Quaternionenbündel über der reellen projektiven Ebene

Doctoral Thesis

Author(s):
Mittelholzer, Thomas Jürg Walter

Publication date:
1987

Permanent link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000413811

Diss. ETH Nr. 8360

Quaternionenbündel über der reellen projektiven Ebene

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
DOKTORS DER MATHEMATIK
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von
Thomas Jürg Walter Mittelholzer
Dipl. Math. ETH
geboren am 16. Mai 1956
von St. Gallen

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. M.-A. Knus, Referent M.-A. Knus
PD Dr. M. Brodmann, Korreferent

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1987

Quaternionic bundles over the real projective plane

Abstract

In this work we study bundles and hermitian spaces over quaternionic algebras. We treat three quite independent topics: infinitesimal deformations, the moduli problem for quaternionic bundles of rank 1 over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ and Syzygy theory for quaternionic bundles over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Let X be a scheme of finite type over a field k (char k $\neq 2$) and let A be an Azumaya algebra of rank 4 over X. The classification of infinitesimal deformations of locally free A-modules E and hermitian spaces (E, β) with values in A is similar to the classification of deformations of vector bundles and quadratic spaces. These deformations are classified by the cohomology groups $H^1(X, \mathrm{Ad}\, E)$ and $H^1(X, \mathrm{Ad}\, \beta)$, where Ad E and Ad β denote the Lie algebra sheaves associated with the principal fiber bundles of E and (E, β).

Over the real projective plane we can solve the moduli problem for quaternionic bundles of rank 1. To each quaternionic bundle E (of rank 1) over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ we associate in a functorial way a stable symplectic vector bundle E_c (of rank 2) over $\mathbb{P}_c^2$, and conversely. Barth (1977) has given an explicit description of the moduli spaces M(n) for stable rank-2 bundles over $\mathbb{P}_c^2$ with Chern classes $c_1 = 0$ and $c_2 = n$, $n \geq 2$. We can provide these spaces with a real structure $\sigma_+ : M(n) \rightarrow M(n)$ for all second Chern classes c_2. For c_2 even there exists another real structure $\sigma_- : M(2n) \rightarrow M(2n)$. The fixed points under σ_- correspond to symplectic bundles and therefore the real schemes $M_-(2n)$, $n\geq 1$, that are derived from the real structure σ_-, are moduli spaces for symplectic vector bundles and rank-1 quaternionic bundles. The complex schemes M(n), $n\geq 2$, are irreducible and rational (s.[Ba]), so the real schemes $M_-(2n)$, $n\geq 1$, are also irreducible, rational and smooth over the real closed points. The real manifold $M_-(2)(\mathbb{R})$ which consists of all real closed points of $M_-(2)$, can be shown to be contractible.

To describe quaternionic bundles in an explicit way we use Syzygy theory over $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. This setting is well suited to classify quaternionic bundles using free resolutions and to reformulate and generalize some results of Knus, Parimala and Sridharan [K-P-S].We compute the Chern classes of a quaternionic bundle E, viewed as a complex bundle, from a presentation of E restricted to an affin plane $\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{P}^2$. For rank-1 bundles with special free resolutions, the curve of jump lines can be determined by elementary linear algebra and examples with curves of degree 2 and 4 are calculated explicitly.

Zusammenfassung

Ausgehend von einem allgemeinen Rahmen - lokal freie Moduln und hermitesche Räume über einer Azumaya-Algebragarbe A mit Involution - behandelt diese Arbeit drei voneinander weitgehend unabhängige Themenkreise; es sind dies infinitesimale Deformationen, das Modulraumproblem für Quaternionenbündel vom Rang 1 über $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ und Syzygientheorie für Quaternionenbündel über $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$.

Sei X ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k (Char k $\neq$ 2) und A eine Azumaya-Algebra vom Rang 4 über X. Infinitesimale Deformationen von lokal freien A-Moduln E und von hermiteschen Räumen (E, β) mit Werten in A lassen sich - analog wie Vektorraumbündel und quadratische Räume - durch die Kohomologiegruppen $H^1(X, \mathrm{Ad}\, E)$ und $H^1(X, \mathrm{Ad}\, \beta)$ klassifizieren; dabei bezeichnet Ad E die Lie-Algebragarbe zum Prinzipalfaserbündel $Aut_A E$ von E und Ad β die Lie-Algebragarbe zum Prinzipalfaserbündel von (E, β).

Ueber der reellen projektiven Ebene lösen wir das Modulraumproblem für Quaternionenbündel vom Rang 1. Jedem Quaternionenbündel E (vom Rang 1) entspricht funktoriell ein stabiles, symplektisches Vektorraumbündel E_c (vom Rang 2) über $\mathbb{P}_c^2$, und umgekehrt. Die von Barth (1977) konstruierten Modulräume M(n) für stabile komplexe Rang-2-Bündel über $\mathbb{P}_c^2$ mit Chernklassen $c_1 = 0, c_2 = n, n \geq 2$, können wir mit einer reellen Struktur $\sigma_+ : M(n) \to M(n)$ versehen und für gerade c_2 eine zweite reelle Struktur $\sigma_- : M(2n) \to M(2n)$ angeben. Die Fixpunkte unter σ_- entsprechen symplektischen Vektorraumbündeln und die zugehörigen reellen Schemata $M_-(2n)$, $n\geq 1$, sind Modulräume für symplektische Vektorraumbündel und damit auch für Rang-1-Quaternionenbündel über $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Da M(n) bekanntlich irreduzibel, rational und glatt ist (s.[Ba]), sind auch die reellen Modulräume irreduzibel, rational und glatt in den reellen abgeschlossenen Punkten. Von der Mannigfaltigkeit $M_-(2n)(\mathbb{R})$, bestehend aus allen reellen abgeschlossenen Punkten von $M_-(2)$, zeigen wir, dass sie zusammenziehbar ist.

Zur expliziten Beschreibung von Quaternionenbündeln über $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ verwenden wir Syzygientheorie. Dieser Rahmen eignet sich einerseits, um Quaternionenbündel mittels freier Auflösungen zu klassifizieren, und anderseits um einige Resultate von Knus, Parimala, Sridharan [K-P-S] neu zu formulieren und zu verallgemeinern. Insbesondere geben wir eine Konstruktion zur Erweiterung eines Quaternionenbündels E vom Rang 1 von $\mathbb{A}^2$ auf $\mathbb{P}^2$ an, welche gestattet, die Chernklassen des zugehörigen Rang-2-Bündels E_c aus einer Präsentation von $E|_{\mathbb{A}^2}$ zu berechnen. Für Quaternionenbündel E vom Rang 1, die einen speziellen Typ von freien Auflösungen besitzen, kann die Kurve aller Sprunggeraden von E_c im dualen projektiven Raum durch elementare lineare Algebra bestimmt und für Beispiele mit Kurven vom Grad 2 und 4 auch explizit berechnet werden.