Ueber die Regularisierung schlecht gestellter Probleme mit der GCV-Methode von Wahba

Author(s):
Trömel, Ludwig Kurt

Publication Date:
1986

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000369588

Diss. ETH Nr. 7996

Über die Regularisierung schlecht gestellter Probleme mit der GCV-Methode von Wahba.

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines

Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

LUDWIG KURT TRÖMEL

Master of Arts in Mathematics, University of California at San Diego

geboren am 16. September 1951

von Deutschland

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Jürg T. Marti, Referent

Prof. Dr. Peter Henrici, Korreferent

Zürich 1986

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt die Regularisierung schlechtgestellter Probleme, besonders Fredholmsche Integralgleichungen erster Art, mit der GCV-Methode von Wahba.

Zunächst geben wir eine Einführung in die elementare Theorie der Hilberträume mit Kernfunktion, betrachten verallgemeinerte Inverse stetiger linearer Operatoren zwischen Hilberträumen und stellen mit Hilfe einer adäquaten Definition der schlechtgestellten Probleme eine allgemeine Klassifikation mathematischer Probleme her.

Die Existenz- und Konvergenztheorie der bekannten Tichonow-Regularisierung solcher Probleme wird nach einer Arbeit von Locker und Prenter im Hilbertraumrahmen dargestellt.

Das Problem der Parameterwahl bei der Regularisierung wird kurz besprochen, ehe wir, inspiriert durch diverse Arbeiten von Wahba, eine überschaubare und transparente Strukturierung der Existenz- und Konvergenztheorie der GCV-Methode im Rahmen von Hilberträumen mit Kernfunktion geben.

Danach wird mit Hilfe eines Resultats von Gorenflo und Hilpert ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz bewiesen, der bei der Benützung der GCV-Methode mit konvexen Nebenbedingungen Anwendung findet.

Praktisch wird, basierend auf Ideen von Locker, Prenter und Wahba ein Algorithmus zur Lösung schlechtgestellter Probleme angegeben, der die GCV-Methode, unter Verwendung von normierten B-Splines und der Singulärwertzerlegung, mit der Tichonow-Methode kombiniert.

Schliesslich zeigt ein ausführlicher Vergleich der hierbei erhaltenen Resultate mit Ergebnissen, die in letzter Zeit mit der Methode von Marti erzielt wurden, dass die GCV-Methode konkurrenzfähig ist, wenn auch nur bei der Lösung relativ schwach schlechtgestellter Probleme. Dagegen lassen die erhaltenen Resultate durchaus den Schluss zu, dass die GCV-Methode bei verfälschten, also den meisten experimentell erzielten, Daten, sogar dem vor kurzen von Trummer verallgemeinerten und verbesserten Marti-Algorithmus gleichwertig, wenn nicht teilweise überlegen ist.

Abstract

This thesis deals with the regularization of ill posed problems, in particular Fredholm integral equations of the first kind, by means of the Generalized-Cross-Validation-Method of Wahba.
We begin with an introduction to the elementary theory of reproducing kernel Hilbert spaces, look at generalized inverses of bounded linear operators between Hilbert spaces and construct a general classification of mathematical problems in terms of ill posed problems.
Then we present the existence and convergence theory of the well known Tikhonov regularization following a paper of Locker and Prenter.
The problem of choosing the right parameter in regularization is discussed and various methods are reviewed, before we give, inspired by some papers of Wahba, a transparent structuring of the existence and convergence theory of the GCV-method in reproducing kernel Hilbert spaces.
We then prove, using a recent result of Gorenflo and Hilpert, a general existence and uniqueness theorem. The result is applied to the GCV-method with convex constraints.
On the practical side we give, based on ideas of Locker, Prenter and Wahba, an algorithm for solving ill posed problems with the GCV-method combined with Tikhonov regularization, using normalized B-Splines and the singular value decomposition.
Finally we show, by presenting a detailed comparison of the results obtained here with results obtained recently by Trummer

with a generalized version of the algorithm of Marti, that the GCV-method is not inferior in solving mildly ill posed problems. On the contrary, the method does very well in solving ill posed problems with data errors which we usually are confronted with when measurements of physical experiments are in hand. Here the method shows very good results, at times even results superior to those received by the method of Marti.