Diss. ETH Nr. 9214

Anwendung schneller Algorithmen auf gemischte Potentialprobleme der Mechanik

Abhandlung zur Erlangung des Titels
Doktor der Technischen Wissenschaften
der
Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

vorgelegt von
Roland Peter Haas
Dipl. Masch. Ing. ETH
geboren am 29.1.1957

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. Hans Brauchli, Referent
PD Dr. Martin H. Gutknecht, Korreferent

1990

Abstract

The present thesis proposes a new fast algorithm for plane potential problems on simply connected domains with mixed boundary conditions — Dirichlet and von Neumann conditions are given on complementary parts of the boundary.

The method combines three existing numerical procedures. Firstly, a *conformal map* transforms the potential problem onto the unit disc. The mapping function is constructed by a Schwarz–Christoffel transform followed by a modified Theodorsen iteration. Secondly, the transformed problem is reformulated as a *Riemann–Hilbert–Problem* (RHP), whose complex solution can be stated in terms of Cauchy integrals. Thus, the method is basically a boundary integral method. Cauchy integrals on the unit circle can be computed very efficiently applying fast Fourier transforms (FFT) as long as the Cauchy integrals operate on smooth functions. This is not the case here, as transition points of the boundary conditions and corners of the physical domain induce singularities in the integrand. Therefore, thirdly, these singularities have to be *extracted* analytically by known functions. The remaining function can then be treated by FFT techniques.

The thesis is divided into two main parts. The first part (chapters 1 – 6) gives an outline and an overview of the whole method in a top down approach. The second part (chapters 7 – 11) gives a detailed presentation of the method.

The first chapter presents the problem to be solved and describes the three key points of the method. Each of them is por-

trayed in one of the following chapters: the construction of the conformal maps is discussed in chapter 2, the derivation of the corresponding RHPs in chapter 3 and the combination of numerical and analytical integration of the Cauchy integrals in chapter 4. Chapter 5 gives an overview of the resulting algorithm with its implementation, shows some numerical results and compares the method with the Finite Element and the Boundary Element Methods. A discussion in chapter 6 of various extensions concludes part 1. Particular attention is paid to problems of plane elastostatics and Kirchhoff plates

The second, more formal part starts with chapter 7, giving the mathematical fundamentals of Cauchy integrals. They serve as a basis for the whole method. In particular, their numerical and analytical integration as well as their connection to power series is shown. In this and the following chapters, many details not mentioned in the first part are discussed. Therefore, the conformal mapping (chapter 8), the solution of RHPs (chapter 9) and the extraction of singularities (chapter 10) are treated again in a detailed manner. The final chapter 11 summarizes the resulting algorithm with some additional details.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit schlägt ein neuartiges Lösungsverfahren für ebene Potentialprobleme mit gemischten Randbedingungen vor: auf einigen Teilen des Randes sind die Werte vorgeschrieben (Dirichlet-Bedingungen), auf dem Rest die Normalableitungen (von Neumann-Bedingungen). Das Ziel ist ein sowohl effizienter als auch genauer Algorithmus.

Die resultierende Methode verknüpft drei bestehende, bekannte numerische Verfahren. Eine *konforme Abbildung* verpflanzt erst das ganze Potentialproblem auf den Einheitskreis. Zur Berechnung dieser Abbildung werden zwei bereits existierende Algorithmen kombiniert: eine Schwarz-Christoffel-Transformation und eine modifizierte Theodorsen-Iteration. Auf dem Einheitskreis wird ein zum ursprünglichen Problem äquivalentes *Riemann-Hilbert-Problem* (RHP) formuliert, dessen komplexe Lösung im wesentlichen in der Auswertung von Cauchy-Integralen besteht. Es handelt sich daher eigentlich um eine Randintegralmethode. Cauchy-Integrale lassen sich auf dem Einheitskreis äusserst effizient mit der schnellen Fouriertransformation (FFT) auswerten, vorausgesetzt, die Cauchy-Integrale werden auf genügend glatte Funktionen angewendet. Dies ist hier jedoch nicht der Fall. Übergangspunkte der Randbedingungen und Ecken des physikalischen Gebietes induzieren Singularitäten. Um diese zu glätten, werden solche *Funktionen extrahiert*, die analytisch behandelt werden können. Die geglättete Restfunktion kann dann mit der FFT integriert werden.

Die Arbeit ist grundsätzlich in zwei Teile gegliedert. Während der erste Teil (Kapitel 1 – 6) das ganze Verfahren im Überblick darstellt, «top down» sozusagen, folgt der zweite Teil (Kapitel 7 – 11) eher dem klassisch formalen, aufbauenden Weg.

Das erste Kapitel stellt das Problem vor und schildert die drei Schlüsselideen, die der Lösungsmethode zugrunde liegen. Die nächsten Kapitel beschreiben je einen dieser Teile genauer: die Konstruktion der konformen Abbildung wird im Kapitel 2 beschrieben, die Herleitung der Lösung des äquivalenten RHPs im Kapitel 3 und die Kombination der analytischen und der numerischen Integration der Cauchy–Integrale im Kapitel 4. Einen Überblick über den resultierenden Algorithmus und dessen Implementation, numerische Resultate und Vergleiche mit anderen Verfahren liefert Kapitel 5. Kapitel 6 beschliesst den ersten Teil mit einem Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten, unter anderem auf Probleme der ebenen Elastostatik und Plattenprobleme.

Der zweite formalere Teil beginnt im Kapitel 7 mit dem mathematischen Fundament der ganzen Methode, den Eigenschaften der Cauchy–Integrale. Insbesondere wird die analytische und numerische Integration, sowie der Zusammenhang mit Potenzreihen besprochen. Dieses und alle folgenden Kapitel sind formal strikter als die früheren gehalten, bergen daher viele Details, die im ersten Teil nicht explizit erwähnt werden. So wird die konforme Abbildung (Kapitel 8), die Lösung des RHP (Kapitel 9) und die Extraktion von Singularitäten (Kapitel 10) nochmals detailliert behandelt. Das abschliessende Kapitel 11 fasst das gesamte Lösungsverfahren unter Ergänzung einiger zusätzlicher Details zusammen .