ETH zürich

Research Collection

Doctoral Thesis

Renormalization group, tree expansion, and non-renormalizable quantum field theories

Author(s):
Felder, Giovanni

Publication Date:
1986

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000364034

Rights / License:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection. For more information please consult the Terms of use.

ETH Library

Diss. ETH No. 7982

Renormalization group, tree expansion, and non-renormalizable quantum field theories

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZÜRICH
for the degree of
Doctor of Natural Sciences

presented by
Giovanni Felder
Dipl. Phys. ETH
born November 18, 1958
citizen of Willisau (Luzern) and Lugano (Ticino)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. J. Fröhlich, examiner
Prof. Dr. K. Osterwalder, co-examiner

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1986

J. Fröhlich

Summary

We study renormalizable and non-renormalizable Euclidean quantum field theories from the point of view of Wilson's renormalization group. We construct the tree expansion of Gallavotti and Nicolò, for the general case of a scalar field theory. It is an expansion of physical quantities in powers of the running coupling constants on all scales. These running coupling constants obey recursion relations (the flow equations) involving similar power series. We show that the tree expansion is finite to all orders, even if the theory is not renormalizable.

The ultraviolet problem is thus reduced (as far as perturbation theory is concerned) to the problem of finding a solution to the flow equations.

A naive way of finding a solution is to solve the flow equations in a power series in the running coupling constants on some fixed low energy scale (the renormalized coupling constants). This way of solving the flow equations yields for renormalizable theories the usual renormalized perturbation series: the BPH Theorem and the de Calan–Rivasseau $n!$-bounds can be proven with this method. For non-renormalizable theories, however, the naive way of solving the flow equations breaks down because of ultraviolet divergences. This does not mean that no solutions exist: There can exist a solution of the flow equations which does not depend in a C^∞ way on the renormalized coupling constants.

More can be said in a specific example of a non-renormalizable theory: a ϕ^4 theory in four dimensions with propagator $1/p^{2-\epsilon/2}$ (this model is similar to a $\phi^4_{4+\epsilon}$ theory, but is technically easier to handle). In this case we solve the flow equations with a fixed point ansatz, i.e., by setting all running coupling constants equal to each other. The result is that there does exist a non-trivial fixed point λ^* (at negative coupling constant) as predicted by a one-loop beta function calculation. We then re-write the flow equations in an expansion around this fixed point. In this form the flow equations can be solved in a finite expansion in powers of $\lambda - \lambda^*$, where λ are the renormalized coupling constants. This yields a two-parameter family of Euclidean quantum field theories expressed as finite expansions.

Results beyond perturbation theory are obtained in the planar limit (the $N \to \infty$ limit of a $\mathrm{tr}\phi^4$ theory, where ϕ is an $N \times N$ matrix). In this limit the tree expansion is not only finite to all orders, but also convergent, and the above-mentioned two-parameter family of theories can be rigorously constructed.

Riassunto

Studiamo teorie quantistiche euclidee dei campi, rinormalizzabili e non, dal punto di vista del gruppo di rinormalizzazione di Wilson. Costruiamo lo sviluppo in alberi proposto da Gallavotti e Nicolò, nel caso generale di una teoria di un campo scalare. Questo è uno sviluppo di quantità fisiche in potenze delle costanti d'accoppiamento effettive su tutte le scale. Queste costanti d'accoppiamento effettive soddisfano relazioni di ricorrenza (le equazioni di flusso) che pure contengono simili serie di potenze.

Mostriamo che lo sviluppo in alberi è finito a tutti gli ordini, anche se la teoria non è rinormalizzabile. Il problema ultravioletto è quindi ridotto (per quanto concerne la teoria delle perturbazioni) al problema di trovare una soluzione alle equazioni di flusso. Un modo ingenuo di trovarne una è di risolvere le equazioni di flusso in una serie di potenze nelle costanti d'accoppiamento effettive su una scala a bassa energia fissa (ovvero nelle costanti d'accoppiamento rinormalizzate). Questo modo di risolvere le equazioni di flusso genera la nota teoria delle perturbazioni rinormalizzata: il teorema BPH e i limiti $n!$ di de Calan e Rivasseau possono essere dimostrati con questo metodo. Per teorie non rinormalizzabili, invece, il detto modo di risolvere le equazioni di flusso fallisce a causa di divergenze ultravioLette. Ciò non significa però che non esistano soluzioni: può esistere una soluzione che non dipende in modo C^{∞} dalle costanti d'accoppiamento rinormalizzate.

Si può dire di più in un esempio concreto di una teoria non rinormalizzabile: una teoria ϕ^4 in quattro dimensioni con propagatore $1/p^{2-\epsilon/2}$ (questo modello è simile a $\phi^4_{4+\epsilon}$, ma è tecnicamente più semplice da trattare). In questo caso risolviamo le equazioni di flusso supponendo l'esistenza di un punto fisso, cioè ponendo tutte le costanti d'accoppiamento effettive uguali l'una all'altra nelle equazioni. Il risultato è che un punto fisso λ^* esiste effettivamente (a costante d'accoppiamento negativa) ed è stabile nell'ultravioletto, come lo suggerisce un calcolo di funzione beta a un cappio. Indi riscriviamo le equazioni di flusso in uno sviluppo attorno a questo punto fisso. In questa forma le equazioni possono essere risolte in uno sviluppo finito in potenze di $\lambda - \lambda^*$, dove λ sono le costanti d'accoppiamento rinormalizzate. In questo modo si costruisce una famiglia a due parametri di teorie quantistiche euclidee espresse sotto forma di sviluppi in serie finiti a tutti gli ordini.

Possono essere ottenuti risultati al di là della teoria delle perturbazioni nel limite planare (il limite $N \to \infty$ di una teoria $\mathrm{tr}\phi^4$ dove ϕ è una matrice $N \times N$). In questo limite lo sviluppo in alberi è non solo finito a tutti gli ordini ma anche convergente, e la suddetta famiglia a due parametri di teorie può essere costruita rigorosamente.