Symbolische Lösungen und Term-Erzeugungssysteme in der projektiven und affinen Geometrie

Author(s):
Schmid, Fritz

Publication Date:
1988

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000507834 →

Diss.ETH Nr.8728

Symbolische Lösungen und Term-Erzeugungssysteme in der projektiven und affinen Geometrie

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels
Doktor der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von
FRITZ SCHMID
dipl. Math. ETH
geboren am 26. Februar 1957
von Emmen (LU) und Wölflinswil (AG)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. Engeler, Referent
Prof. Dr. H. Läuchli, Korreferent

Zürich 1988

Abstract

Formal approaches to the solvability problem of elementary geometry have traditionally relied on the introduction of a coordinate field. Thereby the formulas in a geometric language are translated into polynomial equations.

Our approach proposes to stay within a formal geometric language and to develop a Galois-theory therein: algorithms which operate directly on the formulas of the geometric language, decide their solvability and determine the necessary operations for the representation of the solutions.

Most of the projective languages use two entities: points and lines. In order to simplify the formalism, we first develop languages and axiomatisations of the plane projective and affine geometry, which use only one entity: points.

In classical Galois-theory the normal form $a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + \ldots + a_1.x + a_0 = 0$ and the degree n are known for prime formulas of the field theory. By a conditional term rewriting system we get one reduction relation and the prenormal form for terms. Path-reduction is given as a second reduction relation. The combination of both relations yields a normal form and degree for terms and prime formulas of the plane projective geometry.

Finally the solution set of a prime formula in normal form with fixed degree is examined. Here we use the representation of Steiner for plane algebraic curves. The representation of the solution sets and especially the determination of the necessary operations becomes rapidly more difficult with increasing degree.

Zusammenfassung

Herkömmliche, formale Ansätze für das Lösbarkeitsproblem der elementaren Geometrie basieren auf der Einführung eines Koordinaten-Körpers. Formeln in einer geometrischen Sprache werden dabei übersetzt in polynomiale Gleichungen.

Wir schlagen in unserem Ansatz vor, in der geometrischen Sprache zu bleiben und darin eine Galois-Theorie zu entwickeln: Algorithmen, die direkt auf den Formeln der geometrischen Sprache ihre Lösbarkeit entscheiden und die erforderlichen Konstruktionsmittel bestimmen für die Darstellung der Lösungen.

Die meisten projektiven Sprachen benützen zwei Entitäten: Punkte und Geraden. Um den Formalismus zu vereinfachen, entwickeln wir zuerst Sprachen und Axiomatisierungen für die ebene, projektive und affine Geometrie, die nur eine Entität (Punkte) benutzen.
In der klassischen Galois-Theorie sind die Normalform $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ und der Grad n bekannt für Primformeln der Körpertheorie. Durch ein bedingtes Term-Erzeugungssystem erhalten wir eine erste Reduktionsrelation und die Pränormalform für Terme. Die Pfad-Reduktion ist als zweite Reduktionsrelation gegeben. Die Verbindung dieser beiden liefert Normalform und Grad für Terme und Primformeln der ebenen, projektiven Geometrie.
Als letztes werden die Lösungsmengen von Primformeln in Normalform von festem Grad untersucht. Wir benützen hier die Darstellung von Steiner für ebene, algebraischen Kurven. Die Darstellung der Lösungsmengen und vor allem die Bestimmung der benötigten Operationen wird jedoch schnell schwieriger mit wachsendem Grad.