

**EXTENSIONS DECIDABLES ET INDECIDABLES
DE LA THEORIE MONADIQUE
DU DEUXIEME ORDRE
DE DEUX FONCTIONS DE SUCESSEUR**

présentée à

L'ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE ZURICH

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Christian SAVIOZ

mathématicien diplômé EPFZ

né le 27 juin 1954

originaire d'Ayer (VS)

acceptée sur proposition

du Professeur Hans Läuchli, rapporteur

du Professeur Ernst Specker, corapporteur

Zürich 1985



ABSTRACT

In this thesis we investigate the monadic second order theory of two successor functions, whose decidability was shown by M.O. Rabin, with particular emphasis on problems of definability. We obtain undecidable and decidable extensions of this theory.

Let S2S (WS2S) respectively be the strong (weak) monadic second order theory of the binary tree T in the language of two successor functions. An S2S-formula defines a relation on the power set of T . We give a new proof of the following theorem of M.O. Rabin : a subset of T is S2S-definable iff it is regular. We obtain undefinability results of functions from T into T . We show the undecidability of extensions of WS2S by certain classes of functions. We finally state the decidability of extensions of S2S by some subsets of T .

RESUME

Ce travail traite de la théorie monadique du deuxième ordre de deux fonctions de successeur, dont M.O. Rabin a établi la décidabilité. Nous nous intéressons à des problèmes de définissabilité. Nous obtenons des extensions indécidables d'une part et décidables d'autre part de cette théorie.

Soit S2S (WS2S) respectivement la théorie forte (faible) monadique du deuxième ordre de deux fonctions de successeur. Une formule de S2S définit une relation sur l'ensemble des sous-ensembles de l'arbre binaire T. Nous donnons une nouvelle démonstration du théorème de M.O. Rabin suivant : un sous-ensemble de T est définissable dans S2S si et seulement si il est régulier. Nous obtenons des critères de non-définissabilité de fonctions de T dans T. Nous montrons l'indécidabilité d'extensions de WS2S par certaines classes de fonctions. Nous établissons enfin la décidabilité d'extensions de S2S par quelques sous-ensembles de T.