

# **Interaction of Fermions with Monopole Excitations and the 1+1 Dimensional Anomaly**

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH  
for the degree of  
Doctor of Natural Sciences

presented by  
KARL ISLER  
Dipl. Phys. ETH  
born February 5, 1959  
citizen of Richterswil (ZH)

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. C. Schmid, examiner  
Prof. Dr. K. Hepp, co-examiner



ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1988

## ABSTRACT

The interaction of fermions with grand unification (GUT) monopoles could provide important clues to the physics at the unification scale  $M$ . The ability of such monopoles to catalyze proton decay with strong interaction rates, i.e. the Rubakov-Callan effect, is one of the main topics of this thesis. This effect originates in the peculiar properties of the  $J = 0$  partial wave of charged fermions in the monopole background, which lead to a necessary interaction of the fermion with the non-abelian gauge fields of the core.

Rubakov and Callan made the important assumption, that core excitations of the monopole are not important. In a first part of this thesis, we will consider a prototype model in more detail. We reduce the  $SU(2)$  theory with isospin doublet fermions to the  $J = 0$  sector. This results in an effective 1+1 dimensional  $U(1)$  model on the half line. We include all the previously neglected core excitations in this reduction. Fluctuations around the 't Hooft-Polyakov monopole solution are then quantized using the method of collective coordinates. We give a careful treatment of the separation between the heavy modes with mass of the order  $M$  and the zero mode, which leads to the charged dyonic excitations. The semiclassical expansion is carried out in both the Coulomb and the  $A_0 = 0$  gauge. We clarify some issues concerning the parametrization of the zero mode in the second gauge, taking into account the quantization condition for the dyonic electric charge following from the periodic nature of the collective coordinate. The equations of motion for matrix elements of the Heisenberg operators in a state corresponding to an incoming fermion are solved to first order in  $e^2$  and in the fermionic energy  $E_f/M$ . This yields an effective boundary condition, outside the core, depending only on the collective coordinate. The continuity equation and the anomaly equation give via  $j_5^\mu = 2\epsilon^{\mu\nu} j_\nu$ , a wave equation outside the core, which is supplemented by the boundary condition representing the integrated core dynamics. We derive the anomaly equation for the  $J = 0$  model with the path integral method of Fujikawa. The physics of low energy fermions is summarized in an effective theory of fermions interacting with one quantum mechanical degree of freedom of the monopole. We give a short review of the status of the detection of nucleon decay and monopoles.

In a second part of this thesis, only loosely connected to the Rubakov-Callan effect, we study the chiral anomaly of massless fermions interacting with an external gauge field in 1+1 dimensional spacetime. We consider both the abelian and non-abelian case. We show that, contrary to common belief, the computation of the chiral anomaly involves no infinities and no ambiguities. We use the Hamiltonian formalism. We show that the Dyson T-product is not afflicted by infinities, though not Lorentz covariant. The final Green function is however completed by a covariantizing term arising from the use of the physically correct normal ordering prescription. We normal order with respect to a state in which all one-particle modes with negative kinetic energy are filled. For fermions in an external gauge field the relevant energy is the kinetic energy, since its eigenvalues are gauge invariant and correspond directly to the measured energy. The free operators usually

used in the interaction picture are normal ordered with respect to the Hamiltonian of the free theory, which has no direct physical meaning for fermions in the external gauge field. The difference between the two normal orderings for bilinears is a c-number. The physical current—defined by kinetic normal ordering—is Lorentz and gauge covariant for both Weyl and Dirac fermions. It is not conserved in the former case. This is because the covariantizing seagull induced by kinetic normal ordering is not Bose symmetric. The fermionic current satisfies the covariant anomaly equation. In the chiral case, the physical current can therefore not be defined via functional derivatives. This follows from the non-symmetric nature of the seagull already in the abelian case, where the Wess-Zumino consistency condition is satisfied by the covariant anomaly. We compute the vacuum functional  $\langle 0_{\text{out}} | 0_{\text{in}} \rangle$ , taking into account the c-number phase induced by kinetic normal ordering of the Hamiltonian. This phase does not restore the Lorentz and gauge invariance of the vacuum functional for Weyl fermions. For the external field problem this is irrelevant, since this defect resides in a c-number phase of the  $S$ -operator, which drops out of expectation values.

For Dirac fermions on the other hand, kinetic normal ordering of the Hamiltonian provides a seagull, such that the physical current can alternatively be defined via functional derivatives.

## KURZFASSUNG

Die Wechselwirkung von Fermionen mit Grand Unification (GUT) Monopolen könnte wichtige Hinweise über die Physik bei der Vereinheitlichungsskala  $M$  liefern. Die Fähigkeit von solchen Monopolen, Protonenzerfall mit Raten vergleichbar mit der starken Wechselwirkung zu katalysieren, d.h. der Rubakov-Callan Effekt, ist eines der zentralen Themen dieser Dissertation. Dieser Effekt hat seinen Ursprung in den speziellen Eigenschaften der  $J = 0$  Partialwelle geladener Fermionen im äusseren Monopolfeld. Diese führen zur Wechselwirkung des Fermions mit den nichtabelschen Eichfeldern des Kerns.

Rubakov und Callan machten die wichtige Annahme, dass Anregungen des Monopolkerns unwichtig sind. In einem ersten Teil dieser Dissertation studieren wir ein Prototypmodell detaillierter. Wir reduzieren die  $SU(2)$  Theorie mit isospindublett Fermionen auf den  $J = 0$  Sektor. Dies ergibt eine effektive 1+1 dimensionale Theorie auf der Halblinie. Wir schliessen alle bis anhin vernachlässigten Kernfluktuationen mit ein. Diese Fluktuationen der 't Hooft-Polyakov Monopol-Lösung werden mit der Methode der kollektiven Koordinaten quantisiert. Wir behandeln insbesondere die Separation der schweren Moden mit einer Masse der Grössenordnung  $M$  vom Nullmodus, welcher zu geladenen Dyonanregungen führt. Diese semiklassische Entwicklung wird in der Coulomb und in der  $A_0 = 0$  Eichung ausgeführt. Wir klarifizieren einige Punkte in der Parametrisation des Nullmodus in der letzteren Eichung, indem wir die Quantisierung der elektrischen Dyonladung berücksichtigen, die aus der Periodizität der kollektiven Koordinate folgt. Die Bewegungsgleichungen der Operatoren im Heisenbergbild in einem Zustand, der einem einlaufenden Fermion entspricht, werden in erster Ordnung in  $e^2$  und in der Fermionenergie  $E_f/M$  gelöst. Dies ergibt eine effektive Randbedingung ausserhalb des Kerns, welche nur von der kollektiven Koordinate abhängt. Die Kontinuitätsgleichung und die Anomaliegleichung führen via  $j_5^\mu = 2e^{\mu\nu} j_\nu$  auf eine Wellengleichung ausserhalb des Kernes mit der effektiven Randbedingung am Kernrand, welche die integrierte Kerndynamik repräsentiert. Die Anomaliegleichung der  $J = 0$  Theorie leiten wir mit der Pfadintegral-Methode von Fujikawa her. Die Physik der Niederenergie-Fermionen wird in einer effektiven Theorie zusammengefasst, in welcher die Fermionen nur mit einem einzigen quantenmechanischen Freiheitsgrad des Monopols wechselwirken. Wir fassen die experimentelle Situation der Baryon-Zerfall und Monopol Detektion kurz zusammen.

In einem zweiten Teil dieser Dissertation, welcher nur lose mit dem Rubakov-Callan Effekt zusammenhängt, studieren wir die chirale Anomalie masseloser Fermionen, die mit einem äusseren Eichfeld in 1+1 Dimensionen wechselwirken. Wir betrachten sowohl den abelschen als auch den nichtabelschen Fall. Wir zeigen, dass im Gegensatz zur gängigen Meinung, die Anomalie nicht auf Unendlichkeiten beruht und deshalb keine Ambiguitäten enthält. Dabei wird der Hamilton'sche Formalismus verwendet. Wir zeigen, dass das zeitgeordnete Dyson T-Produkt, welches zwar nicht lorentzkovariant ist, nicht mit Divergenzen behaftet ist. Die relevante Greensfunktion wird aber durch einen kovariantisierenden Term ergänzt, welcher aus der physikalisch korrekten Normalordnungsvorschrift stammt. Wir

führen die Normalordnung bezüglich eines Zustandes ein, in dem alle Einteilchenmoden mit negativer kinetischer Energie gefüllt sind. Die relevante Energie eines Teilchens im äusseren Eichfeld ist die kinetische Energie, da ihre Eigenwerte eichinvariant sind und daher direkt der messbaren Energie entsprechen. Die freien Operatoren, welche man gewöhnlich im Wechselwirkungsbild braucht, sind bezüglich des freien Hamiltonoperators normalgeordnet. Dieser hat aber keine direkte Bedeutung für Teilchen im externen Feld. Die Differenz zwischen den beiden Normalordnungen für bilineare Operatoren ist eine  $c$ -Zahl. Der physikalische Strom—definiert durch kinetische Normalordnung—ist lorentz- und eichkovariant, sowohl für Dirac- als auch für Weyl-Fermionen. Trotzdem ist er nicht erhalten im letzteren Fall. Dies rührt daher, dass der durch kinetische Normalordnung induzierte Seagullterm nicht bosesymmetrisch ist. Der Fermionstrom erfüllt die kovariante Anomaliegleichung. Er kann daher nicht via funktionale Ableitungen definiert werden. Wegen der Asymmetrie des Seagulls folgt dies schon für die abelsche Theorie, obgleich dort die Wess-Zumino Konsistenzbedingung erfüllt ist. Wir berechnen das Vakuumfunktional  $\langle 0_{out}|0_{in} \rangle$  und berücksichtigen dabei speziell die  $c$ -Zahl Phase, die durch kinetische Normalordnung des Hamiltonoperators induziert wird. Die Lorentz- und Eichinvarianz des Vakuumfunktionals für Weyl-Fermionen wird durch diese  $c$ -Zahl Phase nicht restauriert. Dies ist aber irrelevant für das externe Feldproblem, da dieser Defekt nur in einer Phase des  $S$ -Operators sitzt und  $c$ -Zahl Phasen aus Erwartungswerten herausfallen.

Für Dirac-Fermionen andererseits folgt aus der kinetischen Normalordnung des Hamiltonoperators ein Seagull, sodass der physikalische Strom in äquivalenter Weise auch via funktionale Ableitung definiert werden kann.