCHE RAEUME
MIT WERTEN IN
INVERTIERBAREN MODULN

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

DOKTORS DER MATHEMATIK

der

EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZUERICH

vorgelegt von

Walter Bichsel
dipl. math. ETH
geboren am 8. November 1954
von Hasle BE

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. M.-A. Knus, Referent
Prof. Dr. M. Ojanguren, Korreferent

1985

Abstract

Let R be a commutative ring with identity. We study quadratic maps $q : V \to I$ where V is a finitely generated, projective R-module and I an invertible R-module. If I is free, q induces a quadratic form on V with values in R for every choice of a basis element of I. Different choices yield forms which are proportional. Thus the similitudes naturally turn out to be the isomorphisms of quadratic spaces with values in invertible modules.
Examples of such spaces appeared in [KOS] and in [Kn].

To every invertible R-module I there is a splitting S which is a faithfully-flat R-algebra; every quadratic space over R with values in I then defines a class of similar quadratic spaces over S by scalar extension. In this way descent theory allows to carry over results on quadratic spaces to quadratic spaces with values in invertible modules.
For example, it is possible to define the even Clifford algebra C^+ and the Arf invariant of a quadratic space with values in an invertible module. The odd part C^- of the Clifford algebra can also be defined as a module over C^+, but $C = C^+ \oplus C^-$ does not have in general a natural algebra structure.
We apply our constructions to spaces with trivial Arf invariant. In particular, we get a characterization of spaces of rank 4 with trivial Arf invariant.
Finally we give a cohomological characterization of quadratic spaces with values in invertible modules with trivial Arf invariant.

Zusammenfassung

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. In dieser Arbeit werden quadratische Abbildungen $q : V \to I$ untersucht; dabei sind V ein endlich erzeugter, projektiver R-Modul und I ein invertierbarer R-Modul. Ist I frei, so induziert q für jede Wahl der Basis in I eine quadratische Form auf V mit Werten in R . Verschiedene Wahl der Basis ergibt proportionale Formen. Die Isomorphismen für quadratische Räume mit Werten in invertierbaren Moduln sind somit in natürlicher Weise durch die Aehnlichkeiten gegeben.
Beispiele derartiger Räume wurden in [KOS] und [Kn] gegeben.

Zu jedem invertierbaren R-Modul I gibt es eine treu-flache R-Algebra S , die I zerfällt; jeder quadratische Raum mit Werten in I definiert somit durch Skalarerweiterung eine Klasse von ähnlichen quadratischen Räumen über S . Dies erlaubt, Resultate über quadratische Räume mit Hilfe der Theorie des Abstiegs auf den hier betrachteten Fall zu übertragen. Insbesondere ist es möglich, gerade Clifford-Algebra C^+ und Arf-Invariante für quadratische Räume mit Werten in invertierbaren Moduln zu definieren; der ungerade Teil C^- der Clifford-Algebra kann als Modul über C^+ ebenfalls definiert werden; $C = C^+ \oplus C^-$ trägt aber im allgemeinen keine natürliche Algebrastruktur.
Für Räume mit trivialer Arf-Invariante können C^+ und C^- genauer beschrieben werden; als Anwendung erhält man eine Charakterisierung der Räume vom Rang 4 mit trivialer Arf-Invariante.
Schliesslich erlaubt die Untersuchung der Gruppe der Aehnlichkeiten und ihrer Untergruppe der eigentlichen Aehnlichkeiten Klassifizierungen durch Etale-Kohomologie.