

Diss. ETH Nr. 9214

# **Anwendung schneller Algorithmen auf gemischte Potentialprobleme der Mechanik**

Abhandlung zur Erlangung des Titels  
Doktor der Technischen Wissenschaften  
der  
Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

vorgelegt von  
Roland Peter Haas  
Dipl. Masch. Ing. ETH  
geboren am 29.1.1957



Angenommen auf Antrag von  
Prof. Dr. Hans Brauchli, Referent  
PD Dr. Martin H. Gutknecht, Korreferent

1990

## Dank

---

Diese Arbeit wäre wohl nie entstanden, wäre ich ganz alleine auf mich angewiesen gewesen. In fachlicher Hinsicht möchte ich zuallererst meinem Referenten und meinem Korreferenten danken.

Prof. Dr. H. Brauchli, mein Doktorvater, wurde mit der Zeit viel mehr als ein Lehrer. Seine unübliche Denkensart, seine unorthodoxen Ideen und sein scheinbar unerschöpflicher Vorrat an immer wieder neuen Lösungsvorschlägen haben mir oft weitergeholfen und mein Denken inspiriert. Besonders aber sein Vertrauen in mich, seine Freundschaft und sein persönlicher Beistand auch in schwierigen Zeiten, haben mich immer wieder zum Weiterarbeiten motivieren können.

PD Dr. M. H. Gutknecht, der freundlicherweise das Korreferat übernahm, lernte ich zuerst durch seine Publikationen über konforme Abbildungen kennen. Immer, wenn ich ihn später auch persönlich traf, war er bereit, mich anzuhören, sei es in konzeptionellen, sei es in fachlichen Fragen. Die Implementation der konformen Abbildung stammt zum grossen Teil von ihm. Ausserdem war er es, der mir den Anstoss gab, mich einmal mit Riemann-Hilbert-Problemen auseinanderzusetzen, was letztlich zum Lösungsansatz führte. Durch ihn durfte ich auch Prof. N. L. Trefethen kennenlernen, dessen Programme und Publikationen über die konformen Abbildungen wesentlich in diese Arbeit eingeflossen sind.

Meinen Kollegen M. Sofer möchte ich speziell erwähnen, war er doch jederzeit (Tag und Nacht) bereit, meine vorwiegend mathematischen Probleme entwirren zu helfen. Viele Details und Tricks habe ich ihm zu verdanken.

«Eine Dissertation ist aus 99 Büchern ein hundertstes schreiben», dies trifft wahrscheinlich auch auf diese Arbeit zu. Eines dieser 99 Bücher möchte ich jedoch nicht unerwähnt lassen. Ohne Prof. P. Henricis dreibändiges Werk, *Applied and Computational Complex Analysis*, wüsste ich nicht, wie ich in so kurzer Zeit einen so fundierten Einstieg in für mich neue Gebiete der komplexen Analysis gefunden hätte.

Eine Dissertation entsteht nicht nur im Büro, während der «Geschäftszeit» sozusagen, wenigstens nicht meine. Da hatte ich doch Einfälle im Traum, am Morgen, am Abend, mitten in den unmöglichsten Situationen. All dies hat meine Frau, Manja, geduldig und verständnisvoll ertragen, wofür ich ihr ganz herzlich danken möchte.

Ein letzter, besonders grosser Dank, geht an alle Kolleginnen und Kollegen des Institutes für Mechanik. Ohne diese positive Atmosphäre, ohne dieses kollegiale Getragensein, auch in schweren Zeiten, wäre mir die Lust am Forschen, Grübeln und Promovieren schon längst vergangen. Aber immer, wenn mich etwas drückte, fand ich ein offenes Ohr, ein paar aufmunternde Worte, eine Ausstrahlung, die signalisierte: «Ich verstehe dich».

Roland Maas

# Inhaltsverzeichnis

---

Abstract .....	1
Zusammenfassung .....	3
<b>Teil 1: Problemstellung und Lösungsmethode — eine Übersicht</b>	
1	<b>Problemstellung und Überblick über die Lösung ..... 7</b> <i>Ebenes Potentialproblem mit gemischten Randbedingungen • Lösungsansatz: Riemann–Hilbert–Problem auf dem Einheitskreis • Erweiterung auf allgemeinere Gebiete durch konforme Abbildung • Hohe Genauigkeit durch analytische Extraktion von Singularitäten</i>
2	<b>Zur Konstruktion der konformen Abbildung ..... 15</b> <i>Zweck und Begründung • Zur Wahl des Abbildungsalgorithmus • Schwarz–Christoffel–Abbildung • Theodorsen–Abbildung</i>
3	<b>Zur Herleitung eines äquivalenten Riemann–Hilbert–Problems und dessen Lösung ..... 23</b> <i>Äquivalente Formulierungen • Riemann–Hilbert–Problem • Koppelungsproblem • Lösungsaufbau • Kanonische Lösung • Partikuläre Lösungen • Zusatzbedingungen erfüllen • Die Lösung</i>

4	Zur Auswertung der Lösung .....33
	<i>Das numerische Problem: Auswertung von Cauchy-Integralen auf dem Einheitskreis unter Berücksichtigung von Singularitäten • Analytische Extraktion der Singularitäten • Numerisch effiziente Integration der Restfunktion • Resultierendes Lösungsverfahren</i>
5	Numerische Beispiele und Vergleiche.....43
	<i>Implementationskonzept • Die 10 Software-Module • Ein illustratives Beispiel • Genauigkeit und Aufwand der Methode • Abgrenzung zu Finite- und Randelementmethode</i>
6	Ausblick .....71
	<i>Nochmals: die Schlüsselpunkte der Methode • Prinzipielle Erweiterungsmöglichkeiten und Grenzen • Schnelle Poissonlöser • Probleme des Bipotentialoperators • Ebene Elastostatik • Kirchhoffsche Platten</i>

**Teil2: Detailaspekte**

7	Über Cauchy-Integrale.....91
7.1	Cauchy-Integrale über geschlossener Kurve .....92
	a) <i>Definition der Cauchy-Integrale</i> ..... 92
	b) <i>Hauptwert und Hölderbedingung</i> ..... 93
	c) <i>Innerer und äusserer Grenzwert, Sokhotskyi-Formeln</i> ..... 94
7.2	Cauchy-Integrale auf dem Einheitskreis .....97
	a) <i>Schwarzsche Formeln</i> ..... 97
	b) <i>Kontinuierliche Hilbert-Transformation (Konjugation)</i> ..... 99
	c) <i>Cauchy-Integrale und Potenzreihen</i> ..... 100
	d) <i>Diskrete Konjugation am Einheitskreis</i> ..... 103

8	Konforme Abbildung .....	105
8.1	Schwarz–Christoffel–Abbildung .....	106
	a) Schwarz–Christoffel–Formel.....	106
	b) Zur Lösung des Parameterproblems .....	106
	c) Auswertung der Schwarz–Christoffel– Abbildung .....	108
	d) Entwicklung der Ränderzuordnung in Ecknähe .....	109
8.2	Theodorsen–Abbildung .....	114
	a) Gleichung von Theodorsen.....	114
	b) Modifizierte Theodorsen–Iteration .....	115
	c) Auswertung der Theodorsen–Abbildung.....	117
	d) Entwicklung der Ränderzuordnung .....	119
8.3	Gesamtabbildung .....	120
	a) Auswertung der Abbildung .....	120
	b) Entwicklung der Ränderzuordnung um glatte Punkte .....	121
	c) Entwicklung der Ränderzuordnung in Ecknähe .....	121
9	Riemann–Hilbert–Problem.....	123
9.1	Äquivalente Problemstellungen .....	124
	a) Gemischtes Randwertproblem .....	124
	b) Äquivalentes Riemann–Hilbert–Problem .....	124
	c) Zugehöriges Koppelungsproblem .....	125
9.2	Herleitung der Lösung .....	127
	a) Kanonische Lösung .....	127
	b) Partikuläre Lösung des Koppelungsproblems... 130	
	c) Symmetriebedingung erfüllen .....	131
	d) Analytizität im Gebiet erfüllen.....	132
	e) Eindeutigkeit und explizite Form der Lösung.... 133	
	f) Verallgemeinerung und Zusammenfassung der Lösung .....	134

10	Analytische Extraktion der Singularitäten.....	137
10.1	Analyse der zu extrahierenden Singularitäten .....	138
	a) Typisierung der auftretenden Singularitäten ....	138
	b) Die «richtigen» Zweige — eine Konvention .....	139
	c) Neuformulierung der singulären Funktionen ....	141
	d) Lokale Entwicklung um die Singularitäten .....	144
10.2	Konstruktion der Extraktionsfunktionen.....	150
	a) Ansatz .....	150
	b) Extraktionskoeffizienten bei Übergängen .....	152
	c) Extraktionskoeffizienten bei Sprüngen .....	153
	d) Extraktionskoeffizienten bei Ecken .....	154
	e) Extraktionskoeffizienten bei Eckübergängen ....	155
	f) Extraktionskoeffizienten bei Sprüngen an Ecken .....	157
	g) Resultierende Extraktionsfunktion.....	158
11	Resultierendes Lösungsverfahren .....	159
11.1	Lösungsparameter bestimmen .....	160
	a) Konforme Abbildung.....	160
	b) Integrationskonstanten, Extraktions- und Fourierkoeffizienten .....	161
11.2	Lösung und Gradient auswerten.....	164
	a) Auf äquidistanten Punkten auf Kreisen .....	164
	b) Auf Einzelpunkten.....	165
	c) Auf kritischen Randpunkten .....	165

## Anhänge

A	Grafische Zusammenfassung.....	173
B	Zusammenfassung des Algorithmus .....	175
C	Tabelle der Figuren.....	181
D	Referenzen.....	185
E	Lebenslauf.....	189

## Abstract

---

The present thesis proposes a new fast algorithm for plane potential problems on simply connected domains with mixed boundary conditions — Dirichlet and von Neumann conditions are given on complementary parts of the boundary.

The method combines three existing numerical procedures. Firstly, a *conformal map* transforms the potential problem onto the unit disc. The mapping function is constructed by a Schwarz-Christoffel transform followed by a modified Theodorsen iteration. Secondly, the transformed problem is reformulated as a *Riemann-Hilbert-Problem* (RHP), whose complex solution can be stated in terms of Cauchy integrals. Thus, the method is basically a boundary integral method. Cauchy integrals on the unit circle can be computed very efficiently applying fast Fourier transforms (FFT) as long as the Cauchy integrals operate on smooth functions. This is not the case here, as transition points of the boundary conditions and corners of the physical domain induce singularities in the integrand. Therefore, thirdly, these singularities have to be *extracted* analytically by known functions. The remaining function can then be treated by FFT techniques.

The thesis is divided into two main parts. The first part (chapters 1 – 6) gives an outline and an overview of the whole method in a top down approach. The second part (chapters 7 – 11) gives a detailed presentation of the method.

The first chapter presents the problem to be solved and describes the three key points of the method. Each of them is por-



## 2 Abstract

trayed in one of the following chapters: the construction of the conformal maps is discussed in chapter 2, the derivation of the corresponding RHPs in chapter 3 and the combination of numerical and analytical integration of the Cauchy integrals in chapter 4. Chapter 5 gives an overview of the resulting algorithm with its implementation, shows some numerical results and compares the method with the Finite Element and the Boundary Element Methods. A discussion in chapter 6 of various extensions concludes part 1. Particular attention is paid to problems of plane elastostatics and Kirchhoff plates

The second, more formal part starts with chapter 7, giving the mathematical fundamentals of Cauchy integrals. They serve as a basis for the whole method. In particular, their numerical and analytical integration as well as their connection to power series is shown. In this and the following chapters, many details not mentioned in the first part are discussed. Therefore, the conformal mapping (chapter 8), the solution of RHPs (chapter 9) and the extraction of singularities (chapter 10) are treated again in a detailed manner. The final chapter 11 summarizes the resulting algorithm with some additional details.

## Zusammenfassung

---

Die vorliegende Arbeit schlägt ein neuartiges Lösungsverfahren für ebene Potentialprobleme mit gemischten Randbedingungen vor: auf einigen Teilen des Randes sind die Werte vorgeschrieben (Dirichlet-Bedingungen), auf dem Rest die Normalableitungen (von Neumann-Bedingungen). Das Ziel ist ein sowohl effizienter als auch genauer Algorithmus.

Die resultierende Methode verknüpft drei bestehende, bekannte numerische Verfahren. Eine *konforme Abbildung* verpflanzt erst das ganze Potentialproblem auf den Einheitskreis. Zur Berechnung dieser Abbildung werden zwei bereits existierende Algorithmen kombiniert: eine Schwarz-Christoffel-Transformation und eine modifizierte Theodorsen-Iteration. Auf dem Einheitskreis wird ein zum ursprünglichen Problem äquivalentes *Riemann-Hilbert-Problem* (RHP) formuliert, dessen komplexe Lösung im wesentlichen in der Auswertung von Cauchy-Integralen besteht. Es handelt sich daher eigentlich um eine Randintegralmethode. Cauchy-Integrale lassen sich auf dem Einheitskreis äusserst effizient mit der schnellen Fouriertransformation (FFT) auswerten, vorausgesetzt, die Cauchy-Integrale werden auf genügend glatte Funktionen angewendet. Dies ist hier jedoch nicht der Fall. Übergangspunkte der Randbedingungen und Ecken des physikalischen Gebietes induzieren Singularitäten. Um diese zu glätten, werden solche *Funktionen extrahiert*, die analytisch behandelt werden können. Die geglättete Restfunktion kann dann mit der FFT integriert werden.

## 4 Zusammenfassung

Die Arbeit ist grundsätzlich in zwei Teile gegliedert. Während der erste Teil (Kapitel 1 – 6) das ganze Verfahren im Überblick darstellt, «top down» sozusagen, folgt der zweite Teil (Kapitel 7 – 11) eher dem klassisch formalen, aufbauenden Weg.

Das erste Kapitel stellt das Problem vor und schildert die drei Schlüsselideen, die der Lösungsmethode zugrunde liegen. Die nächsten Kapitel beschreiben je einen dieser Teile genauer: die Konstruktion der konformen Abbildung wird im Kapitel 2 beschrieben, die Herleitung der Lösung des äquivalenten RHPs im Kapitel 3 und die Kombination der analytischen und der numerischen Integration der Cauchy-Integrale im Kapitel 4. Einen Überblick über den resultierenden Algorithmus und dessen Implementation, numerische Resultate und Vergleiche mit anderen Verfahren liefert Kapitel 5. Kapitel 6 beschliesst den ersten Teil mit einem Ausblick auf weitere Anwendungsmöglichkeiten, unter anderem auf Probleme der ebenen Elastostatik und Plattenprobleme.

Der zweite formalere Teil beginnt im Kapitel 7 mit dem mathematischen Fundament der ganzen Methode, den Eigenschaften der Cauchy-Integrale. Insbesondere wird die analytische und numerische Integration, sowie der Zusammenhang mit Potenzreihen besprochen. Dieses und alle folgenden Kapitel sind formal strikter als die früheren gehalten, bergen daher viele Details, die im ersten Teil nicht explizit erwähnt werden. So wird die konforme Abbildung (Kapitel 8), die Lösung des RHP (Kapitel 9) und die Extraktion von Singularitäten (Kapitel 10) nochmals detailliert behandelt. Das abschliessende Kapitel 11 fasst das gesamte Lösungsverfahren unter Ergänzung einiger zusätzlicher Details zusammen .

## Teil 1

# **Problemstellung und Lösungsmethode — eine Übersicht**

Im Gegensatz zum zweiten Teil wird hier die vorgeschlagene Methode sozusagen «top down» beschrieben, von der Idee zum Detail also. Teil 1 soll den roten Faden zeigen. Auf Rechnungen und Herleitungen wird bewusst verzichtet. Details sind im Teil 2 und in den Referenzen zu finden. Verweise darauf sind im Text und in den Fussnoten enthalten.

Im ersten Kapitel wird das behandelte Problem vorgestellt und ein grundsätzlicher Überblick über die wesentlichsten Elemente des Lösungsverfahrens gegeben. Jedes Element wird etwas ausführlicher in den folgenden drei Kapiteln beschrieben: Zweck und Konstruktion der konformen Abbildung im Kapitel 2, die Formulierung als Lösung eines Riemann-Hilbert-Problems im Kapitel 3 und die Berechnung der Cauchy-Integrale, einerseits durch die analytische Extraktion von Singularitäten und andererseits durch die Anwendung der schnellen Fouriertransformation im Kapitel 4. Kapitel 5 beschreibt den resultierenden Algorithmus, sowie einige numerische Experimente und Vergleiche mit exakten Lösungen und anderen Verfahren. Einen Ausblick auf weitere Anwendungsgebiete der entwickelten Methode gibt Kapitel 6.

Leer - Vide - Empty

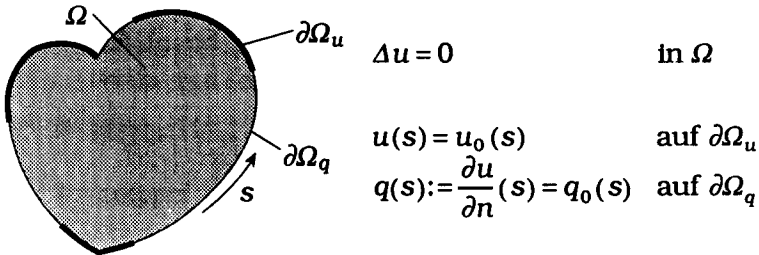
## Kapitel 1

## Die Problemstellung und ein Überblick über die vorgeschlagene Lösung

---

- **Das Problem: ebenes Potentialproblem mit gemischten Randbedingungen**
- **Bausteine der Lösung:**
  - **Ansatz: Formulierung als Lösung eines Riemann-Hilbert-Problems auf dem Einheitskreis**
  - **Konforme Abbildung: Erweiterung auf allgemeinere, einfach zusammenhängende Gebiete**
  - **Analytische Extraktion: Glätten der in den Cauchy-Integralen auftretenden Singularitäten**

Gegeben: ein ebenes Potentialproblem auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $\Omega$  mit gemischten Randbedingungen. Auf  $n$  Teilen des Randes  $\partial\Omega_u$  sind die Werte  $u_0$  vorgegeben (Dirichlet-Bedingungen), auf den übrigen  $n$  Teilen  $\partial\Omega_q$  die Normalableitungen  $q_0$  (von Neumann-Bedingungen).



Figur 1-1. Für dieses gemischte Potentialproblem stellt die vorliegende Arbeit eine schnelle und genaue Lösungsmethode vor.

Gesucht: ein möglichst effizienter und genauer Algorithmus für die Lösung dieses Problems. Eine Lösungsmethode also, die eine möglichst einfache Datenstruktur aufweist, möglichst gut vektorisierbar und parallelisierbar ist und trotzdem genaue Resultate liefert. Wünschenswert wäre daher eine möglichst vollständige Reduktion der Berechnungen auf den Rand.

Selbstverständlich existieren Lösungsmethoden für dieses Problem zuhauf: praktisch jedes umfassendere finite Differenzen-, finite Elemente- oder Randelementepaket enthält sie. Vom theoretischen Standpunkt aus handelt es sich um ein altes, bekanntes Problem<sup>1</sup>. Für beschränkte, stückweise stetige Randwerte ist eine Lösung garantiert und eindeutig. Ist die vollständige Lösung, also Wert und Normalableitung, auf dem ganzen Rand bekannt, kann die Lösung im Inneren durch einfache Auswertung von Randintegralen bestimmt werden.

Trotz alledem sind dem Autor bis heute keine sogenannten schnellen Lösungsalgorithmen bekannt. Schnelle Poisson- und Helmholtzlöser [Seewald 85] lösen zwar eine kompliziertere Differentialgleichung, funktionieren im allgemeinen jedoch nur für nicht gemischte Randbedingungen. Es scheint, dass diese *gemischten* Randbedingungen die Hauptschwierigkeiten darstellen, denn auch schnelle Laplacelöser scheitern daran [Haas 85]<sup>2</sup>.

### Elemente der Lösung

Die vorliegende Arbeit stellt eine Methode vor, die diese Klippe umschiffet und trotzdem effizient und genau bleibt. Eigentlich verquickt sie drei bestehende, wohl bekannte numerische Methoden (Fig. 1-2), nämlich

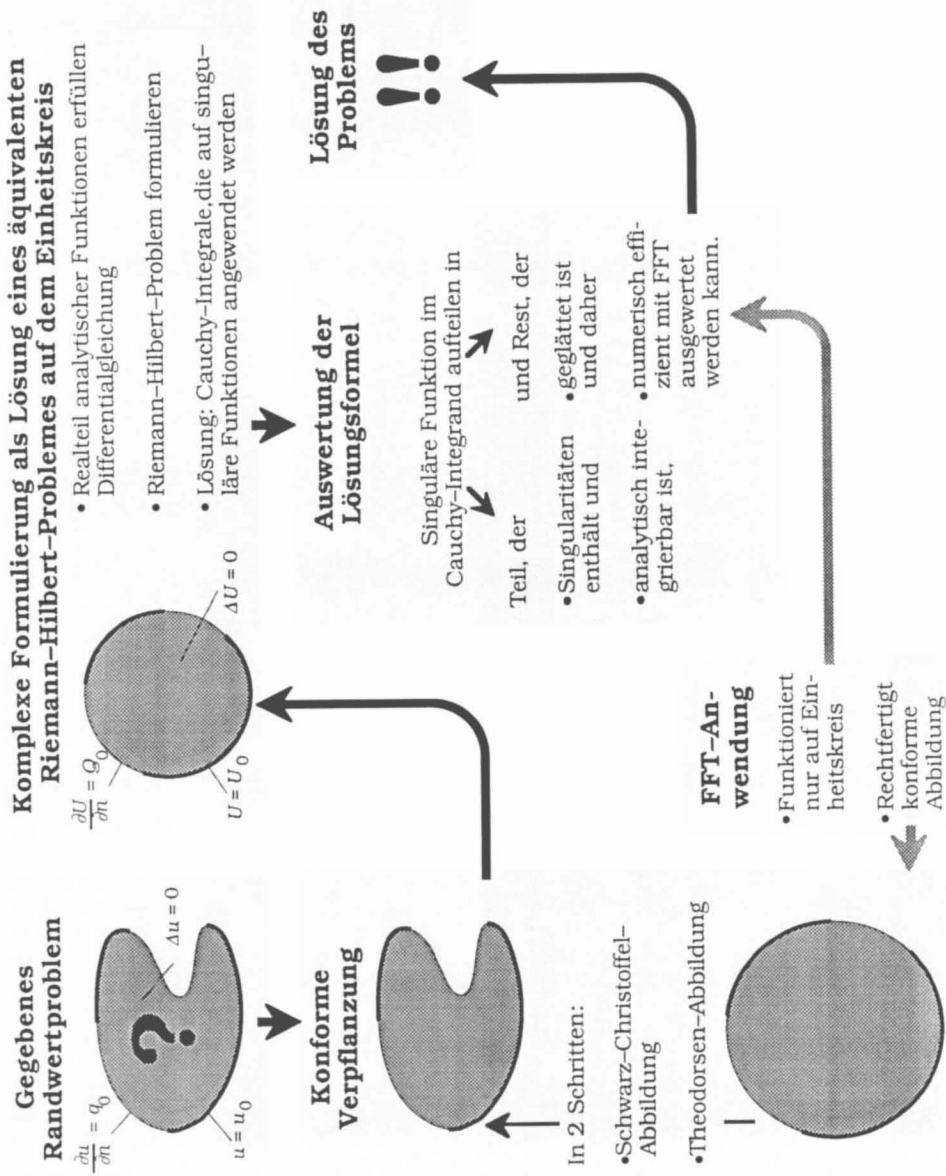
- die konforme Abbildung<sup>3</sup> von Standardgebieten (z.B. Einheitskreis) auf das gegebene Gebiet  $\Omega$ ,

---

<sup>1</sup> Beispielsweise in [Jaswon et al. 77].

<sup>2</sup> Auch die hier vorgeschlagene Methode lässt sich nicht generell auf Randbedingungen der Form  $\alpha(s)u(s)+\beta(s)q(s)=\gamma(s)$  verallgemeinern (Kapitel 6).

<sup>3</sup> Übersicht im Kapitel 2, Details im Kapitel 8.



Figur 1-2. Die wichtigsten Ingredienzen der Methode und deren hauptsächlichsten Verknüpfungen.



## 10 Eine Übersicht

- die komplexe Formulierung als Lösung eines Riemann–Hilbert–Problems<sup>1</sup> und
- die Berechnung von Cauchy–Integralen, die auf singuläre Funktionen angewendet werden, durch die Kombination von analytischer Extraktion und schneller Fouriertransformation<sup>2</sup>.

Neu an dieser Methode sind also nicht die Ingredienzen, allenfalls deren Verknüpfung, deren Zusammenspiel<sup>3</sup>.

### Riemann–Hilbert–Probleme

Der Ausgangs- und Ansatzpunkt besteht nun darin, zum gestellten Problem eine äquivalente Form zu finden und die Berechnungen auf den Rand zu beschränken. Die Werkzeuge dazu liefert die komplexe Analysis: sowohl der Real- als auch der Imaginärteil einer in  $\Omega$  analytischen Funktion

$$f(\omega) = u(\omega) + iv(\omega) \quad (1.1)$$

erfüllen die Potentialgleichung automatisch und sind somit Lösungen der gestellten Differentialgleichung. Können die Randbedingungen auf dem ganzen Rand als Linearkombination von Real- und Imaginärteil formuliert werden, handelt es sich um ein Riemann–Hilbert Problem (RHP):

$$\operatorname{Re}\left\{\overline{a(s)} f(\omega)\right\}_{\omega \in \partial\Omega} = \gamma(s). \quad (1.2)$$

Dabei heisst  $a(s)$  der Koeffizient des RHP. Er ist komplex, auf dem ganzen Rand vorgegeben und bestimmt das gegebene Verhältnis von  $u(s)$  und  $v(s)$ . Die gegebenen Randdaten sind durch  $\gamma(s)$  dargestellt. Auf den  $n$  Dirichlet–Rändern ist offenbar der Realteil gegeben, also ist dort  $a(s) = 1$ ,  $\gamma(s) = u_0(s)$ . Die von Neumann–Bedingungen auf  $\partial\Omega_q$  sind nicht so einfach anzugeben. Sie müssen unter Ausnutzung der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen

---

<sup>1</sup> Übersicht im Kapitel 3, Details im Kapitel 9.

<sup>2</sup> Übersicht im Kapitel 4, Details im Kapitel 10.

<sup>3</sup> Eine detailliertere grafische Übersicht ist im Anhang A beigefügt.

chungen auf dem Rand,  $u_{,n} = v_{,s}$  und  $u_{,s} = -v_{,n}$ , entlang  $\partial\Omega_q$  integriert werden<sup>1</sup>:

$$v(s) = \int_{\partial\Omega_q} v_{,s} ds = \int_{\partial\Omega_q} u_{,n} ds = \int_{\partial\Omega_q} q ds. \quad (1.5)$$

Diese Integration muss auf jedem der  $n$  Randteile von  $\partial\Omega_q$  durchgeführt werden. Dabei darf je eine noch zu bestimmende Integrationskonstante nicht vergessen werden. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass  $f(\omega)$  im Gebiet und auf dem Rand beschränkt bleibt, ist dieses RHP eine äquivalente Formulierung zur ursprünglichen Problemstellung.

Riemann–Hilbert–Probleme sind schon lange bekannt. Schon vor 60 Jahren hat sich N.I. Muskhelishvili mit deren Anwendungen auf verschiedene Gebiete der linearelastischen Festigkeitslehre beschäftigt [Muskhelishvili 53]. Das besondere an RHPs besteht darin, dass ihre Lösungen analytisch berechnet werden können. Sie bestehen im wesentlichen aus Cauchy–Integralen<sup>2</sup>. Cauchy–Integrale lassen sich — und das ist der Kernpunkt für die Effizienz der vorgeschlagenen Methode — numerisch mit der schnellen Fouriertransformation (FFT) auswerten<sup>3</sup> [Brigham 74]. Dies jedoch nur — und dies ist der wunde Punkt an der Geschichte — wenn zwei Bedingungen erfüllt sind:

- das Gebiet muss kreisförmig sein und
- die Cauchy–Integrale müssen auf glatten Funktionen operieren.

Beides ist im vorliegenden Fall nicht erfüllt. Einerseits sollen auch Lösungen auf allgemeineren Gebieten, insbesondere auf solchen mit Ecken, gefunden werden. Andererseits bewirken gerade

<sup>1</sup> Hier bedeuten  $_{,s}$  Ableitung in tangential- und  $_{,n}$  Ableitung in die äussere Normalenrichtung.

<sup>2</sup> Die Lösung im vorliegenden Fall existiert nur dann, wenn gewisse Nebenbedingungen erfüllt sind. Dies kann durch Anpassen der Integrationskonstanten der von Neumannbedingungen (1.5) erreicht werden.

<sup>3</sup> Kapitel 7 beschreibt einige Eigenschaften von Cauchy–Integralen.

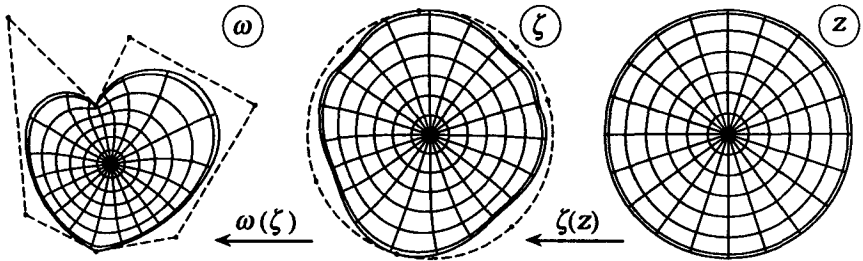
## 12 Eine Übersicht

Ecken, wie auch die Übergänge der Randbedingungen (Grenzpunkte zwischen  $\partial\Omega_u$  und  $\partial\Omega_q$ ) und Sprünge in den gegebenen Randwerten selbst Singularitäten in den entsprechenden Funktionen.

Dies dürfte auch der Grund sein, warum Mushkelishvilis Ideen und Lösungen kaum Anwendungen in den numerischen Methoden der Ingenieure gefunden haben.

Hier sollen einerseits konforme Abbildungen die Anwendung auf allgemeinere Gebiete erweitern. Die analytische Behandlung der Singularitäten durch Extraktion soll andererseits die entsprechenden Funktionen soweit glätten, dass sie numerisch genügend genau ausgewertet werden können.

### Konforme Abbildungen



Figur 1-3. Die konforme Abbildung wird in zwei Schritten bestimmt: die Schwarz-Christoffel-Transformation bildet den gestrichelten Kreis (Mitte) auf das umschriebene Polygon ab (links), die modifizierte Theodorsen-Iteration bildet den Einheitskreis (rechts) auf die Zwischenkurve (Mitte) ab.

Die numerische Berechnung von konformen Abbildungen war während langer Zeit auf ganz spezielle Gebiete beschränkt oder zeigte eine sehr schlechte Konvergenz [Koppenfels und Stallmann 59, Gaier 64]. Erst neuere Entwicklungen [Trefethen ed. 86] brachten brauchbare Algorithmen hervor. Zwei davon sind hier inkorporiert [Trefethen 80/82, Gutknecht 81/83]. Die erste Abbildung, eine Schwarz-Christoffel-Transformation, bildet den Einheitskreis auf ein Polygon ab, welches das gegebene Gebiet  $\Omega$  um-

schreibt. Damit sollen erstens alle Ecken des Gebietes eliminiert werden und zweitens eine sternförmige Zwischenkurve entstehen. Dies ist eine Voraussetzung für die zweite Abbildung, eine modifizierte Theodorsen-Transformation, welche den Kreis auf diese «glatte», sternförmige Zwischenkurve abbildet.

So kann das ursprüngliche Problem auf den Einheitskreis verpflanzt werden. Die Differentialgleichung ändert sich dabei nicht, nur die Randwerte müssen angepasst werden. Die erste Voraussetzung ist damit erfüllt: die Cauchy-Integrale können auf dem Einheitskreis berechnet werden.

### **Extraktion von Singularitäten und FFT**

Die Idee, Singularitäten analytisch zu behandeln, wird auch bei anderen Methoden angewendet [Gutknecht 86 b, Papamichael in Trefethen ed. 86, Alibadi et al. 87]. Es geht dabei darum, Funktionen zu finden, die einerseits bis zu einem gewissen Grad dieselben Singularitäten wie die entsprechenden Funktionen in den Cauchy-Integralen aufweisen, andererseits jedoch direkt, d.h. analytisch, integrierbar sind<sup>1</sup>. Ein mehrgliedriger Ansatz einer solchen Extraktionsfunktion wird durch einen Koeffizientenvergleich der lokalen Entwicklung nahe den Singularitäten gefunden. Diese Koeffizienten können explizit berechnet werden. Sie bilden numerisch keine Schwierigkeiten. So kann auch die zweite Bedingung erfüllt werden: die Restfunktion ist genügend glatt, um mit FFT behandelt zu werden<sup>2</sup>.

Die folgenden drei Kapitel besprechen je einen dieser drei Bausteine etwas genauer. Allerdings werden dabei Beweise und detaillierte Herleitungen den späteren Aspektkapiteln überlassen. Beispiele (Kapitel 5) und ein Ausblick (Kapitel 6) beschließen dann den ersten Teil.

---

<sup>1</sup> Man kann dazu eine Variante der Schwarzschen Formel benutzen (vgl. Kapitel 7.2a).

<sup>2</sup> Ein Beispiel dieser Extraktion ist in Figur 5–6 dargestellt.

Leer - Vide - Empty

## Kapitel 2

### Zur Konstruktion der konformen Abbildung

---

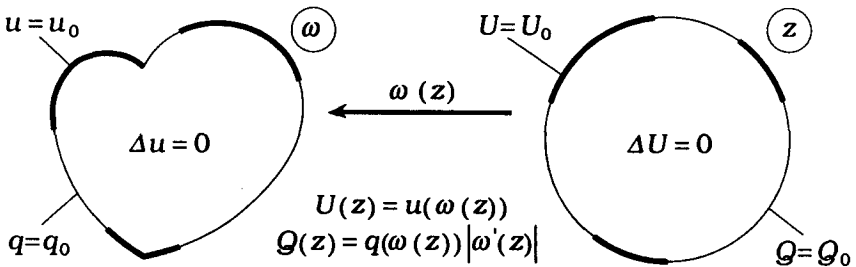
- **Die konforme Abbildung soll**
  - das gegebene Randwertproblem auf den Einheitskreis verpflanzen und
  - damit die Lösungsmethode auf allgemeinere Gebiete erweitern.
- **Kriterien zur Auswahl bestehender Algorithmen:**
  - Verfügbarkeit einer zuverlässigen Implementation
  - Genaue und effiziente numerische Methode
  - Algorithmus abgestimmt auf das Lösungsverfahren
- **1. Schritt: Schwarz-Christoffel-Abbildung (Kreis auf ein Polygon, welches das Gebiet umschreibt)**
  - Exakte Darstellung der Ecksingularitäten
  - Elimination der Ecken (Zwischenkurve in  $C^1$ )
  - Sternförmige Zwischenkurve
- **2. Schritt: Theodorsen-Abbildung (Kreis auf sternförmige, glatte Zwischenkurve)**
  - Simultane Berechnung auf äquidistanten Punkten
  - Gute Konvergenz dank Richardson-Iteration zweiter Ordnung mit optimaler Unterrelaxation
  - Effizienz durch Anwendung der FFT
- **Die wichtigsten Schritte der resultierenden Implementation**

Dieses Kapitel beschreibt grundsätzlich, wie die konforme Abbildung konstruiert wird, zählt auch die Überlegungen auf, die zur Wahl der zwei speziellen Algorithmen geführt haben. Alles wird jedoch bewusst ohne grossen Formalismus dargestellt. Wie die

Abbildungen formal aufgebaut werden, kann im Kapitel 8 nachgelesen werden.

**Zweck der konformen Abbildung**

Die konforme Abbildung dient dazu, das gestellte gemischte Potentialproblem (Fig. 1-1) auf den Einheitskreis zu verpflanzen. Im nächsten Kapitel wird für das so verpflanzte Problem ein Lösungsverfahren entwickelt, das auf der schnellen Fouriertransformation (FFT) basiert [Brigham 74]. Da die FFT auf Daten beruht, die äquidistant über den Einheitskreis verteilt sind, sollte die konforme Abbildung primär an solchen Punkten effizient berechenbar sein. Um die Singularitäten in den Cauchy-Integralen<sup>1</sup> genügend glätten zu können (Kapitel 4), muss die Abbildung zusätzlich an allen kritischen Stellen (Ecken, Übergänge der Randbedingungen und Sprungstellen der Randwerte) ebenfalls bekannt sein. Das bedeutet, dass sowohl die Vorwärts- als auch die Rückwärtsabbildung an diesen Randpunkten bestimmt werden muss.



Figur 2-1. Verpflanzung durch eine konforme Abbildung  $\omega(z)$ : Das gegebene Problem (links) wird auf den Einheitskreis (rechts) transformiert. Die entsprechenden Verpflanzungsregeln sind in der Mitte angegeben.

Warum jedoch eine konforme Abbildung? Konform heisst winkeltreu. Konforme Abbildungen  $\omega(z)$  werden durch analytische Funktionen dargestellt. Sie haben die Eigenschaft, dass harmoni-

<sup>1</sup> Cauchy-Integrale die auf singulären Funktionen operieren, entstehen bei der Formulierung der Lösung von Riemann-Hilbert-Problemen mit diskontinuierlichen Koeffizienten (vgl. Kapitel 3).

sche Funktionen harmonisch bleiben [Henrici 74]. Die zu lösende Differentialgleichung wird daher durch die Verpflanzung nicht verändert. Nur die Randbedingungen müssen transformiert werden (Fig. 2-1)

### **Wahl geeigneter Algorithmen**

Die Existenz von solchen Abbildungsfunktionen ist von Riemann [Ahlfors 53] schon längst bewiesen worden. Genaue und effiziente numerische Methoden zu deren Berechnung wurden jedoch erst in jüngerer Zeit entwickelt. Sie lassen sich grob in drei Kategorien einteilen:

- (1) Methoden, die auf einer Zusammensetzung einfacher konformer Hilfsabbildungen beruhen, wobei das Gebiet sehr allgemein sein kann. Damit können z.B. Ecken einzeln eliminiert werden. [Grassmann 79, Grassmann und Hoidn 82, Gutknecht 83]
- (2) Methoden, die Standardgebiete auf allgemeine, meist jedoch einfach oder zweifach zusammenhängende Gebiete abbilden, welche einen glatten Rand haben müssen. Oft werden dabei schnelle Algorithmen eingesetzt. [Gutknecht 81/83, Berrut 85, Trefethen ed. 86]
- (3) Methoden, die Standardgebiete auf Polygone oder Kreispolygone abbilden [Trefethen 80, Bjørstad 87, Däppen 88]

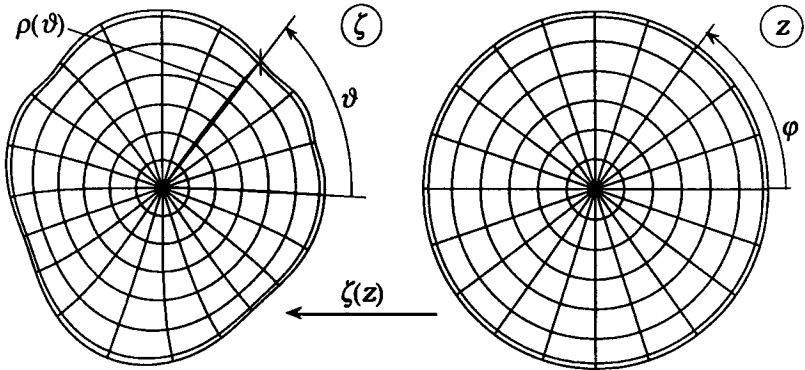
In dieser Arbeit wird in keiner Weise beabsichtigt, neue Algorithmen zur Konstruktion von konformen Abbildungen zu entwickeln. Vielmehr sollen durch Kombination bestehender Methoden möglichst allgemeine Gebiete genau und effektiv behandelt werden. Die Wahl der Algorithmen hängt dabei von drei Kriterien ab:

- es muss ein einigermaßen robuster Code vorhanden sein,
- der Algorithmus soll genau und effizient sein und
- er muss der Lösungsmethode entsprechen.



Der letzte Punkt betrifft die am Anfang des Kapitels beschriebenen Forderungen. Er bedeutet auch, dass die Singularitäten der Abbildung in Eckpunkten richtig dargestellt werden müssen<sup>1</sup>.

### Theodorsen-Abbildung



Figur 2-2. Theodorsen-Abbildung  $\zeta(z)$ : vom Einheitskreis auf eine glatte, sternförmige Kurve. Die Abbildung wird aus der Ränderzuordnungsfunktion  $\vartheta(\varphi)$  berechnet.

Die Prüfung bestehender Methoden zeigte sehr bald, dass vor allem Algorithmen der zweiten Kategorie die Auswahlkriterien gut erfüllen. Oft basieren sie auf äquidistant verteilten Stützpunkten und benutzen die FFT. Schliesslich wurde eine *modifizierte Theodorsen-Iteration* gewählt, weil erstens eine gute Implementation bereits bestand [Gutknecht 83], die zweitens auch ein ausgezeichnetes Konvergenzverhalten aufweist. Sie transformiert den Einheitskreis auf ein beliebiges Gebiet<sup>2</sup>, das

- einen glatten Rand hat und
- sternförmig<sup>3</sup> ist.

<sup>1</sup> In der Ecke selbst kann die Abbildung offensichtlich nicht winkeltreu sein, was eine Singularität in der Abbildungsfunktion zur Folge hat.

<sup>2</sup> In dieser Arbeit ist die Vorwärtsabbildung  $\omega(z)$  immer in der Richtung vom Kreis auf das gegebene Gebiet definiert.

<sup>3</sup> Eine geschlossene Kurve ist bezüglich einem Punkt P sternförmig, wenn jeder Strahl von P aus die Kurve nur einmal schneidet.

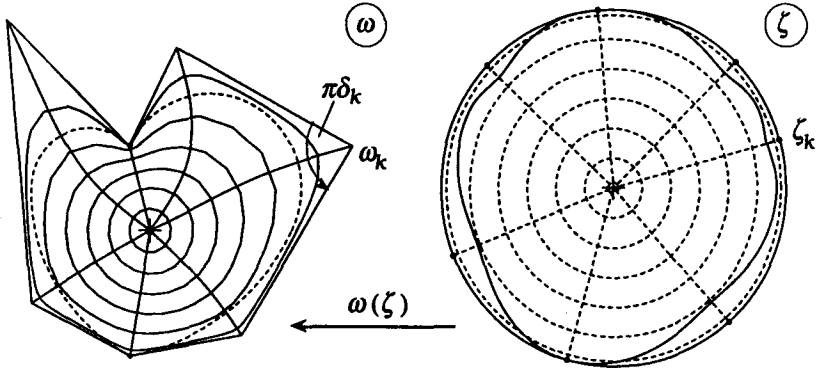
Die sternförmige Kurve muss kontinuierlich in der Form  $\rho(\vartheta)$  gegeben sein. Durch die Iteration wird die Ränderzuordnung  $\vartheta(\varphi)$  bestimmt (Fig. 2–2). Daraus<sup>1</sup> berechnet sich dann die Abbildung  $\zeta(z)$ . Die Implementation von Gutknecht beruht auf einer Richardson-Iteration zweiten Grades mit optimaler Unterrelaxation. Die Konjugation<sup>2</sup>, welche bei jedem Iterationsschritt durchgeführt werden muss, wird jeweils mit zwei FFTs berechnet. Dadurch werden simultan alle äquidistant verteilten Stützpunkte auf dem Einheitskreis behandelt. Fourierreihen tendieren zur Oszillation zwischen den Stützstellen. Der Algorithmus erlaubt, Abminderungsfaktoren [Gutknecht 86 b] zu benutzen, die diese Oszillationen stark vermindern und so zu einer besseren Approximation beitragen.

### Schwarz-Christoffel-Abbildung

Natürlich möchte man auch Gebiete mit Ecken und Hinterschneidungen behandeln können. Dafür eignet sich die Theodorsen-Abbildung jedoch nicht<sup>3</sup>. Es bleibt also die Aufgabe, von einem allgemeinen, einfach zusammenhängenden Gebiet, das aus stückweise glatten Randstücken besteht, die Ecken so zu eliminieren, dass ein Gebiet mit kreisförmigem, möglichst glattem Rand entsteht. Zur Lösung bieten sich die Algorithmen der ersten oder dritten Kategorie an. Obwohl die Methoden der ersten Gruppe (einzelne Elimination der Ecken) effizient in der Berechnung ist, kann doch eher schwer garantiert werden, dass die resultierende Kurve auch sternförmig ist<sup>4</sup>. Die bessere Wahl ist demnach eine Methode der Kategorie drei. Die *Schwarz-Christoffel-Abbildung*, welche den Einheitskreis auf ein beliebiges Polygon abbildet

- 
- 1 Detailliertere Hinweise über die Theodorsen-Abbildung sind im Kapitel 8.1 gegeben.
  - 2 Über Konjugation am Einheitskreis vgl. Kapitel 7.2b und d.
  - 3 Obwohl Ecken in der Praxis durch Theodorsen-Abbildungen mit recht guter Genauigkeit, leicht gerundet zwar, repräsentiert werden [Gutknecht 83, Berrut 85], ist dieses Verfahren nicht geeignet, da eine korrekte Darstellung der Eckabbildung nicht möglich ist.
  - 4 Zusätzlich dürfte es aufwendig sein, die lokale Entwicklung der so zusammengesetzten Gesamtabbildung anzugeben, was jedoch eine Voraussetzung für die Extraktion von Singularitäten ist (vgl. Kapitel 10).

[Trefethen 80], eliminiert alle Ecken des Gebietes miteinander. Die dabei in der Abbildung entstehenden Ecksingularitäten werden richtig wiedergegeben.



Figur 2-3. Die Schwarz-Christoffel-Abbildung  $\omega(\zeta)$  transformiert den Kreis (rechts) auf ein Polygon (links). Das numerische Problem besteht dabei in der Bestimmung der Urbilder  $\zeta_k$  aus den gegebenen Polygonecken  $\omega_k$ . Wenn dem gegebenen Gebiet (links, gestrichelt) ein Polygon so umschrieben werden kann, dass alle Ecken eliminiert werden und eine sternförmige Zwischenkurve (rechts, ausgezogen) resultiert, kann eine Theodorsen-Abbildung nachgeschaltet werden (Fig. 2-2).

Ist das gegebene Gebiet kein Polygon, muss ihm eines so umschrieben werden, dass

- jede Gebietsecke auf einer Polygonecke liegt, wobei anliegende Polygonseiten den Tangenten an die Kurven in der Ecke entsprechen müssen, und
- es den Gebietsrand mit möglichst wenigen Ecken gut nachvollzieht<sup>1</sup>.

Die erste Bedingung schränkt die Gebietsklasse etwas ein (Fig. 2-4). Spezielle, einfache Vorabbildungen würden diesen Ma-

<sup>1</sup> Die Eckelimination stimmt wegen deren Approximation durch Geraden nur bis zu einem gewissen Grad. Die Zwischenkurve liegt daher in  $C^1$ .

kel ausmerzen, implementiert sind sie jedoch nicht. Die zweite Bedingung bewirkt (hoffentlich) die Sternförmigkeit der Zwischenkurve (vgl. Fig. 2-2).



Figur 2-4. Diese Gebiete können nicht so von Polygonen umschrieben werden, dass die Ecken korrekt repräsentiert werden

Die Berechnung der Schwarz-Christoffel-Abbildung  $\omega(\zeta)$  beruht wesentlich auf der Lösung eines hoch nichtlinearen Parameterproblems<sup>1</sup>: gesucht sind unter anderem die Urbilder der Ecken auf dem Kreis,  $\zeta_k$ . Diese müssen der Reihenfolge der Ecken  $\omega_k$  auf dem Gebiet entsprechen (Fig. 2-3). Die Implementation von Tre-fethen erzwingt diese Reihenfolge durch eine geschickte Variablen-transformation. Zum Aufbau des nichtlinearen Gleichungssystems für die gesuchten Parameter müssen Integrale mit Endsingularitäten im Integranden berechnet werden. Zusätzlich führt der Integrationsweg manchmal sehr nahe an benachbarten Singularitäten vorbei. Eine Gauss-Jacobi-Quadratur [Plessens et al. 83] berücksichtigt die Endsingularitäten. Die Unterteilung in Teilinter-valle in der Nähe von Singularitäten bewirkt trotzdem eine genaue Auswertung.

### Resultierende Implementation

Indem die beiden Abbildungen  $\omega(\zeta)$  und  $\zeta(z)$  zusammengesetzt werden,  $\omega(\zeta(z))$ , können die konformen Abbildungen vom Kreis auf recht allgemeine Gebiete ermittelt werden (Fig. 1-3). Der resul-tierende Algorithmus besteht aus den folgenden Hauptschritten<sup>2</sup>:

- (1) Definiere das gegebene Gebiet punktweise.<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Detailliertere Angaben im Kapitel 8.2.

<sup>2</sup> In Figur 5-3 ist ein Beispiel illustriert, Anhang B gibt eine zusammenfas-sende Übersicht.

<sup>3</sup> Die Schwarz-Christoffel-Abbildung wird nur punktweise berechnet.

## 22 Eine Übersicht

- (2) Umschreibe das Gebiet mit einem Polygon,
  - das gemeinsame Ecken und Tangenten mit dem Gebiet hat (Eckelimination),
  - das den Rand in den wesentlichen Zügen nachvollzieht (sternförmige Zwischenkurve),
  - jedoch möglichst wenige Ecken aufweist (Rechenaufwand).
- (3) Löse das Parameterproblem der Schwarz–Christoffel–Abbildung<sup>1</sup>. Benutze dabei
  - eine Variablentransformation, um die richtige Reihenfolge der Urbilder der Ecken zu garantieren und
  - eine zusammengesetzte Gauss–Jacobi–Quadratur, um Singularitäten im Integranden und nahe am Integrationsweg zu berücksichtigen.
- (4) Finde die Punkte der Zwischenkurve (liegt in  $C^1$ ), die auf die gegebenen Punkte des Randes abgebildet werden. Verwende dazu die inverse Schwarz–Christoffel Abbildung, führe daher für jeden Randpunkt eine Newton–Iteration durch.
- (5) Prüfe die Sternförmigkeit der Zwischenkurve.
- (6) Berechne eine kontinuierliche Approximation der Zwischenkurve, beispielsweise durch eine Spline–Interpolation [De Boor 78]<sup>2</sup>.
- (7) Führe die modifizierte Theodorsen–Iteration<sup>3</sup> durch. Dies geschieht sehr effizient durch
  - die Wahl eines optimalen Unterrelaxationsfaktors,
  - zweimalige Anwendung der FFT zur Konjugation und
  - Benutzung von Abminderungsfaktoren zur Dämpfung von Oszillationen.

---

<sup>1</sup> Dieser Schritt wird in Kapitel 8.1 genauer beschrieben.

<sup>2</sup> Die Theodorsen–Iteration verlangt einen kontinuierlich gegebenen Rand.

<sup>3</sup> Obwohl die Zwischenkurve nur  $C^1$ –stetig ist, kann mit einer Theodorsen–Abbildung, welche den Rand glatt approximiert, eine gute Näherung errechnet werden. Eine feinere Unterteilung dieses Schrittes wird in Kapitel 8.2 vorgenommen.

## Kapitel 3

### Zur Herleitung eines äquivalenten Riemann–Hilbert–Problems und dessen Lösung

---

- **Äquivalente Formulierungen auf dem Einheitskreis**
  - gemischtes Potentialproblem
  - Riemann–Hilbert–Problem (RHP)
  - Koppelungsproblem mit Symmetriebedingung
- **Die wichtigsten Schritte der Herleitung der Lösung**
  - Kanonische Lösung — eine spezielle Lösung des homogenen Koppelungsproblems
  - Eine Klasse von partikulären Lösungen des Koppelungsproblems
  - Erfüllung von Analytizität und Symmetrie
- **Die Lösungsformeln**

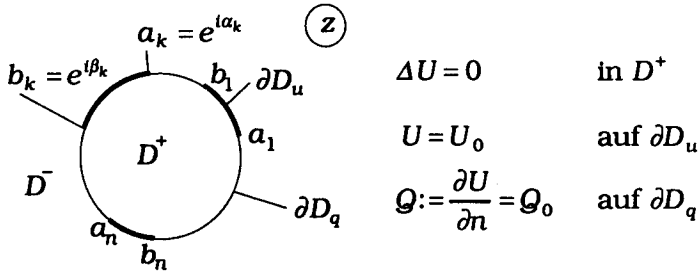
Die komplexe Formulierung als Lösung eines Riemann–Hilbert–Problems, das dem gemischten Potentialproblem entspricht, bildet den Angelpunkt dieser Arbeit. Dass deren Lösung im wesentlichen mit der FFT berechnet werden kann, ist ein wichtiger Grund für die Effizienz der gesamten Methode. Dieses Kapitel vollzieht die wichtigsten Schritte zur Herleitung der Lösung<sup>1</sup>. Das Hauptgewicht liegt in den verschiedenen Problembeschreibungen. Der eigentliche Aufbau der Lösung ist nur grob skizziert, Details sind im Kapitel 10 zu finden.

Der Aufbau der Lösung beruht zunächst einmal darauf, das auf den Einheitskreis verpflanzte Problem (Fig. 3–1) in verschiedenen Stufen durch äquivalente Probleme auszudrücken. Für die

---

<sup>1</sup> Vergleiche auch [Muskhelishvili 65, Henrici 86, Wood 71].

«niedrigste» Stufe, das homogene Koppelungsproblem (Englisch: problem of linear relationship), kann eine Lösung berechnet werden. Darauf aufbauend werden alle Zusatzbedingungen erfüllt, bis das vollständige, äquivalente Koppelungsproblem gelöst ist. Entscheidendes Werkzeug bei der ganzen Herleitung sind einige Eigenschaften von Cauchy-Integralen, insbesondere die Beziehungen von Sokhotskyi (auch Plemelj-Formeln genannt)<sup>1</sup>



Figur 3-1. Das auf den Einheitskreis verpflanzte Potentialproblem.

**Riemann-Hilbert-Problem**

Bereits im ersten Kapitel wurde die erste Stufe der Problemstellung skizziert: das äquivalente Riemann-Hilbert-Problem (RHP). Es beruht erstens darauf, dass der Realteil  $U(z)$  jeder in  $D^+$  analytischen Funktion

$$F(z) = U(z) + iV(z) \tag{3.1}$$

die Potentialgleichung erfüllt. Zweitens müssen die gegebenen Randwerte durch eine Beziehung

$$\text{Re} \left\{ \overline{\alpha(\varphi)} F^+ (e^{i\varphi}) \right\} = \Gamma(\varphi) \tag{3.2}$$

ausgedrückt werden können<sup>2</sup>. Dies ist möglich, wenn die von Neumann-Bedingungen entlang dem Rand integriert werden. Die

<sup>1</sup> Da diese Eigenschaften immer wieder in dieser Arbeit gebraucht werden, sind sie in einem eigenen Kapitel zusammengefasst (Kapitel 7). Vergleiche auch [Henrici 86, Wood 71].  
<sup>2</sup>  $F^+$  bezeichnet den inneren Grenzwert von  $F$ .

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, die für jede analytische Funktion erfüllt sind,

$$U_{,x} = V_{,y} \quad \text{und} \quad U_{,y} = -V_{,x} \quad (3.3)$$

können auch in Normalen- und Tangentialrichtung auf dem Rand des Einheitskreises formuliert werden:

$$U_{,n} = V_{,\varphi} \quad \text{und} \quad U_{,\varphi} = -V_{,n}. \quad (3.4)$$

Die Integration der letzten Gleichung ergibt für den Imaginärteil (Fig. 3-1)

$$V(\varphi) =: V_0(\varphi) + C(\varphi)$$

$$V_0(\varphi) =: \int_{\beta_k}^{\varphi} V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi} = \int_{\beta_k}^{\varphi} U_{,n} d\bar{\varphi} = \int_{\beta_k}^{\varphi} \mathcal{Q}_0 d\bar{\varphi}, \quad \begin{array}{l} \beta_k < \varphi < \alpha_{k+1}, \\ k = 1, \dots, n \end{array} \quad (3.5)$$

$$C(\varphi) =: \begin{cases} C_k & \beta_k < \varphi < \alpha_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Integration muss auf jedem Randstück  $\partial D_q$  separat durchgeführt werden. Sie ist jeweils nur bis auf eine additive reelle Konstante  $C_k$  bestimmt. Die vorerst unbekannte Funktion  $C(\varphi)$  entspricht auf den von Neumann-Rändern  $\partial D_q$  den Werten  $C_k$  und verschwindet auf den Dirichlet-Rändern  $\partial D_u$ . Es wird sich zeigen, dass diese Konstanten richtig angepasst werden müssen, damit eine Lösung des RHPs (3.2) überhaupt existiert<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Grundsätzlich wäre es auch möglich statt durch Integration der von Neumann-Bedingungen ein äquivalentes RHP für  $F'(z)$  durch Differenzieren der Dirichlet-Bedingungen zu formulieren. Die Lösung müsste dann nachträglich durch eine Integration gewonnen werden. Dieser Mehraufwand wird durch die gewählte Variante vermieden. Dafür muss ein Gleichungssystem der Ordnung  $n$  gelöst werden.



Die vollständige äquivalente RHP-Formulierung lautet damit

$$\begin{array}{l}
 F(z) = U(z) + iV(z) \\
 \left. \begin{array}{l}
 F(z) \text{ analytisch in } D^+, \\
 \text{analytisch auf } \partial D \text{ fortsetzbar,} \\
 \text{beschränkt in } D^+ \cup \partial D
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{komplexe} \\
 \text{Formulierung} \\
 \\
 \text{Zusatz -} \\
 \text{bedingungen}
 \end{array} \\
 \text{Re} \left\{ \overline{a(\varphi)} F^+(e^{i\varphi}) \right\} = \Gamma(\varphi) \text{ wobei} \\
 \left. \begin{array}{ll}
 \alpha = 1; \quad \Gamma(\varphi) = U_0(\varphi) & \text{auf } \partial D_u \\
 \alpha = i; \quad \Gamma(\varphi) = V_0(\varphi) + C(\varphi) & \text{auf } \partial D_q
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 \text{eigentliches} \\
 \text{RHP}
 \end{array}
 \end{array} \tag{3.6}$$

Die Beschränktheit von  $F$  muss aus physikalischen Gründen verlangt werden, da auch unbeschränkte Lösungen des eigentlichen RHPs (3.6c) existieren<sup>1</sup>, die jedoch nicht äquivalent zum gestellten Problem sind.  $U_0(\varphi)$  und  $V_0(\varphi)$  stellen die gegebenen Randdaten dar.

**Koppelungsproblem**

Das eigentliche RHP (3.6c) kann nochmals anders formuliert werden. Aus der Definition des Realteiles komplexer Funktionen folgt,

$$\overline{a(\varphi)} F^+(e^{i\varphi}) + a(\varphi) \overline{F^+(e^{i\varphi})} = 2\Gamma(\varphi). \tag{3.7}$$

Um das *Koppelungsproblem* herzuleiten, muss die Funktion  $F$  auf die ganze komplexe Ebene  $z$  erweitert werden. Dazu dient die zu  $F$  assoziierte Funktion

$$F_*(z) := \overline{F(1/\bar{z})}. \tag{3.8}$$

Sie entspricht der am Einheitskreis gespiegelten Funktion. Nähert sich  $z$  dem Kreis von innen, dann nähert sich  $1/\bar{z}$  derselben Stelle  $e^{i\varphi}$  von aussen. Im Grenzübergang gilt daher

---

<sup>1</sup> Diese Lösungen sind in den Übergangsstellen  $a_k$  und  $b_k$  nicht beschränkt (vgl. Kapitel 9.2), entsprechen dadurch jedoch nicht dem gestellten Problem (Fig. 3-1).

$$F_{\star}^{+}(e^{i\varphi}) = \overline{F^{-}(e^{i\varphi})}, \text{ resp. } F_{\star}^{-}(e^{i\varphi}) = \overline{F^{+}(e^{i\varphi})}. \quad (3.9)$$

Definiert man die zunächst nur in  $D^{+}$  erklärte Funktion  $F$  auch ausserhalb des Einheitskreises durch die Symmetriebedingung

$$F(z) \equiv F_{\star}(z), \quad (3.10)$$

dann folgt mit (3.9)

$$F^{+}(e^{i\varphi}) = \overline{F^{-}(e^{i\varphi})} \text{ und } F^{-}(e^{i\varphi}) = \overline{F^{+}(e^{i\varphi})}. \quad (3.11)$$

Aus der Beziehung (3.7) folgt damit die vollständige Formulierung des *äquivalenten Koppelungsproblems*:

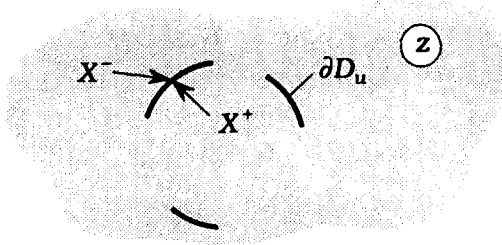
$F(z) = U(z) + iV(z), \quad (z \in D^{+})$	$\left. \begin{array}{l} F(z) \text{ analytisch in } D^{+}, \\ \text{analytisch auf } \partial D \text{ fortsetzbar,} \\ \text{beschränkt in } D^{+} \cup \partial D \end{array} \right\}$	komplexe Formulierung
$F^{+} = -F^{-} + 2U_0(\varphi)$	$\left. \begin{array}{l} \text{auf } \partial D_u \\ F^{+} = F^{-} + 2i(V_0(\varphi) + C(\varphi)) \\ \text{auf } \partial D_q \end{array} \right\}$	Zusatz - bedingungen
$F(z) \equiv F_{\star}(z) := \overline{F(1/\bar{z})}, \quad (z \in D^{+})$		eigentliches Koppelungs - problem
		Erweiterung auf ganze Ebene

Die Symmetriebedingung (3.12d) zusammen mit der Voraussetzung der Analytizität von  $F$  in  $D^{+}$  (3.12b) bedingt auch die Analytizität von  $F$  ausserhalb des Kreises, insbesondere im Punkt  $\{\infty\}$ .

Die Lösung wird jetzt stufenweise rückwärts aufgebaut<sup>1</sup>:

- Berechne eine spezielle Lösung des eigentlichen, homogenen Koppelungsproblems (kanonische Lösung),
- Berechne eine Klasse von partikulären Lösungen des entsprechenden inhomogenen Problems,
- Erfülle die Analytizität in 0 und  $\{\infty\}$  sowie die Symmetriebedingungen.

### Kanonische Lösung



Figur 3-2. Die kanonische Lösung  $X(z)$  ist eine spezielle Lösung des homogenen Koppelungsproblems. Sie ist in der ganzen, entlang der Dirichlet-Ränder  $\partial D_u$  aufgeschnittenen, komplexen Ebene (ohne den Punkt  $\{\infty\}$ ) analytisch. Die beiden Werte an den Schnittufern müssen entgegengesetzt gleich gross sein,  $X^+ = -X^-$ .

Als erstes wird die kanonische Lösung  $X(z)$  bestimmt. Sie ist eine Lösung des homogenen Teils des eigentlichen Koppelungsproblems (3.12), muss also

$$\begin{aligned} X^+ &= -X^- & \text{auf } \partial D_u \text{ und} \\ X^+ &= X^- & \text{auf } \partial D_q, \end{aligned} \tag{3.13}$$

erfüllen. Zusätzlich muss sie

- analytisch in  $D^+$  und  $D^-$  ohne  $\{\infty\}$  sein,

<sup>1</sup> Diese Schritte werden hier, wie bereits angetönt, nur grob nachvollzogen, detaillierter werden sie im Kapitel 9.2 hergeleitet.

- überall von null verschieden sein, ausser allenfalls in  $\{a_k, b_k, k \in \{1, \dots, n\} \text{ und } \infty\}$ ,
- auf dem Einheitskreis beschränkt sein und
- sie darf in  $\{\infty\}$  höchstens einen Pol haben, dessen Ordnung minimal sein soll.

Dieser Satz von Forderungen schränkt die vielen möglichen Lösungen von (3.13) auf solche ein, die zum Aufbau der Lösung des ursprünglichen Problems (Fig. 1–1) brauchbar sind. Insbesondere ist es wichtig, dass die kanonische Lösung nirgends in  $D^+$  verschwindet, da sie im Nenner der Lösungsformel auftreten wird. Da, wie bereits erwähnt, beschränkte Lösungen des Problems gesucht sind, muss sie auch im Gebiet und auf dem Rand beschränkt sein.

Aus (3.13) folgt offensichtlich, dass  $X(z)$  über die von Neumann-Ränder  $\partial D_q$  analytisch fortsetzbar ist, da dort der innere und äussere Grenzwert identisch ist.  $X(z)$  ist also in der ganzen, entlang den Dirichlet-Rändern  $\partial D_u$  aufgeschnitten Ebene (ohne  $\{\infty\}$ ), analytisch (Fig. 3–2). Die so definierte kanonische Lösung ist bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig. Sie kann multiplikativ aus Teillösungen  $X_k(z)$  zusammengesetzt werden,

$$X(z) = C \prod_{k=1}^n X_k(z). \quad (3.14)$$

Jedes  $X_k(z)$  ist die Lösung über ein Teilstück von  $\partial D_u$ . So<sup>1</sup> ergibt sich

$$X(z) = C \prod_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{z}{a_k}} \sqrt{1 - \frac{z}{b_k}}, \quad (3.15)$$

eine in  $D^+ \cup \partial D$  beschränkte Funktion. Die komplexen Wurzeln werden durch die Schnitte entlang  $\partial D_u$  eindeutig festgelegt. Ein Pol  $n$ -ter Ordnung liegt in  $\{\infty\}$ . Mit der Wahl

---

<sup>1</sup> Herleitung im Kapitel 9.2a.

$$C = \prod_{k=1}^n (a_k b_k)^{1/4} \quad (3.16)$$

gilt für die assoziierte kanonische Lösung

$$X_*(z) := \overline{X(1/\bar{z})} = X(z)/z^n. \quad (3.17)$$

### Lösung

Eine ganze Klasse von partikulären Lösungen  $F_m(z)$  des inhomogenen Koppelungsproblems lässt sich aus  $X(z)$  mit Hilfe der Sokhotskyi-Formeln ableiten<sup>1</sup>:

$$F_m(z) = \frac{X(z)}{z^m} I_m(z), \quad m \text{ ganz.} \quad (3.18)$$

Dabei werden die Cauchy-Integrale

$$I_m(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} J_m(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \quad (3.19)$$

auf die Funktionen (vgl. 3.6, 3.15 und 3.16)

$$J_m(\varphi) = \frac{2\Gamma(\varphi) e^{im\varphi}}{a(\varphi) X^+(e^{i\varphi})} \quad (3.20)$$

angewendet. Damit die Realteile dieser Funktionen  $F_m(z)$  auch wirklich Lösungen des ursprünglichen Problems sind, müssen noch die Analytizität in 0 und  $\{\infty\}$  (3.12b) sowie die Symmetriebedingungen (3.12d) gewährleistet werden. Dies führt auf die notwendig zu erfüllenden Nebenbedingungen<sup>2</sup>

$$m \in \{0, \dots, n-1\} \text{ und } I_m(0) = 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, n-1\}. \quad (3.21)$$

Die zweite Gruppe dieser Forderungen stellt  $n-1$  reelle Bestimmungsgleichungen für die  $n$  freien Integrationskonstanten in  $C(\varphi)$

<sup>1</sup> Herleitung im Kapitel 9.2b.

<sup>2</sup> Herleitung im Kapitel 9.2c und d.

dar. Es bleibt ein freier Parameter, der einer additiven Konstante des Imaginärteiles  $V(z)$  der Lösung (3.18) entspricht.

Die Ausdrücke (3.18 bis 3.21) beschreiben die Lösung des ursprünglichen Potentialproblems vollständig. Die gesuchte Funktion ist

$$U(z) = \operatorname{Re}\{F_m(z)\}, \quad m \in \{0, \dots, n-1\} \quad (3.22)$$

ist<sup>1</sup>. Es geht jetzt «nur» noch darum diese Formeln numerisch auszuwerten.

---

<sup>1</sup> D.h. die Werte der verschiedenen Formen der Lösung  $F_m(z)$  sind identisch. Um numerische Schwierigkeiten bei der Auswertung von  $U(0)$  zu vermeiden, wird bei der numerischen Auswertung  $m=0$  gewählt.

Leer - Vide - Empty

## Kapitel 4

## Zur Auswertung der Lösung

- **Das numerische Problem: Berechnung von Cauchy-Integralen die auf singuläre Funktionen angewendet werden.**
- **Zwei Tatsachen über Cauchy-Integrale:**
  - numerische Integration glatter Funktionen mit FFT
  - analytische Integration von Real- oder Imaginärteilen analytischer Funktionen mit modifizierten Schwarz-schen Formeln.
- **Die Schlüsselidee der ganzen Methode — Kombination von analytischer und numerischer Integration:**
  - analytische Extraktion der Singularitäten und
  - numerische Integration der geglätteten Restfunktion.
- **Die wichtigsten Schritte des resultierenden Lösungsverfahrens.**

Die Berechnung der Lösung besteht aus zwei Teilen: der Bestimmung der Integrationskonstanten  $C_k$  (3.21) und Auswertung der Lösung.

Zuerst müssen die Nebenbedingungen (3.21) erfüllt werden. Dazu müssen  $n - 1$  Cauchy-Integrale an der Stelle  $z = 0$  ausgewertet werden: die Bestimmungsgleichungen für die in (3.5) eingeführten Integrationskonstanten  $C_k$ . Als Gleichungssystem angeschrieben, lauten sie:



$$\underbrace{\frac{i}{\pi} \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{e^{im\varphi}}{X^+(e^{i\varphi})} d\varphi}_{=: A_{mk}} C_k = \frac{1}{\pi} \underbrace{\oint_{\partial D} \frac{\Gamma_0(\varphi) e^{im\varphi}}{a(\varphi) X^+(e^{i\varphi})} d\varphi}_{=: B_m}, \quad \begin{matrix} k=1, \dots, n, \\ m=1, \dots, n-1. \end{matrix} \quad (4.1)$$

Auf der rechten Seite steht  $\Gamma_0(\varphi)$  für die bekannten Randwerte  $U_0(\varphi)$  und  $V_0(\varphi)$  (3.6).

Sind die Konstanten  $C_k$  einmal bestimmt<sup>1</sup>, kann dann die Lösungsformel (3.18) bis (3.20),

$$U(z) = \operatorname{Re}\{F_0(z)\}, \quad (4.2)$$

$$F_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi} \oint \frac{2\Gamma(\varphi)}{a(\varphi) X^+(e^{i\varphi})} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi,$$

ausgewertet werden<sup>2</sup>. Der Term  $\Gamma(\varphi)$  enthält jetzt die in (4.1) bestimmten Konstanten  $C_k$ . Die Ausdrücke (4.1) und (4.2) entsprechen den Gleichungen (3.18) bis (3.21) des letzten Kapitels.

### Numerisches Problem: singuläre Funktionen in Cauchy-Integralen

Die numerische Hauptaufgabe liegt sowohl in (4.1) als auch in (4.2) in der Berechnung von Cauchy-Integralen. Die Funktionen in den Cauchy-Integralen ist im wesentlichen dieselbe (3.20):

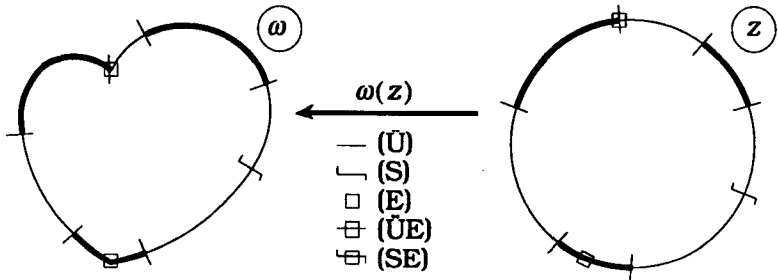
$$J_m(\varphi) = \frac{2\Gamma(\varphi) e^{im\varphi}}{a(\varphi) X^+(e^{i\varphi})}. \quad (4.3)$$

Sie können dreierlei Arten von Singularitäten und zwei Kombinationen davon aufweisen (Fig. 4-1):

- 
- <sup>1</sup> Entspricht einer additiven freien Konstanten im Imaginärteil der Lösung  $F(z)$ . In der Implementation wird  $C_0 = 0$  gesetzt.
  - <sup>2</sup> Aus (3.18) und (3.21) folgt eine ganze Klasse von möglichen Lösungen. Um Schwierigkeiten bei der Auswertung für  $z = 0$  zu vermeiden (Berechnung von Grenzübergängen) wird für die Lösungsauswertung  $m = 0$  gewählt.

- (Ü) die kanonische Lösung  $x(z)$  im Nenner erzeugt an allen Übergangsstellen  $a_k$  und  $b_k$  (Fig. 3-1) eine Singularität mit dem Exponent  $-\frac{1}{2}$ ,
- (E) Ecken im ursprünglichen Gebiet (Fig. 1-1) bewirken in den Randwerten des verpflanzten Problems  $\Gamma(\varphi)$  unbeschränkte Tangentialableitungen<sup>1</sup> und
- (S) Sprungstellen in den Randwerten selbst bewirken Sprungstellen in  $\Gamma(\varphi)$ .

Die Fälle (Ü) und (E), sowie die Fälle (S) und (E), können auch kombiniert auftreten: Übergänge an Ecken (ÜE), respektive Sprungstellen an Ecken (SE).



Figur 4-1. Fünf verschiedene Quellen für Singularitäten: Übergänge der Randbedingungen (—), Ecken auf dem ursprünglichen Gebiet (□), Sprünge in den Randwerten (⊖), und deren Kombinationen, Übergänge in Ecken(⊕) und Sprünge in Ecken(⊗).

Die Auswertung von Cauchy-Integralen stellt in zwei speziellen Fällen kein Problem dar: wenn die Funktion  $J_m(\varphi)$

- auf dem ganzen Rand glatt ist und der Integrationsweg ein Kreis ist (Fall 1), oder
- Real- oder Imaginärteil einer in  $D^+$  analytischen und auf  $\partial D$  fortsetzbaren, bekannten Funktion entspricht (Fall 2).

<sup>1</sup> Die Verpflanzungsregeln für die Randwerte,  $\gamma(\varphi) = \Gamma(s(\varphi))$ , verändern die Randwerte selbst nicht, wohl aber deren Randableitungen, da  $s'(\varphi)$  in den Ecken nicht beschränkt ist.

Im ersten Fall muss die Fourieranalyse von  $J_m(\varphi)$  berechnet werden (erste FFT), die Synthese mit der Hälfte der modifizierten Koeffizienten<sup>1</sup> (zweite FFT) liefert dann an  $N$  äquidistanten Punkten auf einem Kreis (Radius  $\leq 1$ ) die Werte des Cauchy-Integrals<sup>2</sup>. Die Evaluation ist also sehr effizient ( $O(N \ln N)$  Operationen) und beruht nur auf  $N$  Datenpunkten, die gleichmässig über den Rand verteilt sind. Der zweite Fall gestaltet sich beinahe noch einfacher: die mit 0.5 skalierte analytische Funktion entspricht bis auf eine Konstante gerade dem Cauchy-Integral<sup>3</sup>. Diese Funktionen müssen wohl im Gebiet  $D^+$  analytisch sein, auf dem Rand  $\partial D$  sind jedoch einzelne Singularitäten erlaubt.

Im allgemeinen entsprechen die Funktionen (4.3) keinem dieser beiden Fälle. Die Schlüsselidee der ganzen Methode liegt nun darin, beide Fälle zu kombinieren.  $J_m(\varphi)$  wird durch Real- und Imaginärteile einfacher analytischer Funktionen so approximiert, dass sich die Singularitäten bis zu einem gewissen Grad entsprechen<sup>4</sup>. Die Differenz, die Restfunktion, ist dann genügend glatt, um mit FFT numerisch behandelt werden zu können. Dies funktioniert jedoch nur für Kreisgebiete. Dies ist der Grund, warum Probleme auf allgemeineren Gebieten zuerst auf den Einheitskreis verpflanzt werden (Kapitel 2). Die grosse Effizienz der FFT «bezahlt» man in zweierlei Hinsicht: einmal werden gerade durch die konforme Abbildung Ecksingularitäten erzeugt, die wieder extrahiert werden müssen, dann ist auch der Aufwand zur Berechnung der Abbildungsfunktion nicht unerheblich. Das Lösungsverfahren eignet sich wohl am ehesten in Fällen, wo viele Potentialprobleme auf demselben Gebiet gelöst werden müssen, da die konforme Abbildung dann nur einmal bestimmt werden muss<sup>5</sup>.

- 
- 1 Im wesentlichen muss noch der Radius des Auswertungskreises berücksichtigt werden.
  - 2 Vergleiche Kapitel 7.2d.
  - 3 Vergleiche Kapitel 7.2a.
  - 4 Es sollten Funktionen gewählt werden, die einerseits einfach auszuwerten sind und andererseits eine Singularität auf dem Rand haben, die derjenigen des Kernes angepasst werden kann.
  - 5 Weitere Anwendungsideen im Kapitel 6.

**Schlüsselidee: analytische Extraktion der Singularitäten**

Weil diese Extraktionsidee so zentral für das ganze Verfahren ist, wird sie nachfolgend nochmals etwas genauer behandelt<sup>1</sup>.

Die Funktionen (4.3) werden also in zwei Teile aufgespalten:

$$J_m(\varphi) = \bar{J}_m(\varphi) + \check{J}_m(\varphi). \tag{4.4}$$

Die Funktionen  $\check{J}_m(\varphi)$  enthalten bis zu einem gewissen Grad dieselben Singularitäten wie  $J_m(\varphi)$ . Da die Funktionen  $\check{J}_m(\varphi)$  aus Real- und Imaginärteilen bekannter, einfach auswertbarer analytischer Funktionen bestehen, können die ihnen zugehörigen Cauchy-Integrale direkt ausgewertet werden (Fall 1). Die geglätteten Restfunktionen, die Differenzen  $\bar{J}_m(\varphi) = J_m(\varphi) - \check{J}_m(\varphi)$ , sind damit der FFT zugänglich (Fall 2). Damit  $J_m(\varphi)$  durch die Subtraktion von  $\check{J}_m(\varphi)$  wirklich geglättet wird, ist es ausschlaggebend, dass sich deren Singularitäten möglichst genau entsprechen. Die lokalen Entwicklungen der Funktionen  $J_m(\varphi)$  um die singulären Punkte  $\varphi_l$  (Fig. 4-1) bilden dazu den Ausgangspunkt<sup>2</sup>:

$$J_m(\varphi) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \check{J}_{m|k0}^{\pm} |\varphi - \varphi_l|^{-1/2} (\varphi - \varphi_l)^k & (\check{U}) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \check{J}_{m|k0}^{\pm} (\varphi - \varphi_l)^k & (S) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \check{J}_{m|kj}^{\pm} |\varphi - \varphi_l|^{k\delta_l} (\varphi - \varphi_l)^j & (E) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \check{J}_{m|kj}^{\pm} |\varphi - \varphi_l|^{k\delta_l - 1/2} (\varphi - \varphi_l)^j & (\check{U}E) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \check{J}_{m|kj}^{\pm} |\varphi - \varphi_l|^{k\delta_l} (\varphi - \varphi_l)^j & (SE) \end{cases} \tag{4.5}$$

Der Index  $\pm$  weist auf verschiedene Koeffizienten  $\check{J}_{m|kj}$ , für verschiedene Vorzeichen von  $\varphi - \varphi_l$  hin. Der mit  $1/\pi$  skalierte Innenwinkel bei Ecken ist mit  $\delta_l$  bezeichnet (Fig. 2-3).

<sup>1</sup> Ein Beispiel ist in Figur 5-6 illustriert.

<sup>2</sup> Explizite Berechnungen werden im Kapitel 10.1 durchgeführt.

Daten aus drei Quellen fließen in die expliziten Ausdrücke für die Koeffizienten  $\hat{J}_{mlkj}^\pm$  ein:

- Terme aus der lokalen Entwicklung der kanonischen Lösung  $X^+(e^{i\varphi})$ ,
- höhere Randableitungen der gegebenen Randwerte an kritischen Stellen  $\varphi_l$  und
- Terme der lokalen Entwicklung der Ränderzuordnung  $s(\varphi)$ , insbesondere an Eckstellen.

Wären die Daten der kanonischen Lösung beliebig genau berechenbar sind<sup>1</sup>, hängt die Verfügbarkeit des genauen Verlaufes der Randwerte vom modellierten Problem ab. An Eckstellen können nur die ersten paar Terme der Entwicklung der Abbildungsfunktion genau bestimmt werden, da Ecken «nur» durch Polynome (vgl. Kapitel 2) approximiert werden. Sobald die anliegenden Ränder gekrümmt sind, stimmt eine solche Eckelimination nur bis zu einem gewissen Grad mit der exakten Abbildung überein<sup>2</sup>. Aus diesen Gründen scheint es sinnvoll, die Funktionen  $J_m(\varphi)$  soweit zu glätten, dass  $\tilde{J}_m(\varphi)$  in  $C^1$  liegt, also kontinuierliche erste Ableitungen hat.

Für die Extraktion muss jetzt ein der Entwicklung (4.5) entsprechender Ansatz formuliert werden. Die denkbar einfachste Methode ist wohl, für jeden Term, der extrahiert werden muss, je einen Real- und einen Imaginärteil einfacher analytischer Funktionen anzusetzen, deren Summe dann  $\tilde{J}_m(\varphi)$  ergibt. Es werden dazu für alle Terme mit nicht ganzzahligen Exponenten  $\beta$  die Funktionen

$$E_\beta(z) := C_\beta \left(1 - \frac{z}{e^{i\varphi_l}}\right)^\beta \tag{4.6}$$

---

<sup>1</sup> Die kanonische Lösung ist in geschlossener Form gegeben (3.15).

<sup>2</sup> Die nach der Eckelimination entstehende Zwischenkurve ist nicht glatt, sondern liegt in  $C^1$ . Die Theodorsen-Abbildung approximiert diese jedoch glatt. Daraus folgt die erwähnte Ungenauigkeit in der Entwicklung.

gewählt. Bei ganzzahligen Exponenten  $k$  sind logarithmische Terme notwendig

$$E_k(z) := C_k \left(1 - \frac{z}{e^{i\varphi_1}}\right)^k \ln\left(1 - \frac{z}{e^{i\varphi_1}}\right). \quad (4.7)$$

Werden alle Terme mit Exponent  $\leq 1$  berücksichtigt, lautet der Ansatz für die verschiedenen Singularitätstypen

$$\check{J}_{ml}(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{K_{ml01}(\ )^{-1/2}\} + i \operatorname{Im}\{K_{ml02}(\ )^{-1/2}\} \\ + \operatorname{Re}\{K_{ml03}(\ )^{+1/2}\} + i \operatorname{Im}\{K_{ml04}(\ )^{+1/2}\} \end{array} \quad (\ddot{U}) \\ \\ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{K_{ml01} \ln(\ )\} + i \operatorname{Im}\{K_{ml02} \ln(\ )\} \\ + \operatorname{Re}\{K_{ml03}(\ ) \ln(\ )\} + i \operatorname{Im}\{K_{ml04}(\ ) \ln(\ )\} \end{array} \quad (S) \\ \\ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{\operatorname{Int}(\frac{1}{2}\delta_1)} \operatorname{Re}\{K_{mlk1}(\ )^{k\delta_1}\} + i \operatorname{Im}\{K_{mlk2}(\ )^{k\delta_1}\} \end{array} \quad (E) \quad (4.8) \\ \\ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\operatorname{Int}(\frac{3}{2}\delta_1)} \operatorname{Re}\{K_{mlk1}(\ )^{k\delta_1-1/2}\} + i \operatorname{Im}\{K_{mlk2}(\ )^{k\delta_1-1/2}\} \\ + \sum_{k=0}^{\operatorname{Int}(\frac{1}{2}\delta_1)} \operatorname{Re}\{K_{mlk3}(\ )^{k\delta_1+1/2}\} + i \operatorname{Im}\{K_{mlk4}(\ )^{k\delta_1+1/2}\} \end{array} \quad (\ddot{U}E) \\ \\ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{K_{ml01} \ln(\ )\} + i \operatorname{Im}\{K_{ml02} \ln(\ )\} \\ + \sum_{k=1}^{\operatorname{Int}(\frac{1}{2}\delta_1)} \operatorname{Re}\{K_{mlk1}(\ )^{k\delta_1}\} + i \operatorname{Im}\{K_{mlk2}(\ )^{k\delta_1}\} \end{array} \quad (SE) \end{array} \right.$$

wobei

$$(\ ) \doteq (1 - e^{i(\varphi - \varphi_1)}) \tag{4.9}$$

substituiert werden muss<sup>1</sup>.

Der Koeffizientenvergleich der Entwicklungen (4.5) mit (4.8) liefert nach einiger Rechnung<sup>2</sup> explizite Ausdrücke für die Koeffizienten  $K_{mlkj}$  der Extraktionsfunktion.

**Hauptschritte des Lösungsalgorithmus**

Die Implementation zur Berechnung von Cauchy-Integralen,

$$I_m(z) = \frac{1}{2\pi} \oint J_m(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi, \tag{4.10}$$

geschieht durch vier Hauptschritte:

- (1) Bestimme die Koeffizienten  $K_{mlkj}$  der zu extrahierenden Funktion  $J_m(\varphi)$  (4.8),
- (2) Bilde die Differenz  $\check{J}_m(\varphi) = J_m(\varphi) - \check{J}_m(\varphi)$  an äquidistanten Stellen,
- (3) Benutze die FFT zweimal, um die den glatten Teil des Cauchy-Integrals,  $\check{I}_m(z)$ , an äquidistanten Punkten auf einem Kreis mit Radius  $R \leq 1$  zu berechnen.
- (4) Addiere die Extraktionsfunktion  $\check{I}(z)$ , um schliesslich das gesamte Cauchy-Integral  $I_m(z) = \check{I}_m(z) - \check{I}_m(z)$  zu erhalten.

Hiermit sind alle wesentlichen Punkte des gesamten Lösungsalgorithmus beschrieben worden. Abschliessend seien noch die wichtigsten Schritte des gesamten resultierenden Lösungsverfahrens aufgezählt<sup>3</sup>:

---

<sup>1</sup> In den Fällen (E), (ÜE) und (SE) kann der Ansatz noch etwas variieren, je nachdem, ob einzelne ganzzahlige Exponenten auftreten. Details sind in Kapitel 10.2 zu finden.

<sup>2</sup> Vergleiche dazu Kapitel 10.2.

<sup>3</sup> Eine detailliertere Aufzählung der Schritte ist im Anhang B zu finden.

- (A) Konstruiere die konforme Abbildung (gemäss der Beschreibung am Schluss des Kapitels 2)
- an gleichmässig verteilten Randpunkten des Einheitskreises,
  - an kritischen Stellen (Übergänge der Randbedingungen, Ecken und Sprungstellen der Randwerte) und
  - an Punkten, an denen die Lösung erwünscht ist.
- (B) Integriere die gegebenen Randwerte  $q_0(s)$  oder  $Q_0(\varphi)$  entlang den von Neumann-Rändern entweder im gegebenen Gebiet  $\Omega$  oder im Einheitskreis  $D^+$ . Daraus ergeben sich die gegebenen Randwerte  $\Gamma_0(\varphi)$  des zugehörigen RHPs.
- (C) Bestimme die Integrationskonstanten  $C(\varphi)$  durch Erfüllen der Nebenbedingungen (4.1):
- Berechne dazu die rechte Seite  $B_m$  gemäss den oben aufgeführten Punkten (1) bis (4).
  - Benutze zur Berechnung der Systemmatrix  $A_{mk}$  Gauss-Quadraturformeln<sup>1</sup>.
  - Löse das , volle und nichtsymmetrische reelle Gleichungssystem der Ordnung  $n$  für die Integrationskonstanten  $C_k$  mit einem Standardverfahren.
- (D) Wende die Lösungsformel (4.2) aus:
- Ergänze zuerst die gegebenen Randwerte  $\Gamma_0(\varphi)$  mit den in Schritt (C) errechneten Integrationskonstanten  $C(\varphi)$ .
  - Berechne die Lösung auf Kreisen mit gleichmässig verteilten Punkten gemäss den obigen Punkten (1) bis (4).
  - Ersetze in der Berechnung der Lösung auf unregelmässigen Punkten im Punkt (3) die FFTs durch ein Horner-schema, um die Potenzreihen auszuwerten.
  - Auf kritischen Randpunkten heben sich einzelne Singularitäten gegenseitig auf, so dass die Lösung explizit angegeben werden kann.

---

<sup>1</sup> Da der Integrand der Elemente  $A_{mk}$  kontinuierlich gegeben ist, jedoch durch die kanonische Lösung  $x(z)$  Endsingularitäten induziert werden, bietet sich die vorgeschlagene numerische Quadratur an.



Leer - Vide - Empty

## Kapitel 5

### Numerische Beispiele und Vergleiche

---

- **Konzept der Implementation**
  - **Zwei Pakete: konforme Abbildung berechnen und gemischtes Potentialproblem lösen**
  - **7 Module zur Berechnung der konformen Abbildung von Einheitskreis auf einfach zusammenhängende Gebiete**
  - **3 Module zur Lösung konform verpflanzter, gemischter Potentialprobleme**
- **Ein Beispiel zur Illustration des Lösungsablaufs**
- **Einflussfaktoren auf Genauigkeit und Aufwand**
  - **Einflussfaktoren bei der Berechnung der konformen Abbildung**
    - **Beispiel: Wahl des umschriebenen Polygons**
  - **Einflussfaktoren bei der Lösung des Potentialproblems**
  - **Beispiele: Anzahl bekannter Ableitungen der gegebenen Randwerte an kritischen Randpunkten und Einfluss des Verlaufs der gegebenen Randwerte**
- **Abgrenzung zu anderen Lösungsverfahren**
  - **Finite Elemente Methode (FEM)**
  - **Rand- oder Boundary- Element Methode (BEM)**

In den vorherigen Kapiteln wurde eine Idee zu einem numerischen Verfahren vorgestellt. Es stellte sich im Verlauf der Entwicklung dieser Methode nicht nur die Frage nach der theoretischen Machbarkeit, sondern auch ob und wie gut ein implementierter Algorithmus funktioniert. Ein zu dieser Arbeit gehöriges Softwarepaket demonstriert die Anwendbarkeit der Methode.

Dieses Kapitel stellt das zugrundeliegende Softwarekonzept vor, illustriert die Arbeitsweise der Programme und diskutiert den Einfluss verschiedener Faktoren auf Aufwand und Genauigkeit des Verfahrens.

### **Das Implementationskonzept**

Das zu dieser Arbeit gehörige Softwarepakets soll hauptsächlich die Funktionstüchtigkeit der Methode demonstrieren. Die Herstellung eines kommerziellen Produktes war hingegen nie das Ziel. Der Programmieraufwand wurde daher möglichst gering gehalten, ohne jedoch auf Modularität und durchsichtige Strukturierung zu verzichten.

Das Resultat besteht aus zwei Paketen: das erste, bestehend aus 7 separaten Modulen, berechnet die konforme Abbildung vom Einheitskreis auf einfach zusammenhängende Gebiete. Das zweite, mit vorläufig drei Modulen, löst verpflanzte, gemischte Potentialprobleme auf dem Einheitskreis. Jedes der 10 Module ist als Batcheinheit konzipiert, erhält den Input aus eigentlichen Inputfiles mit Steuerdaten und Datenfiles, die aus anderen Modulen hervorgegangen sind. Als Output liefern sie je eines der eben erwähnten Datenfiles, einen Printoutput und teilweise auch Plotdaten<sup>1</sup>. Die Kommunikation zwischen den Modulen läuft also ausschliesslich über separate Datenfiles, wobei jeweils nur auf eines, dem Modul zugeordnetes File, auch geschrieben wird.

Die folgende Kurzbeschreibung der Funktionen jedes dieser Module soll zusammen mit den Figuren 5-1 und 5-2 die resultierende Implementation veranschaulichen<sup>2</sup>.

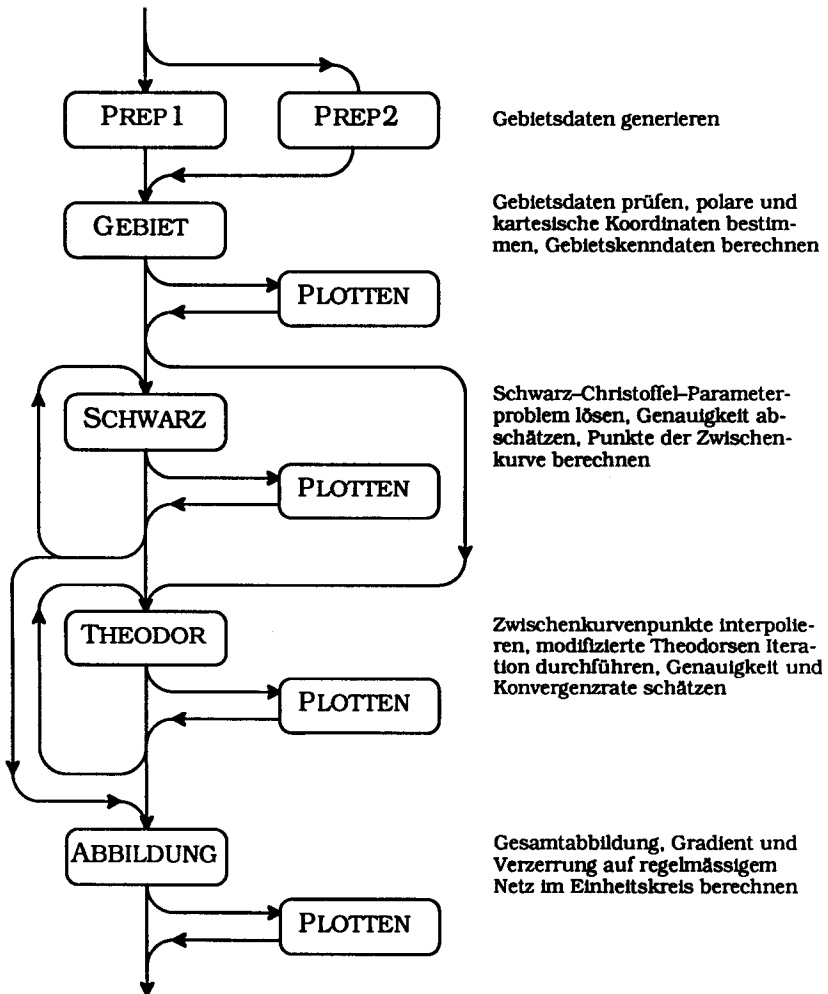
Die 7 Module zur Berechnung der konformen Abbildung werden mehr oder weniger in einer Folge, sequentiell durchlaufen.

---

<sup>1</sup> Die aktuelle Version, mit der alle in dieser Arbeit vorgestellten Beispiele berechnet worden sind, ist eine Implementation auf einer Cyber 180-855 der CDC unter dem Betriebssystem NOS/VE. Programmiert wurde in FORTRAN 77.

<sup>2</sup> Kapitel 11 und insbesondere Anhang B gibt eine andere, formale Beschreibung der einzelnen Aufgaben des Algorithmus.

Einige Module können mehrmals durchlaufen werden, um Zwischenresultate zu verfeinern, deren Genauigkeit zu erhöhen oder spezielle Printfiles zu erhalten. Ein sehr rudimentär gestaltetes Driverprogramm ermöglicht die interaktive Benutzung der Module, sowie dazwischen, die Anpassung der zugehörigen Inputfiles mit Steuerdaten.



Figur 5-1. Der Zusammenhang und die Hauptfunktionen der 7 Module zur Berechnung der konformen Abbildung.

**PREP1:** Ein einfacher Preprozessor um Gebietsdaten von Kreisbogen–Geraden–Vielecken zu generieren. Produziert das Inputfile für GEBIET.

**PREP2:** Wie PREP1 ein Preprozessor für 19 vorgegebene Gebietstypen, deren Form durch zwei reelle Parameter beeinflusst werden kann.

**GEBIET** verlangt als Input, neben wenigen Steuerdaten, die Gebietsdefinition in Form von diskreten Randpunktkoordinaten und den Eckpunkten des den Rand umschreibenden Polygons<sup>1</sup>. Es ist möglich einfache Dreh und Spiegelsymmetrien zu berücksichtigen: es müssen nur die Daten im ersten Segment gegeben sein. Das Modul prüft die Verträglichkeit der Daten bezüglich Symmetrieangaben, untersucht die Sternförmigkeit, berechnet alle Punkte in allen Segmenten sowohl in polar als auch in kartesischen Koordinaten und berechnet einige Gebietskenndaten (Schwerpunkt, Flächenmomente, usw.)

**SCHWARZ<sup>2</sup>** löst einerseits das Schwarz–Christoffelsche Parameterproblem und berechnet andererseits die diskreten Punkte der Zwischenkurve (Urbilder der in GEBIET definierten Randpunkte).<sup>3</sup> Die Lösung des Parameterproblems berücksichtigt vorläufig keine Symmetrien. Das Modul liefert eine Genauigkeitsabschätzung der resultierenden Abbildung.

**THEODOR<sup>4</sup>:** Führt die modifizierte Theodorsen–Iteration für die Ränderzuordnungsfunktion  $\vartheta(\varphi)$  durch (Fig. 2–2), nachdem es die kontinuierliche Spline–Interpolation der Zwischenpunkte<sup>5</sup> bestimmt hat. Dreh– und Spiegelsymmetrien werden dabei be-

---

<sup>1</sup> Es ist auch möglich nur ein Gebiet, respektive nur ein Polygon anzugeben.

<sup>2</sup> Dieses Modul beruht im wesentlichen auf Routinen aus SCPACK [Trefethen 82].

<sup>3</sup> Durch mehrmaligen Aufruf ist es möglich, die Genauigkeit bereits berechneter Resultate zu erhöhen.

<sup>4</sup> Beruht auf Routinen von PD Dr. M. H. Gutknecht, deren Funktion in [Gutknecht 83] beschrieben ist.

<sup>5</sup> Oder Randkurve, falls keine Schwarz–Christoffel–Abbildung vorgeschaltet ist.

rücksichtigt. Durch mehrfachen Aufruf können bereits berechnete Daten weiter verfeinert werden<sup>1</sup>.

**ABBILD** berechnet die Gesamtabbildung, deren Gradienten und die Verzerrung<sup>2</sup> auf einem Netz äquidistanter Punkte auf Kreisen, deren Radien entweder beliebig vorgegeben sind oder uniform in  $[0,1]$  verteilt sind. Symmetrien werden berücksichtigt.

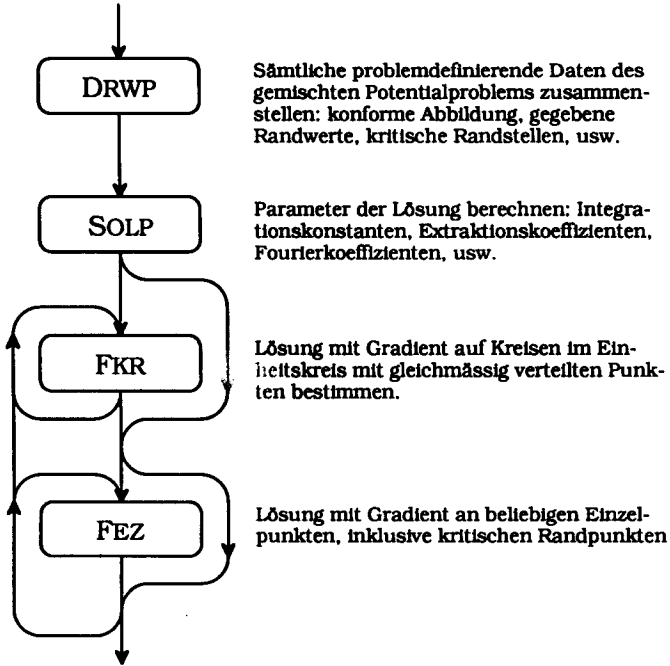
**PLOTTEN**: Mit diesem Modul können 8 vorbereitete Bilder generiert werden, um die Resultate jedes Moduls zu visualisieren (z.B. Fig. 5-4).

Die Module zur Lösung des verpflanzten gemischten Potentialproblems hängen naturgemäss stark von den im Packet konforme Abbildung generierten Daten ab. Die Module werden im Normalfall der Reihe nach je einmal durchlaufen (Fig. 5-2). Die Datenstruktur und die Schnittstellen (wieder via Datenfiles) machen diverse zukünftige Erweiterungen (siehe unten und Kapitel 6) relativ einfach. Eine Vereinfachung wurde jedoch eingebaut: die gegebenen Randbedingungen werden durch eine benutzerdefinierte Routine berechnet, welche direkt die exakte Lösung (Realteil einer im Gebiet analytischen Funktion) an beliebigen Stellen berechnet. Es werden also direkt die Randwerte  $u_0(s(\varphi))=U_0(\varphi)$  und  $v_0(s(\varphi))=V_0(\varphi)$  berechnet, die Integration der gegebenen von Neumann-Bedingungen  $q_0(s)$  entlang dem Rand (1.5) wird nicht explizit durchgeführt. Für Probleme deren Lösung man nicht im vornherein kennt, müsste dieser Teil des ersten Moduls neu gestaltet werden.

---

<sup>1</sup> Insbesondere kann man das Abbruchkriterium der Iteration und/oder die Anzahl benutzter Fourierkoeffizienten erhöhen.

<sup>2</sup> Betrag des Gradienten.



Figur 5-2. Die 4 Module zur Lösung von auf den Einheitskreis verpflanzten, gemischten Potentialproblemen.

DRWP hat die Aufgabe alle zur Lösung des Problems notwendigen Daten zusammen zu stellen. Diese stammen aus dreierlei Quellen. Die Parameter der konformen Abbildungsfunktion, die Gebietsdaten und die Abbildungsfunktion auf äquidistanten Randpunkten werden aus Datenfiles des Paketes konforme Abbildung gelesen. Alle Angaben über die kritischen Stellen auf dem Rand (Koordinaten, Typ der Singularität, beidseitige Randwerte samt höheren Ableitungen, usw.) stammen aus einem Inputfile, das der Benutzer zur Verfügung stellen muss. Die übrigen, gleichmässig über den Rand verteilten Randwerte werden durch die oben erwähnte benutzerdefinierte Routine berechnet.

SOLP berechnet alle Parameter, die zur Auswertung der Lösungsformel (4.2) gebraucht werden. Dies sind einmal die Integrati-

onskonstanten  $C_n$ , die aus dem Gleichungssystem (4.1) bestimmt werden. Dann sind es auch die Koeffizienten der Extraktionsfunktion (4.8) und die Fourierkoeffizienten von  $\tilde{J}_0(\varphi)$  respektive  $\tilde{I}_0(z)$  (4.4). Es ist möglich Zwischenresultate nach einzelnen Berechnungsschritten grafisch darzustellen (Fig. 5–6 und 5–7)

FKR wertet die Lösung auf Kreisen beliebigen Radius aus, und zwar auf äquidistant darauf verteilten Punkten. Wahlweise wird die Lösung  $u$  resp.  $U$  oder dessen komplexer Gradient  $\text{grad}u$  resp.  $\text{grad}U$  berechnet. Grafische Darstellung, insbesondere der Fehler im Vergleich zur exakten Lösung, ist ebenfalls möglich.

(FEZ): Dieses Modul existiert (noch) nicht, es wäre jedoch ohne grossen Aufwand zu kreieren. Es würde die Lösung an beliebigen Stellen im Gebiet oder auf dem Rand berechnen. Speziell auf den kritischen Randpunkten könnte Lösung und das Verhalten des Gradienten<sup>1</sup> bestimmt werden. Entsprechende Detailangaben sind im Kapitel 11.2 zusammengestellt.

### **Ein Beispiel zur Illustration des Lösungsablaufs**

Um einerseits das Lösungsverfahren, wie es am Ende des Kapitels 4 und im Anhang B zusammengefasst ist, zu veranschaulichen und andererseits die Diskussion über Aufwand und Genauigkeit einzuleiten, wird hier ein Beispiel schrittweise gelöst und die Zwischenresultate visualisiert. Die Gebietsdefinition des Beispiels ist aus Figur 5–3 ersichtlich. Wie andere Methoden (FEM, BEM) verlangt auch dieses Verfahren vom Benutzer ein gewisses Fingerspitzengefühl für die Zusammenhänge der verschiedenen Einflussgrössen. Es handelt sich also keineswegs um ein «Black Box» Verfahren, insbesondere will die Genauigkeit der Resultate sorgfältig diskutiert sein.

Dem Implementationskonzept entsprechend geschieht die Lösung in zwei Hauptschritten. Vom gestellten Potentialproblem völlig unabhängig wird zuerst nur die Geometrie des Gebietes behandelt, die konforme Abbildung berechnet. Figur 5–4 veran-

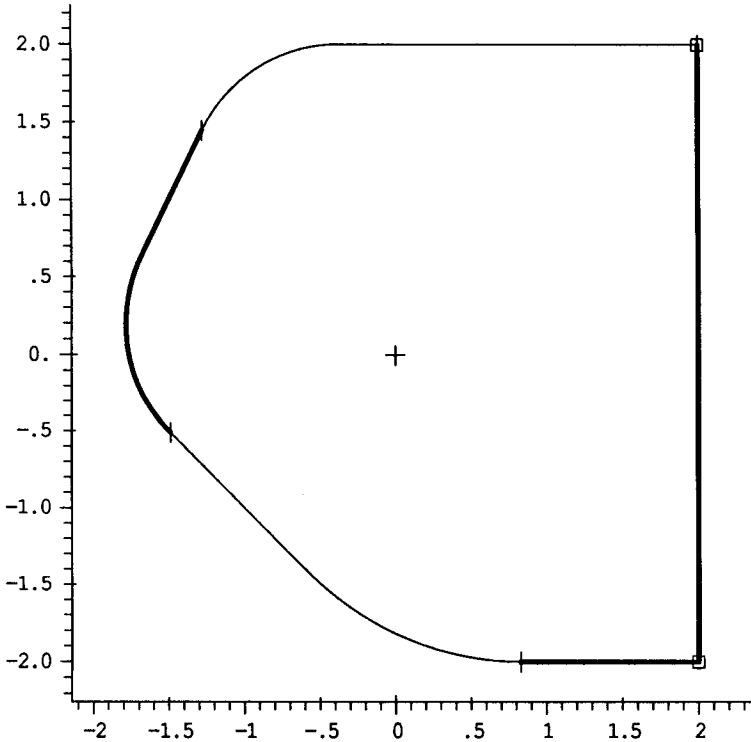
---

<sup>1</sup> Der Gradient ist an kritischen Stellen zum Teil unbeschränkt.



## 50 Eine Übersicht

schaulicht die Schritte<sup>1</sup>. Aus der Figur geht nicht hervor, dass die gegebene Randkurve (a) und die Zwischenkurve (e) nicht kontinuierlich, sondern durch diskrete Punkte gegeben sind. Erst im Modul THEODOR werden sie durch eine Spline-Interpolation kontinuierlich dargestellt.



**Figur 5-3.** Definition des Gebietes in der Problemebene  $\omega$ , welches als Beispiel für die Figuren und Tabellen 5-4 bis 5-9 dient. Es handelt sich um ein Kreisbogenvieleck mit den Radien 1.0, 1.0 und 2.0. Das umschriebene Polygon (nicht sichtbar) hat die Eckkoordinaten (2,2), (-2,2), (-2,-2), und (2,-2). Dicke Linien bezeichnen Dirichlet-, magere von Neumann-Ränder. Es kommen die Singularitätstypen  $(\dot{U})$ ,  $(E)$  und  $(\dot{U}E)$  vor.

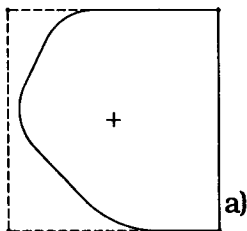
<sup>1</sup> Vergleiche mit der Modulbeschreibungen im obigen Abschnitt.

Problemebene ( $\omega$ )

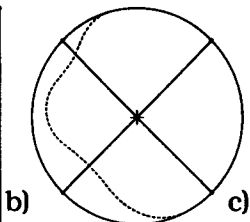
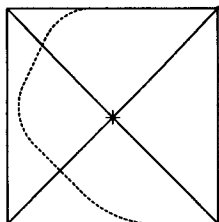
Zwischenebene ( $\zeta$ )

Modellebene ( $z$ )

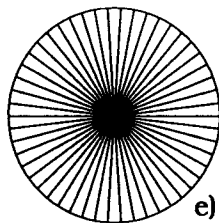
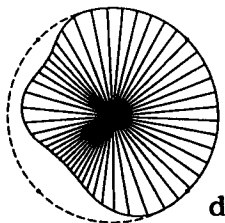
Randkurve des Gebietes samt umschriebenem Polygon auf Problemebene



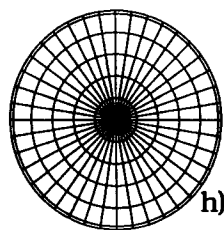
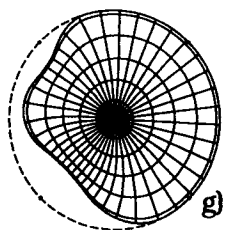
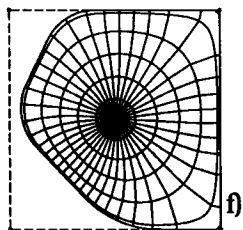
Schwarz-Christoffel-Abbildung von Zwischen- auf Problemebene; Randtransformation auf Zwischenebene



Ränderzuordnungsfunktion der Theodorsen-Abbildung von Modell- auf Zwischenebene



Gesamtabbildung von Modell- auf Problemebene



Figur 5-4. Berechnung der konformen Abbildung: punktweise Gebietsdefinition (a), Lösung des Schwarz-Christoffelschen Parameterproblems (b,c), Ränderzuordnungsfunktion nach Theodorsen-Iteration (d,e), Gesamtabbildung vom Einheitskreis auf das gegebene Gebiet (f,g,h). Alle Figuren wurden mit dem Modul PLOTTEN erstellt.

## 52 Eine Übersicht

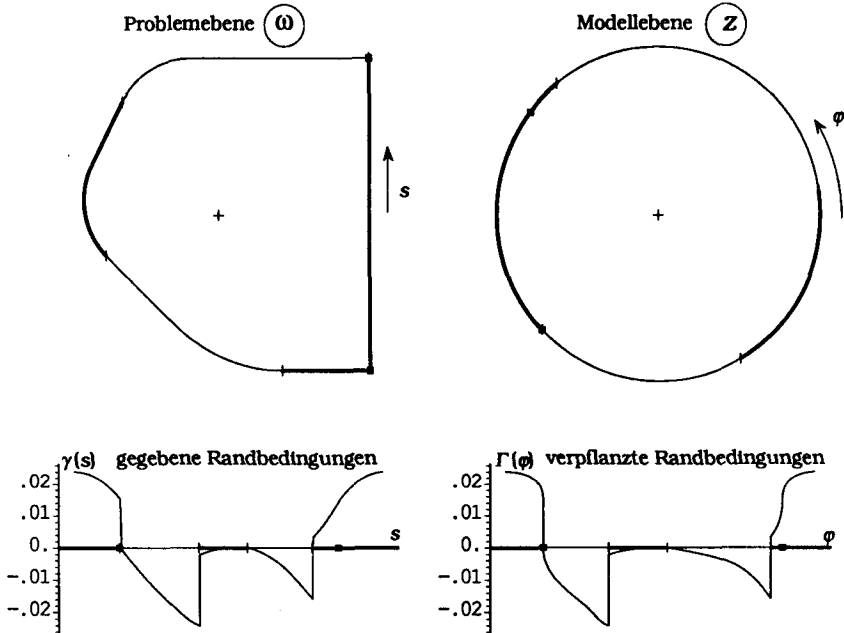
Um einen ersten Einblick in die Aufwand–Ertrags Bilanz der Methode zu geben, sind in Tabelle 5–5 die wichtigsten Kenngrößen der Rechnung, die erlangte Genauigkeit und der dazu erforderliche Aufwand<sup>1</sup> zusammengestellt.

Modul, Aufgabe	Aufwand (CPU-sec)	Kenndaten, Genauigkeit
PREP1 Input für Gebiet generieren Subtotal	<u>1.72</u> 1.72	
GEBIET Prüfen, polar umrechnen Subtotal	<u>1.12</u> 1.12	4 Ecken 1451 Randpunkte
SCHWARZ Parameterproblem lösen (in diesem Beispiel trivial !!) Punkte der Zwischenkurve Rest Subtotal	<u>0.30</u> 1451*0.02 28.56 <u>0.29</u> 29.15	4 Ecken 10 Punkte Quadraturformel Gen. Eckabbildung < 1E-12 1451 Punkte
THEODOR Iteration durchführen  Rest (Spline Interpolation, Konvergenztest, usw.) Subtotal	<u>52.17</u> 25*2.09 52.17 <u>9.72</u> 61.89	25 Iterationen 6000 Fourierkoeffizienten Gen. Abbildung < 1.E-10
Abbildungsparameter berechnen Total PREP1 bis THEODOR	<u>93.88</u>	
ABBILD Gesamtabbildung berechnen Total 1 Total 2	<u>6000*0.00635.34</u> 14000*0.00678.77	6000 Punkte auf einem Kreis je 2000 Punkte auf 7 Kreisen

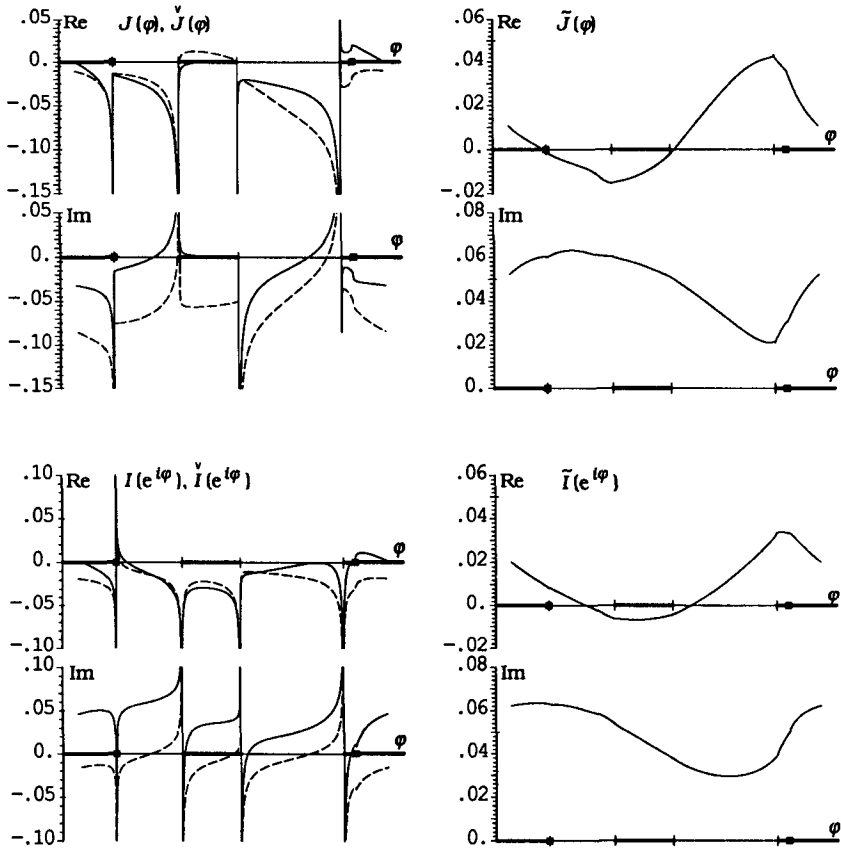
Tabelle 5–5. Kenngrößen, Genauigkeit und Aufwand in CPU-Sekunden zur Berechnung des Beispiels in Figur 5–4. Die Rechnungen wurden auf einer Cyber 180–855 durchgeführt.

<sup>1</sup> Aufwand in CPU-Sekunden auf einer Cyber 180–855 der CDC.

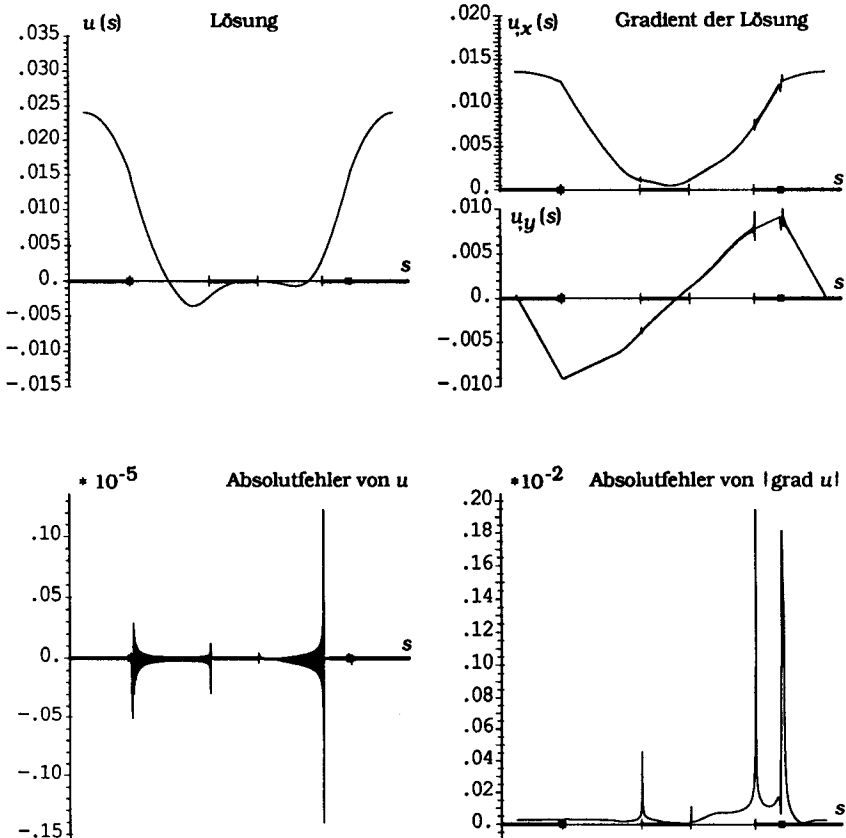
Das zweite Paket erlaubt verpflanzte Potentialprobleme zu lösen. Figur 5-6 zeigt die gegebenen Randwerte, Figur 5-7 illustriert den Extraktionsvorgang und Figur 5-8 die resultierende Lösung samt Absolutfehler. Kenndaten sind in Tabelle 5-9 zusammengetragen.



Figur 5-6. Die gegebenen Randwerte  $\gamma(s)$  (links) werden durch die Ränderzuordnungsfunktion  $s(\varphi)$  auf den Einheitskreis (rechts) verpflanz,  $\Gamma(\varphi) = \gamma(s(\varphi))$ . Es ist deutlich sichtbar, dass die erste Ableitung in allen Punkten auf dem Kreis, die Eckstellen entsprechen, unbeschränkt werden. Fette Linien deuten die Dirichlet-Ränder  $\partial\Omega_u$  an, magere Linien die von Neumann-Ränder  $\partial\Omega_q$ . Die gegebenen Randwerte werden aus Real- und Imaginärteil der Funktion  $f(\omega) = 0.001 (13 + \omega) (2 + \omega)^2$  gewonnen.



**Figur 5-7. Demonstration der Extraktion von Singularitäten:** Wird die Extraktionsfunktion  $\dot{J}(\varphi)$  (oben links, gestrichelt) von  $J(\varphi)$  subtrahiert, resultiert die geglättete Funktion  $\bar{J}(\varphi)$  (oben rechts). Diese kann numerisch integriert werden,  $\bar{I}(z)$  (unten rechts) und resultiert nach der Addition der analytisch integrierten Extraktionsfunktion  $\dot{I}(z)$  (unten links, gestrichelt) im gesamten Cauchy-Integral  $I(z)$ . Das dargestellte Beispiel zeigt die Auswertung der Integrale auf dem Rand,  $z = \exp(i\varphi)$  für  $m=0$ . Die Ursache der kleinen Picks in  $\bar{J}(\varphi)$  und  $\bar{I}(z)$  liegt wahrscheinlich in numerischer Auslöschung. Sie könnten der Grund dafür sein, dass genau an diesen Stellen der Lösung der Fehler am grössten ist (Fig. 5-8).



Figur 5-8. Darstellung der zurückverpflanzten Lösung und des Gradienten samt zugehörigem Absolutfehler auf dem Gebietsrand. Es ist naheliegend, dass der maximale Fehler immer auf dem Rand auftritt. Zur Berechnung wurden 6000 Randstützstellen verwendet. Weil nur Vektor- und FFT-operationen ( $O(n)$  und  $O(n \ln n)$ ) vorkommen, können sehr viele Werte benutzt werden.

## 56 Eine Übersicht

Modul, Aufgabe	Aufwand (CPU-sec)	Kenndaten, Genauigkeit
DRWP Daten der Problemstellung generieren		6000 Randstützpunkte 5 kritische Stellen 2 davon Ecken
Subtotal	<u>3.03</u> 3.03	
SOLP Parameter der Lösung berechnen		6000 Fourtkoeffizienten 11 komplexe Extraktionskoeff.
Subtotal	<u>8.68</u> 8.68	
Lösungsparameter berechnen Total DRWP und SOLP	<u>11.72</u>	
FKR Auswertung für Lösung und Gradient		
Total	6000*0.001235 <u>.34</u>	6000 Punkte auf einem Kreis

*Tabelle 5-9. Kenngrößen und Aufwand in CPU-Sekunden zur Berechnung des Beispiels in den Figuren 5-6 bis 5-8. Die Rechnungen wurden auf einer Cyber 180-855 durchgeführt.*

Eine Bemerkung soll hier wiederholt werden: der am Ende des Kapitels 4 erwähnte Schritt (B) — Integration der gegebenen von Neumann-Bedingungen entlang dem Rand — wurde nicht explizit durchgeführt, da die gegebenen Randwerte (Fig. 5-6) direkt aus einer exakten Lösung berechnet werden, in diesem Beispiel aus

$$f(\omega) = \frac{(2 + \omega)^2 (13 + \omega)}{1000}. \quad (5.1)$$

Andererseits ist es durch dieses Vorgehen auch möglich, den Fehler der Lösung genau festzustellen. Figur 5-8 zeigt die entsprechenden Resultate. Aus dem Maximumprinzip für harmonische und subharmonische Funktionen [Henrici 74] folgt, dass die maximalen Werte und Verzerrungen der exakten Lösung von Potentialprobleme immer auf dem Rand auftreten. Es ist daher zu erwarten, dass auch die Fehler auf dem Rand maximal werden<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Alle bisher gerechneten Beispiele, etwa zwei Dutzend, bestätigen diese Vermutung.

**Genauigkeit und Aufwand: Diskussion der Einflussfaktoren**

Wie bereits angetönt, können Genauigkeit und Aufwand nicht durch einfache Ursachen-Wirkungsketten verstanden werden. Verschiedenste, teilweise kontrollierbare, teilweise aber auch durch die konkrete Problemstellung gegebene Grössen hängen alle miteinander zusammen. Es ist ohne riesigen Aufwand auch kaum möglich, alle Einflüsse und gegenseitigen Abhängigkeiten genau festzustellen und zu quantifizieren. Vielmehr äussern sie sich in der Erfahrung, die sich entwickelt, wenn man die Methode anwendet und mit ihr herumspielt, Parameter ändert und verschiedenste (Extrem-) Beispiele löst und die entstehenden Effekte genau beobachtet und im Zusammenhang zu verstehen versucht.

In diesem Sinn wollen die folgenden Ausführungen verstanden sein. Sie sollen mehr Diskussionsgrundlage sein als feste unabänderliche Tatsachen darstellen. Sicherlich lassen sich daraus Verbesserungsvorschläge der Methode selbst als auch der vorliegenden Implementation ableiten. Im besonderen sollen sie auch die Aussagen über das oben im Detail dargestellte Beispiel (Fig. 5-4 bis 5-9) vertiefen.

Eine Möglichkeit komplexe Systeme besser zu verstehen, besteht darin, sämtliche gegenseitigen Beeinflussungen wichtiger Faktoren so gut wie möglich zu bewerten (z.B. 0 bis 5 Punkte) und in einer Einflussmatrix [Vester 83] zusammenzutragen (Tab. 5-10 und 5-12). Aus der Aktivsumme AS (horizontale Summe) und der Passivsumme PS (vertikale Summe) jedes Einflussfaktors lassen sich vier verschiedene Indexe berechnen, die einer groben Beurteilung des Gesamtverhaltens des Systems dienen können:

$Q_{max}$ : maximales Verhältnis  $Q$  der Aktivsumme AS (horizontale Summe) und Passivsumme PS (vertikale Kolonnensumme) charakterisiert *aktivste* Faktoren, also Einflussgrössen die stark beeinflussen aber selbst wenig beeinflussbar sind (In den Tabellen 5-10 und 5-12 mit **a** gekennzeichnet).

$Q_{min}$ : minimales Verhältnis  $Q$ , weist auf *reaktivste* Faktoren hin, also solche, die hauptsächlich beeinflusst werden (**r**).



## 58 Eine Übersicht

$P_{max}$ : maximales Produkt  $P$  aus AS und PS, charakterisiert *kritische* Faktoren. Diese Grössen üben selbst einen grossen Einfluss aus, werden gleichzeitig aber auch selbst stark beeinflusst (**k**).

$P_{min}$ : minimales Produkt  $P$ , bezeichnet *puffernde* Faktoren, die weder selbst stark beeinflussbar sind, noch grossen Einfluss auf andere haben (**p**).

Um die Übersicht zu wahren und die einzelnen Zusammenhänge nicht allzu spekulativ beurteilen zu müssen, werden die zwei Pakete separat betrachtet.

Für die konforme Abbildung werden 14 Einflussfaktoren berücksichtigt (Die Angaben in Klammern beziehen sich auf das Beispiel der Figuren 5-3 bis 5-8)

- 1) Anzahl Punkte, die zur Gebietsdefinition verwendet werden (1451 Punkte)
- 2) Dichteverteilung dieser Punkte auf dem Rand (gleichmässige Verteilung)
- 3) Genauigkeit dieser Punkte (10 signifikante Stellen)
- 4) Anzahl Polygonecken, die das Gebiet umschreiben (4 Ecken)
- 5) Verteilung (kleinster/grösster Abstand) und Lage (nah/weit weg vom Gebiet) der Polygonecken (ziemlich gleichmässig, eher nah beim Gebiet)
- 6) Anzahl Werte, die die Quadraturformel benutzt (10 Punkte)
- 7) Abbruchkriterium des nichtlinearen Gleichungssystems (1.E-8 rel. Fehler)
- 8) Abbruchkriterium bei der Newton-Iteration bei der Bestimmung der Zwischenkurvenpunkte (1.E-8 rel. Fehler)
- 9) Dichteverteilung der Zwischenkurvenpunkte (kann nur geschätzt werden, rel. niedere Dichte in der Nähe ausspringender Ecken)
- 10) Kreisnähe der Zwischenkurve (maximale rel. Steigung  $\rho'(\varphi) / \rho(\varphi) = 0.63$ )

- 11) Anzahl benutzter Fourierkoeffizienten bei der Theodorsen-Iteration (6000 Koeffizienten)
- 12) Abbruchkriterium der Iteration (max. Veränderung  $< 1.E-10$  zwischen den letzten zwei Iterationen)
- 13) Gesamtaufwand zur Berechnung der konformen Abbildung (93.88 CPU-sek für Abbildungsparameter, Auswertung 0.006 sek/Punkt)
- 14) Genauigkeit der Gesamtabbildung (kann nur geschätzt werden: rel. Abweichung  $< 1.E-8$ )

Die Einflussmatrix<sup>1</sup> in Tabelle 5–10 verdeutlicht die wichtigsten Zusammenhänge bei der Berechnung der konformen Abbildung. Die Faktoren 1 bis 3 sind je nach Anwendung des Paketes mehr oder weniger direkt kontrollierbar<sup>2</sup>, die Faktoren 4 bis 8, 11 und 12 sind direkt wählbare Steuergrößen der entsprechenden Module, Faktoren 9 und 10 sind nur sehr indirekt beeinflussbar. Aufwand (13) und Genauigkeit (14) resultieren einerseits aus den meisten anderen Faktoren, andererseits haben Zielvorstellungen davon einen grossen Einfluss auf die Wahl vieler Faktoren.

Offenbar haben die Anzahl und die Verteilung der Polygonecken (Faktoren 4 und 5) einen grossen Einfluss auf die Rechnung (aktivste Elemente). In Tabelle 5–11 werden an einem Beispiel mehrere (resp. kein) Polygone für dasselbe Gebiet benutzt. Ausser der Lage und der Anzahl Polygonecken wurden alle anderen Steuerdaten unverändert belassen. Die Aufstellung belegt die Behauptung, dass Polygone, wenn überhaupt notwendig, möglichst eng um das Gebiet gelegt werden sollen, jedoch möglichst wenige Ecken aufweisen sollen.

---

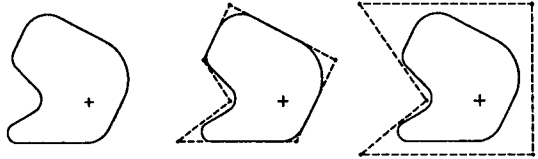
<sup>1</sup> Die Einflussmatrix ist nur eine einfache Variante solche Zusammenhänge darzustellen. Andere sind ebenfalls in [Vester 83] diskutiert.

<sup>2</sup> Zum Beispiel hängen die Gebietsdaten von den Möglichkeiten des benutzten Prozessors ab.

## 60 Eine Übersicht

Einfluss von ↓ auf →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	AS	Q	
G Anzahl gebiets- E definierende Punkte	1 \		①						①		③		⑤	⑤	15	2.1	
B Dichteverteilung der I Randpunkte	2	\							⑤					③	8	4.0 a	
E Genauigkeit der T Koordinaten	3	①	\			①	①	①			①			③	8	2.7	
S Anzahl Polygonecken	4			\						①			⑤	①	7	3.5 a	
C Verteilung und Lage der H Polygonecken	5				\				①	⑤			②	②	10	3.3 a	
W Anzahl Stützpunkte pro A Intervall bei Quadratur	6					\	①	②			①	①	②	②	9	3.0	
R Abbruchkriterium für Z nichtlin. Gleichungssyst.	7						\	③			①	①	②	②	9	1.8	
Genauigkeit der Zwischenkurvenpunkte	8							\	①		①	①	⑤	③	11	1.8	
T Dichteverteilung der H Zwischenkurvenpunkte	9								\		①	①		③	5	0.7	
E Kreisnähe der O Zwischenkurve	10									\	③			③	6	1.2	
D Anzahl Fourierkoeffizien- O ten bei der Iteration	11										\	②	②	③	7	0.4 r	
R Abbruchkriterium der Iteration	12											\	②	②	6	0.8	
Gesamtaufwand konforme Abbildung	13	③			③								\	③	9	0.3 r	
Genauigkeit der Gesamtabbildung	14	③	②	②	①	③	②	②	②			③	②	③	\	25	0.7
PS	7	2	3	4	3	3	5	8	7	6	16	8	28	35			
P	105	16	24	28	30	24	40	88	35	36	112	48	252	875			
		p	p	p	p	p								k	k		

Tabelle 5-10. Einflussmatrix einiger wichtiger Faktoren der Berechnung der konformen Abbildung. Es bedeuten: ① = kleiner Einfluss, ⑤ = grosser Einfluss, AS = Aktivsumme (Zeilensumme der Punkte), PS = Passivsumme (Kolonnensumme), Q = Quotient (AS/PS) und P = Produkt (AS PS). Daraus können aktive (a), reaktive (r), kritische (k) und puffernde (p) Faktoren abgelesen werden.



	kein Polygon	enges Polygon mit 6 Ecken	weites Polygon mit 5 Ecken
<b>GEBIET</b>			
Daten prüfen, polar umrechnen	<u>0.62</u> 0.62	<u>0.63</u> 0.63	<u>0.62</u> 0.62
Subtotal			
<b>SCHWARZ</b>			
Parameterproblem lösen	--	1.17	0.49
Zwischenkurve bestimmen	--	646*0.02817.96	646*0.02515.92
Overhead	--	<u>0.24</u>	<u>0.21</u>
Subtotal	--	<u>19.37</u>	<u>16.62</u>
<b>THEODOR</b>			
Iteration durchführen	95*0.33 31.35	24*0.33 7.93	42*0.33 13.87
Overhead	<u>4.00</u>	<u>2.02</u>	<u>2.01</u>
Subtotal	<u>35.35</u>	<u>9.95</u>	<u>15.88</u>
Abbildungsparameter			
Total GEBIET bis THEODOR	<u>35.97</u>	<u>29.95</u>	<u>33.12</u>
<b>ABBILD</b>			
5 Kreise, je 1000 Punkte	0.0005/Pkt.	0.01/Pkt.	0.01/Pkt.
Total	<u>2.48</u>	<u>50.00</u>	<u>42.91</u>

Kenndaten: GEBIET: 646 Ecken, SCHWARZ: 10-Punkte Quadraturformel, Abweichung der Ecken < 1.E-8, THEODOR: 1000 Fourterkoeffizienten, Genauigkeit < 1.E-4

*Tabelle 5-11. Auswirkungen bei der Variation der aktivsten Elemente der Methode. Nur die Lage und die Anzahl Ecken des Polygons wurden zwischen den drei Beispielen variiert. Folgerung: Wenn notwendig, sollen die Polygone möglichst eng, mit wenigen Ecken das Gebiet umschliessen.*

## 62 Eine Übersicht

Analoge Überlegungen können anhand der Einflussmatrix (Tabelle 5-12) für das Lösungsprozedere der verpflanzten Potentialprobleme angestellt werden.

Die folgenden Faktoren werden berücksichtigt (Angaben in Klammern beziehen sich wieder auf das Beispiel der Figuren 5-3 bis 5-8):

- 1) Genauigkeit der konformen Abbildung. Entspricht Faktor 14 in Tabelle 5-10 (<1.E-8)
- 2) Genauigkeit der gegebenen Randwerte (10 signifikante Stellen)
- 3) Anzahl gegebener Ableitungen an den kritischen Stellen. Davon hängt direkt ab, welche Extraktionskoeffizienten berechnet werden können. (Werte und erste Ableitung)
- 4) Verhalten der gegebenen Randwerte. (siehe Figur 5-6)
- 5) Anzahl Fourierkoeffizienten zur Berechnung der Lösungsparameter (6000 Koeffizienten)
- 6) Grad der Extraktion (Restfunktionen in  $C^1$ )
- 7) Anzahl Auswertungsstellen (6000 Punkte/Kreis)
- 8) Gesamtaufwand (Lösungsparameter in 11.72 CPU-sek, Auswertung samt Gradient 0.0012 CPU-sek/Punkt)
- 9) Genauigkeit der Lösung (Fig. 5-8)

Faktor 1 ist dabei Resultat des ersten Paketes (Tab. 5-10), Faktoren 2 und 3 hängen von der Verfügbarkeit problemspezifischer Daten ab, Faktoren 5 und 6 sind kontrollierbare Steuergrößen, der Faktor 4 ist völlig problemabhängig. Genauigkeit und Aufwand (8 und 9) sind, wie oben, sowohl Resultat wie auch Zielvorgabe der Rechnung.

Einfluss von ↓ auf →		1	2	3	4	5	6	7	8	9	AS	Q	
DRWP	Genauigkeit der konformen Abbildung	1	\			①				③	4	1.0	
	Genauigkeit der gegebenen Randwerte	2		\		①				③	4	4.0	
	Anzahl gegebener Ableitungen in krit. Punkten	3			\	③	⑤		①	③	12	6.0 <b>a</b>	
	Verhalten der gegebenen Randwerte	4				\	⑤	①		②	8	∞ <b>a</b>	
SOLP	Anzahl benutzte Fourierkoeffizienten	5				\		②	②	②	6	0.3 <b>r</b>	
	Grad der Extraktion	6					\		③	⑤	11	0.8	
FKR FEZ	Anzahl Auswertungsstellen	7				②		\	②	②	6	1.5	
Gesamtaufwand gemischtes Potentialproblem lösen		8	①				②	②	①	\	②	8	0.8
Genauigkeit der Lösung		9	③	①	②		②	⑤	①	②	\	16	0.7
PS		4	1	2	0	19	13	4	10	22			
P		16	4	24	0	114	143	24	80	352			
			<b>p</b>			<b>p</b>	<b>k</b>	<b>k</b>				<b>k</b>	

Tabelle 5-12. Einflussmatrix der Berechnung der gemischten Potentialprobleme. Es bedeuten: ① = kleiner Einfluss, ⑤ = grosser Einfluss, AS = Aktivsumme (Zeilensumme der Punkte), PS = Passivsumme (Kolumnensumme), Q = Quotient (AS/PS) und P = Produkt (AS PS). Daraus können aktive (**a**), reaktive (**r**), kritische (**k**) und puffernde (**p**) Faktoren abgelesen werden.

Auch hier sollen zwei Beispiele den Einfluss der aktivsten Faktoren illustrieren: Figur 5-13 stellt die problembeschreibenden Grössen dar. Die Randbedingungen werden aus der Funktion

$$f(\omega) = -2i \ln \left( 1 - \frac{\omega - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right)$$

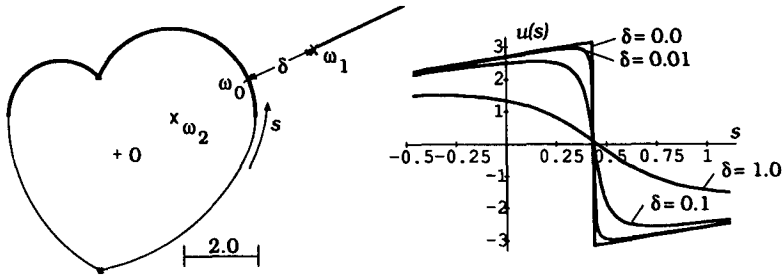
$$\omega_1 = \omega_2 + (\omega_0 - \omega_2) \left( 1 + \frac{\delta}{|\omega_0 - \omega_2|} \right) \tag{5.2}$$

$$\omega_0 = 3.52 + i 1.94$$

$$\omega_2 = 1.5 + i$$

gewonnen. Sie zeigt mit Ausnahme des in Figur 5-13b gezeigten Ausschnittes einen regelmässigen Verlauf. Die Tabelle 5-14 demonstriert den Einfluss der verschiedenen Randwertverläufe auf Aufwand und resultierende Genauigkeit. Tabelle 5-15 zeigt für

den Fall  $\delta = 1.0$  (Fig. 5-13) den Einfluss fehlender Angaben in den kritischen Randpunkten. Es lässt sich schliessen, dass die Extraktion bei kleinem zusätzlichem numerischem Aufwand eine immense Genauigkeitssteigerung bringt.



Figur 5-13. Die Problemstellung für die Tabellen 5-13 und 5-15. Eine logarithmische Singularität  $w_1$  liegt im Abstand  $\delta$  vom Punkt  $w_0$  (links). Bei  $\delta = 0$  weist die gegebene Randbedingung  $u(s)$  (rechts) einen Sprung auf.

	$\delta = 1.0$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.01$	$\delta = 0.0$ ohne Sprung-Extraktion	$\delta = 0.0$ mit Sprung-Extraktion
Aufwand in CPU-sec					
Drwp 4 (5) kritische Punkte	1.17	1.17	1.18	1.17	1.29
Solp 1000 Fourterkoeff.					
7 (9) Extr. koeffizienten	0.39	0.39	0.39	0.39	0.47
Fkr 1000 Punkte auf Rand	<b>0.92</b>	<b>0.93</b>	<b>0.93</b>	<b>0.93</b>	<b>0.98</b>
Totalaufwand (inkl. Overhead)	<u>2.92</u>	<u>2.94</u>	<u>2.95</u>	<u>2.90</u>	<u>3.20</u>
Absolutfehler der Lösung $u$					
in der $L_\infty$ - Norm	3.E-3	4.E-3	2.E-2	3.E-2	4.E-3
in der $L_2$ - Norm	5.E-3	5.E-3	2.E-1	3.E-1	5.E-3
in der $L_1$ - Norm	7.E-2	7.E-2	4.E+0	6.E+0	8.E-2
Absolutfehler von $ \text{grad } u $					
in der $L_\infty$ - Norm	4.E-1	2.E-1	5.E+1	1.E+2	5.E-1
in der $L_2$ - Norm	9.E-1	5.E-1	2.E+2	3.E+2	8.E-1
in der $L_1$ - Norm	2.E+1	4.E+0	2.E+3	4.E+3	2.E+1

Tabelle 5-14. Auswirkung des Verhaltens der gegebenen Randbedingungen. Aus dem Vergleich der beiden Fälle  $\delta = 0$  wird der Einfluss der Extraktion sehr deutlich: grosser Genauigkeitsgewinn ohne grossen zusätzlichen numerischen Aufwand.

$\delta = 1.0$	Werte und 1.Ableitung gegeben	nur Werte gegeben	keine Extraktion
Absolutfehler der Lösung $u$ in der $L_\infty$ - Norm	3.E-3	4.E-3	4.E+0
in der $L_2$ - Norm	5.E-3	8.E-3	8.E+0
in der $L_1$ - Norm	7.E-2	2.E-2	2.E+2
Absolutfehler von $ \text{grad } u $ in der $L_\infty$ - Norm	4.E-1	9.E-1	2.E+3
in der $L_2$ - Norm	9.E-1	2.E+0	2.E+3
in der $L_1$ - Norm	2.E+1	4.E+1	5.E+4

*Tabelle 5-15. Auswirkung der Anzahl bekannter Ableitungen in kritischen Randpunkten. Sind nur die Werte bekannt (Mitte) bleibt zwar die Genauigkeit der Lösung erhalten, nicht aber diejenige des Gradienten. Ohne Extraktion (rechts) verlieren die Resultate jede Bedeutung.*

### **Zur Abgrenzung gegenüber anderen Verfahren**

Auch diese Diskussion kann nicht genau und abschliessend geführt werden. Zu viele Spezialisierungen, Ansätze und Einflussgrössen sind möglich. Deshalb muss hier eine einfache, grobe Charakterisierung genügen. Es werden auch nur zwei andere Verfahren, die Finite Elemente Methode (FEM) und die Rand- oder Boundary-Element Methode (BEM) zur Abgrenzung benutzt. Sie werden je nach 5 Gesichtspunkten beschrieben:

**Grundlage:** Auf welchen mathematischen Formulierungen beruht die Methode?

**Variablen:** In welchen wird das Problem beschrieben und gelöst?

**Hauptschritte:** Aus welchen Teile besteht der Lösungsweg?

**Anwendungsgebiete:** Für welche Problemklassen kann die Methode verwendet werden, wo nicht?

**Spezielle Eigenschaften:** Welches sind der Methode eigene Charakteristika?

Welche Methode in einer bestimmten Situation die beste Lösung ist, welche Methode schliesslich wirklich angewendet wird hängt bestimmt noch von ganz anderen Kriterien ab. Vielleicht erleich-



tern die folgenden Beschreibungen diese Differenzierung ein wenig.

Die FEM ist eine sehr allgemeine, häufig und intensiv benutzte Methode<sup>1</sup>:

**Grundlage:** Meist eine variationelle Formulierung des Problems.

Partielle Integrationen liefern dann die Grundgleichungen, welche diskretisiert werden.

**Variablen:** Die zu diskretisierenden Funktionen werden lokal durch Formfunktionen approximiert (Einteilung des Gebietes in finite Elemente). Die Variablen entsprechen dabei normalerweise direkt physikalischen Grössen in den Knotenpunkten der Elemente. Die Lösung muss also nicht erst noch ausgewertet werden.

**Hauptschritte:** (1) Das Gebiet (Inneres und Oberfläche) in Elemente aufteilen. Ein Prozess, der oft durch spezielle Softwarewerkzeuge (Preprozessoren) erleichtert wird. Trotzdem handelt es sich speziell bei 3D Problemen häufig um einen arbeitintensiven Teil. (2) Die Elementmatrizen aus problemspezifischen Daten generieren. (3) Diese Elementmatrizen zu einem globalen Gleichungssystem kombinieren, wobei Anfangs- und Randbedingungen ebenfalls berücksichtigt werden. Da die Formfunktionen lokal gewählt sind, ist die resultierende Systemmatrix meist schwach besetzt. (4) Das Gleichungssystem lösen.

**Anwendungsgebiete:** Sehr breites Anwendungsspektrum, inklusive nichtlineare Probleme. Ein sehr generell anwendbares Werkzeug für die meisten Anfangs- und/oder Randwertprobleme.

**Spezielles:** Gerade weil der Ansatz lokal ist, ist es nur mit grossem Aufwand<sup>2</sup> möglich in der Nähe von Singularitäten, etwa bei Spannungsspitzen an einspringenden Ecken, genaue Aussagen

---

<sup>1</sup> Einführungsliteratur ist etwa [Bathe and Wilson 76, Zienkiewicz 77, Schwarz 81].

<sup>2</sup> Beispielsweise durch starke Netzverfeinerung oder spezielle Formfunktionen.

zu machen. In solchen und in vielen anderen Fällen scheint die Kombination der FEM mit anderen Methoden sehr fruchtbar zu sein. Im allgemeinen verlangt die Benutzung dieser Methode ein gutes Fingerspitzengefühl, die Hauptberechnung muss in der Regel durch Vorstudien gut vorbereitet werden um sichere Aussagen machen zu können

Die BEM ist als solches ein jüngerer Kind der Ingenieurwissenschaften, beruht aber auf mathematischen Methoden, die schon sehr lange bekannt sind<sup>1</sup>:

**Grundlage:** Beruht auf der zweiten Greenschen Formel für den Laplaceoperator, auf dem Bettitheorem für Elastizitätsprobleme, respektive auf der Theorie der adjungierten Operatoren und der Existenz von Fundamentallösungen<sup>2</sup> im allgemeinen. Durch Integraltransformationen der Differentialgleichungen und speziellen Ansätzen (Fundamentallösungen) für die Gewichtungsfunktionen, wird die Berechnung möglichst auf Integraloperatoren über den Rand allein reduziert.

**Variablen:** Funktionen werden ähnlich wie in der FEM durch lokale Formfunktionen via Elemente approximiert — diesmal muss jedoch nur der Rand, die Oberfläche des Problemgebietes diskretisiert werden. Dies wirkt sich speziell bei 3D Problemen positiv auf den Arbeitsaufwand bei der Diskretisation aus. Meist sind die Variablen wieder physikalische Größen in den Knoten auf dem Rand.

**Hauptschritte:** (1) Die Oberfläche diskretisieren. (2) Die vollständige Lösung auf dem Rand berechnen. Dazu muss erst ein Gleichungssystem für die fehlenden Randwerte generiert und gelöst werden. Die Systemmatrix ist nicht aus Elementmatrizen zusammengesetzt, sie ist normalerweise voll und nicht-

---

<sup>1</sup> Eine Einführung in die BEM wird in [Brebba 84] gegeben. Eine frühe Quelle, die im Prinzip das Verfahren skizziert ist [Treffitz 26].

<sup>2</sup> In der Literatur oft auch als Greensche Lösungen beschrieben. Es sind Lösungen der Differentialgleichung, die explizit bekannt sein müssen, jedoch keine speziellen Randbedingungen erfüllen.

symmetrisch<sup>1</sup>. Der Lösungsaufwand kann je nach Dimension des Systems beträchtlich sein. (3) Die Lösung im Gebietsinneren auswerten. Im Gegensatz zur FEM, wo die Lösung in erster Linie in den Knoten berechnet wird, kann die BEM die Lösung an beliebigen Punkten auswerten: die Lösung im Inneren lässt sich aus der vollständigen Lösung auf dem Rand berechnen.

**Anwendungsgebiete:** Da zur Formulierung der Grundgleichung eine Fundamentallösung explizit bekannt sein muss, beschränkt sich der Anwendungsbereich auf lineare, ortsunabhängige partielle Differentialoperatoren<sup>2</sup>. Nichtlineare Randbedingungen können hingegen behandelt werden. Im Rahmen dieser Einschränkungen handelt es sich jedoch um ein sehr generell einsetzbares Werkzeug. Insbesondere die Zweiteilung in die Berechnung der fehlenden Randwerte und in die davon unabhängige Auswertung der analytischen Lösung an beliebigen Punkten bringen in vielen Fällen Vorteile.

**Spezielles:** Diverse Bestrebungen zielen darauf ab, die BEM mit anderen Methoden zu kombinieren<sup>3</sup>. Dies scheint besonders in Fällen vielversprechend, wo das Problem in Gebiete mit linearen und solchen mit nichtlinearen Differentialoperatoren unterteilt werden kann.

Die in dieser Arbeit neu vorgestellte Methode spielt bezüglich Spektrum der Anwendungsgebiete und Vielseitigkeit im Vergleich zu FEM und BEM eine Aussenseiterrolle. In speziellen Fällen jedoch kann sie nicht zu unterschätzende Vorteile haben:

**Grundlage:** Formulierung als RHP respektive Koppelungsproblem.  
Wie die BEM eine Methode, die die Berechnung auf den Rand reduziert.

---

<sup>1</sup> Unter Umständen ist sie jedoch diagonaldominant.

<sup>2</sup> Inhomogenitäten in den Differentialgleichungen bewirken u. U. Terme die nicht auf den Rand reduziert werden können.

<sup>3</sup> Für eine sehr enge Problemklasse (ebene Dirichlet- oder von Neumann-Problemen) können nach einer konformen Abbildung schnelle Algorithmen (FFT) zur Lösung benutzt werden [Haas 85].

**Variablen:** Es wird ein globaler Ansatz verwendet, denn sowohl die Fourierreihen, als auch die Extraktionsfunktionen sind Ansätze, die für das ganze Gebiet gelten. Entsprechend sind die Variablen (Fourier- und Extraktionskoeffizienten, Integrationskonstanten) keine physikalischen Größen, die Lösung muss nachträglich ausgewertet werden.

**Hauptschritte:** (1) Rand definieren. (2) Konforme Abbildung berechnen. (3) Lösungsparameter bestimmen. (4) Lösung auswerten.

**Anwendungsgebiete:** Spezielle, ebene Probleme, die auf Laplace-, Poisson- oder Bipotentialprobleme reduziert werden können. Es können auch nur spezielle Kombinationen von Randbedingungen behandelt werden<sup>1</sup>. Gewisse Erweiterungen auf nichtlineare Probleme sind denkbar<sup>2</sup>.

**Spezielles:** Da die Berechnung der Lösung des verpflanzten Problems wesentlich auf schnellen Algorithmen beruht, sind viele Situationen vorstellbar, wo diese Methode sehr sinnvoll sein kann: Parameterstudien der Randbedingungen auf dem gleichen Gebiet, nichtlineare Randbedingungen, Iteration nichtlinearer Poissonprobleme, usw. Kapitel 6 geht auf diese Möglichkeiten vertieft ein.

---

<sup>1</sup> Generell können nur statische und kinematische Randbedingungen (Zwangs- bez. natürliche Randbedingungen) auf komplementären Teilen vorgegeben werden. Andere Kombinationen lassen sich nicht auf ein Koppelungsproblem überführen.

<sup>2</sup> Mehr dazu im Kapitel 6.

Leer - Vide - Empty

## Kapitel 6

### Ausblick

---

- **«Keypoints» der Methode:**
  - **Kombination von drei Bausteinen**
  - **Konsequenter Einsatz effizienter und genauer Algorithmen**
  - **Zusammenspiel analytischer und numerischer Methoden**
- **Prinzipielle Erweiterungsmöglichkeiten auf**
  - **andere Problemstellungen (Differentialoperatoren)**
  - **andere Gebietsklassen**
  - **andere analytische und numerische Methoden**
- **Erweiterungen für Probleme des Laplaceoperators:**
  - **Poissonprobleme, nichtlineare Inhomogenitäten**
  - **nichtlineare Randbedingungen, Anwendungsgrenzen**
  - **Ecken im Unendlichen, Äussere und mehrfach zusammenhängende Gebiete**
- **Anwendung auf Probleme des Bipotentialoperators:**
  - **Ebene Probleme der Elastostatik**
  - **Plattenprobleme**

Noch einmal soll das Zusammenspiel der verschiedenen Teile der Methode auf eine andere Art<sup>1</sup> veranschaulicht werden (Fig. 6–1): die ursprüngliche Problemstellung (Fig. 1–1) wird zweimal transformiert (RHP, konforme Verpflanzung) bevor spezielle Methoden (Extraktion, FFT) eine effiziente Lösung erlauben. Der konsequente Einsatz genügend genauer und möglichst effizienter Algorithmen bei jedem Lösungsschritt (Module der konformen Abbil-

---

<sup>1</sup> Vergleiche auch die Figur 1-2 und den Anhang A.

dung, Berechnen der Cauchy-Integrale, usw.) bewirken einen guten Gesamtalgorithmus<sup>1</sup>.

Es drängt sich die Frage nach der Erweiterung der in dieser Arbeit vorgestellten Methode auf. Diese Diskussion soll beschränkt bleiben

- (1) auf Probleme, die mit Hilfe der komplexen Analysis auf Koppelungsprobleme reduziert werden können,
- (2) auf stationäre, elliptische Probleme und
- (3) auf Lösungsmethoden, die wesentlich auf schnellen Algorithmen beruhen, trotzdem aber eine hohe Genauigkeit anstreben.

Die erste Einschränkung schliesst alle Probleme aus (insbesondere räumliche), die sich nicht auf zwei Dimensionen reduzieren lassen. Die Reduzierbarkeit auf Koppelungsprobleme ist allgemeiner als diejenige auf RHPs. Die dritte Forderung impliziert eine Koordinatentransformation auf ein Standardgebiet, da schnelle Algorithmen meist nur auf spezielle Gebiete angewendet werden können. Zusammen mit der ersten Forderung (Benutzung der komplexen Analysis) heisst das, dass andere als konforme Abbildungen von der Diskussion ausgeschlossen werden<sup>2</sup>.

Entsprechend den drei Bausteinen (Fig. 6–1) bieten sich im wesentlichen drei Fragenkomplexe an:

Welche anderen Probleme lassen sich durch komplexe Formulierungen als Koppelungsprobleme darstellen? Welche Zusatzbedingungen sind zu erfüllen? Wie gewinnt man aus deren Lösung die physikalischen Grössen?

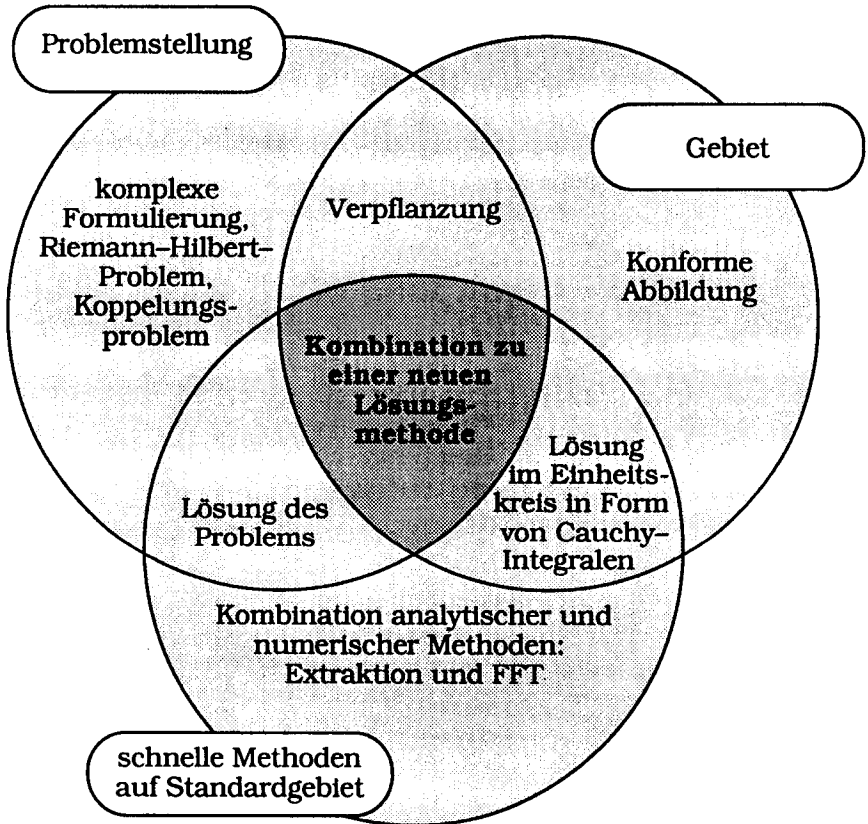
Auf welche Gebietsklassen lässt sich die konforme Abbildung erweitern? Wie aufwendig sind entsprechende numerische Algorithmen? Welchen Einfluss haben die Gebietsklassen auf die Formulierung der Lösung?

---

<sup>1</sup> Vergleiche Schluss des Kapitels 4 und Kapitel 5.

<sup>2</sup> Die Diskussion ob und wie andere Transformationen anwendbar sind [Thompson et al.85], würden den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Welche Kombination von numerischen und analytischen Methoden lösen die auf Standardgebiete transformierte Probleme? Sind andere Standardgebiete als der Einheitskreis denkbar? Welche? Welcher numerische Aufwand ist notwendig zur Problemlösung?



Figur 6–1. Die Verknüpfung der Teile zu einer neuen Lösungsmethode. Diese Darstellung erlaubt eine Diskussion der prinzipiellen Erweiterungsmöglichkeiten der Methode.

Selbstverständlich sind diese drei Problemkreise wieder untereinander verknüpft, voneinander abhängig. Um die Diskussion überschaubar zu gestalten wird sie in zwei Teilen geführt: als erstes



werden Probleme des Laplaceoperators betrachtet, insbesondere Erweiterungen auf gemischte Poissonprobleme, auf andere (auch nichtlineare) Randbedingungen und auf andere Gebietsklassen (mehrfach zusammenhängende, äussere, mit Ecken im Unendlichen, usw.). Als zweites wird eine andere Problemklasse zur Sprache kommen — die des Bipotentialoperators — insbesondere dessen Anwendungen auf ebene Probleme der Elastostatik und auf Kirchhoffsche Plattenprobleme.

### **Erweiterung auf Poissonprobleme: schnelle Poissonlöser für gemischte Probleme**

Die ursprüngliche Problemstellung (Fig. 1-1) kann durch eine Inhomogenität  $r$  auf gemischte Poissonprobleme

$$\begin{aligned} \Delta u &= r && \text{in } \Omega \\ u(s) &= u_0(s) && \text{auf } \partial\Omega_u \\ q(s) &:= \frac{\partial u}{\partial n}(s) = q_0(s) && \text{auf } \partial\Omega_q \end{aligned} \quad (6.1)$$

erweitert werden. Die Funktion  $r$  ist entweder eine gegebene ortsabhängige Funktion (linearer Fall), oder aber auch von der Lösung  $u$  selbst abhängig<sup>1</sup> (nichtlinearer Fall), allenfalls sogar auch von deren höheren Ableitungen. Die hier weiterverfolgten Lösungsstrategien beruht in allen Fällen auf der Bestimmung einer partikulären Lösung  $p$ , mit deren Hilfe das Problem (6.1) für die Differenz  $u - p$  auf ein äquivalentes gemischtes Potentialproblem führt. Die Lösung wird in vier Schritten berechnet:

- (1) Finde eine partikuläre Lösung  $p$ , die  $\Delta p = r$  erfüllt. Randbedingungen sind keine zu beachten.
- (2) Formuliere das gemischte Potentialproblem für  $\hat{u} := u - p$  mit den Randbedingungen  $\hat{u} := u_0 - p$  auf  $\partial\Omega_u$  und  $\hat{q} = q_0 - \partial p / \partial n$  auf  $\partial\Omega_q$ .
- (3) Löse dieses Potentialproblem durch das in den vorherigen Kapiteln vorgestellte Verfahren.

<sup>1</sup> Dazu gehört auch die Helmholtzgleichung und das Eigenwertproblem, die beide linear sind.

(4) Bilde die Lösung von (6.1) durch die Superposition

$$u := \tilde{u} + p.$$

Ist  $r$  von  $u$  unabhängig (linearer Fall), genügt das einmalige Durchlaufen der vier Punkte. Im nichtlinearen Fall führt eventuell eine Iteration

$$\Delta u_{n+1} = r_n := r(u_n, \dots) \quad (6.2)$$

zum Ziel, wobei in jedem Iterationsschritt ein lineares Poissonproblem (Schritte (1) bis (4)) gelöst werden muss. Die Konvergenz, Methoden der Konvergenzbeschleunigung<sup>1</sup> und numerische Stabilität müssten dabei speziell untersucht werden.

Die Effizienz eines solchen schnellen Poissonlösers für gemischte (nichtlineare) Probleme hängt wesentlich vom Aufwand zur Berechnung der partikulären Lösung  $p$  ab. Eine Möglichkeit dazu bieten bereits bestehende schnelle Poissonlöser<sup>2</sup>, z.B. [Seewald 85]. Diese funktionieren jedoch für Standardgebiete, das Problem, insbesondere  $r$ , müsste daher erst konform verpflanzt werden. Günstig wäre dabei, wenn die Berechnung auf den Rand reduzierbar wäre, was allerdings nur dann möglich ist, wenn  $r$  einem Gradientenfeld entspricht. In allgemeineren Fällen muss jedoch die konforme Abbildung samt Gradient auf einem ganzen Netz von Punkten im Inneren des Gebietes bestimmt werden, ein Aufwand, der relativ gross sein kann.

Ist die Abbildung jedoch einmal berechnet, kann eine partikuläre Lösung des verpflanzten Problems<sup>3</sup>

$$\Delta U(z) = R(z) := r(\omega(z)) / |\omega'(z)|^2 \quad \text{in } D \quad (6.3)$$

<sup>1</sup> Es bietet sich beispielsweise eine Konvergenzbeschleunigung durch modifizierte Iterationen höheren Grades, mit Über- oder Unterrelaxation, usw. an [Hagemann and Young 81].

<sup>2</sup> Die meisten dieser Algorithmen lösen Poissonprobleme mit einfachen Randbedingungen (Dirichlet- oder von Neumann-Bedingungen) auf Standardgebieten (Kreis, Rechteck, usw.).

<sup>3</sup> Hier wird dieselbe Nomenklatur für die Verpflanzung wie in der Figur 2-1 verwendet.

durch einen schnellen Poissonlöser berechnet werden<sup>1</sup>, beispielsweise indem ein einfaches Dirichletproblem ( $p(s) = 0$  auf dem ganzen Rand) gelöst wird. Im nichtlinearen Fall dürfte daraus, Konvergenz vorausgesetzt, ein recht schneller Algorithmus resultieren da die konforme Abbildung nur einmal zu Beginn bestimmt werden muss.

### **Erweiterung der Randbedingungen: Parameterstudien, nicht-lineare Bedingungen, Grenzen der Anwendbarkeit**

Eine andere, offensichtliche, aber eventuell sehr nützliche Anwendung der vorgestellten Lösungsmethode, sind Parameterstudien der Randbedingungen: wenn also sehr viele verschiedene Potentialprobleme auf demselben Gebiet gelöst werden sollen.

Daraus ergibt sich eine nächste Erweiterung beinahe schon implizit: die Lösung gemischter Potentialprobleme mit nichtlinearen Randbedingungen —  $u(s) = f_u(u(s), q(s), s, \dots)$  auf  $\partial\Omega_u$  und  $q(s) = f_q(u(s), q(s), s, \dots)$  auf  $\partial\Omega_q$ . Damit könnten beispielsweise stationäre Wärmeleitungsprobleme gelöst werden, die Konvektions- und Strahlungsrandbedingungen berücksichtigen. Analog zu (6.2) ist auch hier eine Iteration denkbar,

$$\begin{aligned} \Delta u_{n+1} &= 0 && \text{in } \Omega \\ u_{n+1} &= f_u(u_n, q_n, s, \dots) && \text{auf } \partial\Omega_u \\ q_{n+1} &= f_q(u_n, q_n, s, \dots) && \text{auf } \partial\Omega_q \end{aligned} \quad (6.4)$$

Konvergenz, Konvergenzbeschleunigung und numerische Stabilität müssten auch hier speziell untersucht werden.

Die Kombination von nichtlinearen Poissonproblemen (6.2) mit gemischten, nichtlinearen Randbedingungen (6.4) könnte ebenfalls Gegenstand lohnenswerter weiterer Untersuchungen sein. Jeder Iterationsschritt bezüglich der Randbedingungen (6.4) würde eine Iteration (6.2) beinhalten.

---

<sup>1</sup> Genaue Lösungen sind dabei wohl nur für genügend glatte Inhomogenitäten  $R$  zu erwarten, da schnelle Poissonlöser meist auf deren diskreter Fourieranalyse beruhen.

Eine Bemerkung bezüglich Problemen, wie sie im Gebiet der Strukturoptimierungen auftreten: nichtlineare Problemstellungen, bei denen die Gebietsform selbst auch variabel ist und von der Lösung abhängt. Auch hier sind iterative Lösungsstrategien denkbar. Der Aufwand würde wahrscheinlich unverhältnismässig gross, weil die Nachführung und Neuberechnung der konformen Abbildung bei jedem Iterationsschritt notwendig wäre.

Bei allen diesen Erweiterungen der Methode darf eine wichtige Grenze der Anwendbarkeit nicht übersehen werden: es ist nicht möglich die Methode um die Randbedingung

$$\alpha(s)u(s) + \beta(s)q(s) = \gamma(s) \quad \text{auf } \partial\Omega_{uq} \quad (6.5)$$

zu erweitern<sup>1</sup>. Um äquivalente Riemann-Hilbert-Problem (RHP) respektive Koppelungsprobleme formulieren zu können (1.2), was eine fundamentale Voraussetzung der Lösungsmethode ist, musste bereits die von Neumann-Bedingung entlang dem Rand integriert werden (1.5). Für gemischte Randbedingungen (6.5) besteht keine entsprechende Möglichkeit. Solche Bedingungen können also nicht durch diese Methode gelöst werden.

Eine letzte Erweiterung, die in diesem Abschnitt besprochen werden soll, ist diejenige auf Randwerte  $u_0(s)$  und  $q_0(s)$  mit diverssten Arten von Singularitäten. In solchen Fällen müssten diesen Singularitäten entsprechende Extraktionsfunktionen bestimmt werden (analog zu Kapitel 4 resp. 10). Insbesondere wäre es möglich, auf diese Weise auch distributiv verteilte Randbedingungen<sup>2</sup> zu berücksichtigen.

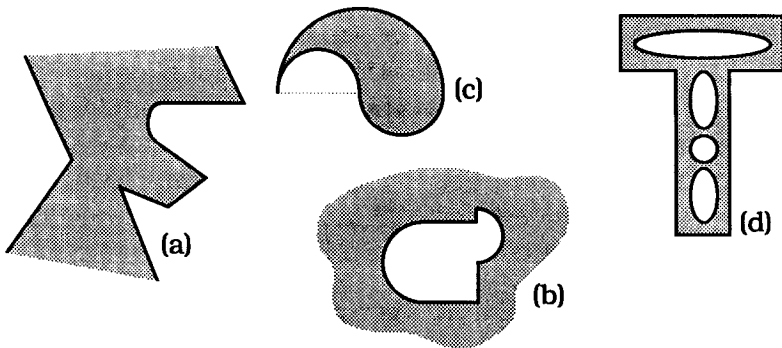
- 
- 1 Bei diesem gemischten Typ von Randbedingung wären  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  reelle, gegebene Funktionen, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  nicht gleichzeitig verschwinden dürfen.
  - 2 Solche können als verallgemeinerte Einzelkräfte, die am Rand angreifen, aufgefasst werden.

### Erweiterungen bezüglich der konformen Abbildung: andere Gebietsklassen und numerische Konstruktionen

Drei Aspekte werden betrachtet:

- Die Erweiterung auf andere Gebietsklassen
- Genauere Bestimmung der Abbildung in Ecknähe
- Das Problem des "Crowding"

Zur Erweiterung auf andere Gebietsklassen (Fig 6-2): die Konstruktion der konformen Abbildung, wie sie in den Kapiteln 2 und 8 beschrieben wird, ist beschränkt auf endliche, einfach zusammenhängende Gebiete, deren Ecken durch ein das Gebiet umschreibendes Polygon approximierbar sind.



Figur 6-2. Erweiterung der Gebietsklasse auf offene Gebiete mit Ecken im Unendlichen (a), äussere Gebiete (b), Gebiete mit Ecken, die nicht durch ein umschriebenes Polygon eliminiert werden können (c) und mehrfach zusammenhängende Gebiete (d).

Jede dieser Einschränkungen kann in einem gewissen Sinn gelockert werden. Das Softwarepaket SCPACK [Trefethen 82] beispielsweise, erlaubt Polygonecken im Unendlichen. Damit können offene Gebiete berücksichtigt werden. Die Ausdrücke für die Lösung des RHPs (3.18) bis (3.22) müssten allerdings angepasst werden [Muskhelishvili 53], was sich jedoch nur wenig auf den resultierenden Algorithmus auswirken würde.

Ähnlich einfach wirkt sich die Anwendung auf äussere Gebiete aus<sup>1</sup>. Auch hier wären einige unerhebliche Korrekturen notwendig. Damit wäre es allerdings möglich, etliche Problemklassen der Fluidodynamik und der Theorie der elektrostatischen Felder zu lösen.

Die Beschränkung auf Ecken, die durch ein umschriebenes Polygon eliminiert werden, kann dadurch abgeschwächt werden, dass spezielle Vorabbildungen entweder die Ecken einzeln eliminieren [Gutknecht 83] oder das Gebiet auf eine Zwischenkurve abbilden, um das ein entsprechendes Polygon gelegt werden kann. Die Berechnung der Koeffizienten der Entwicklung der konformen Abbildung (Kapitel 8) müssten entsprechend modifiziert werden.

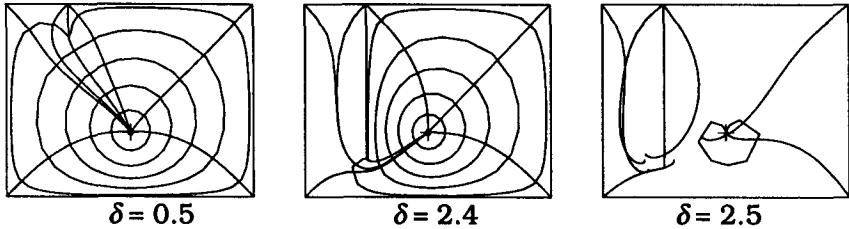
Die aufwendigste und wahrscheinlich schwierigste der hier vorgeschlagenen Erweiterungen der Gebietsklasse ist diejenige auf mehrfach zusammenhängende Gebiete. Die Entwicklung entsprechender numerischer Methoden für die Berechnung der konformen Abbildung ist schwierig und langwierig. Einige Module für zweifach zusammenhängende Gebiete sind jedoch bereits publiziert worden [Daepfen 88]. Es stellt sich insbesondere auch die Frage nach der Wahl des Standardgebietes, das den richtigen topologischen Zusammenhang aufweisen muss. Der Lösungsalgorithmus entsprechender RHPs hängt wesentlich von dieser Wahl ab.

Zur genaueren Repräsentation des Verhaltens der Ecksingularitäten: wie an mehreren Stellen erwähnt, liegt die Zwischenkurve nach der Schwarz-Christoffel-Transformation in  $C^1$ , wird jedoch durch die modifizierte Theodorsen-Abbildung durch eine  $C^\infty$ -glatte Kurve approximiert. Dies wirkt sich in der maximal erreichbaren Genauigkeit der Lösung aus: die Extraktion der Ecksingularitäten macht nur bis zu einem gewissen Grad einen Sinn (Kapitel 10.1d). Unter Umständen wäre jedoch eine Extraktion bis zu einem höhe-

---

<sup>1</sup> Probleme in der ganzen Ebene, ohne einem einfach zusammenhängenden Loch.

ren Grad und die Behandlung von Randunstetigkeiten höheren Grades<sup>1</sup> wünschenswert. Statt mit Polygonen könnten die Ecken mit Kreisbogenvielecken umschrieben werden<sup>2</sup>, oder, wie oben, spezielle Vorabbildungen benutzt werden, welche die Ecken einzeln bis zu einem höheren Grad eliminieren [Gutknecht 83].



	$\delta = 0.5$	$\delta = 1.0$	$\delta = 1.5$	$\delta = 2.0$	$\delta = 2.2$	$\delta = 2.3$	$\delta = 2.4$	$\delta = 2.5$
Aufwand Parameterberechnung der Schwarz-Christoffel-Abbildung	2.52	3.07	3.71	6.42	6.75	15.13	10.71	28.64

keine Konvergenz bei  $\delta = 2.5$

Tabelle 6-3. Je grösser die Schnittlänge  $\delta$ , desto grösser das «Crowding». Entsprechend steigt der Aufwand (in CPU-sec) zur Parameterberechnung (20 Punkte Quadraturformel, Genauigkeit  $< 1.E-8$ ). Bei  $\delta = 2.4$  liegen die Urbilder der Ecken zum Teil weniger als  $1.E-4$  auseinander.

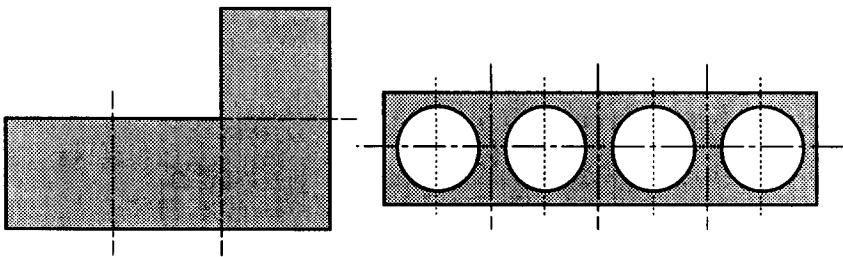
Zum «Crowding»-Phänomen (Tab. 6-3): obwohl die konforme Abbildung zwischen zwei Gebieten nicht eindeutig ist — es bleiben grundsätzlich drei reelle Parameter frei wählbar — kann bei bestimmten Gebieten nicht verhindert werden, dass die Verzerrungen der Abbildungsfunktion<sup>3</sup> auch im Inneren desselben Gebietes Werte über mehrere Grössenordnungen annehmen können. Dies wirkt sich auf die Genauigkeit der Lösung aus, da Auslöschung und Rundungsfehler in der numerischen Berechnung kaum aus-

1. Zum Beispiel Stellen des Randes an denen die Krümmung sprunghaft ändert.
2. In die Berechnung der konformen Abbildung von Kreis auf Kreisbogen-vielecke ist allerdings ein Integrodifferentialoperator involviert, was die Berechnungsalgorithmen entsprechend aufwendig macht [Bjørstad and Grosse 87].
3. Der Betrag des Gradienten der Abbildungsfunktion.

bleiben. Dieses Problem ist nicht einfach zu beheben. Beschränkt man sich auf konforme Abbildungen<sup>1</sup>, kann allenfalls auf ein anderes Standardgebiet ausgewichen werden. Wie der Lösungsalgorithmus des entsprechenden RHPs aussehen würde, müsste allerdings erst untersucht werden.

### Berücksichtigung der Symmetrie

Bei allen in diesem Kapitel diskutierten Vorschlägen kann immer auch untersucht werden, wie die Berücksichtigung von Symmetrien das Verfahren effizienter machen könnte<sup>2</sup>. Dabei darf jedoch nicht nur an klassische, einfache Symmetrie gedacht werden, sondern es müssten auch erweiterte Symmetrieklassen (Fig. 6–4) berücksichtigt werden [Hersch 65, Chan 76, Siefel und Fässler 79].



Figur 6–4. Beispiele erweiterter Symmetrien: die konsequente Berücksichtigung von allen Arten von Symmetrien dürfte in vielen Fällen zu einer Effizienzsteigerung führen.

- 
- <sup>1</sup> Andere Koordinatentransformationen (z.B. allgemeine elliptische [Thompson et al. 85] lassen viele Parameter offen, so dass die Verzerrungen kontrolliert werden können. Es fragt sich dann allerdings, wie der Lösungsalgorithmus formuliert werden muss.
  - <sup>2</sup> Einige Module der Implementation benutzen bereits Informationen bezüglich einfacher Spiegel- und Drehsymmetrien.



### Erweiterung auf Bipotentialprobleme: ebene Elastostatik- und Plattenprobleme

Als letzter Punkt dieses Kapitels soll die Anwendung des Verfahrens auf eine andere Problemklasse diskutiert werden: auf Probleme des Bipotentialoperators,

$$\Delta \Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (6.6)$$

mit den Anwendungen ebener elastischer Verzerrungs- respektive Spannungszustand (EVZ respektive ESZ) und Kirchhoffsche Plattentheorie (KIP)<sup>1</sup>.

Im Gegensatz zu Potentialproblemen, wo nur eine analytische Funktion zu bestimmen ist, müssen zwei komplexe in  $\Omega$  analytische Funktionen  $f(\omega)$  und  $g(\omega)$  eingeführt werden. Der Ansatz

$$w(\omega) := \bar{\omega} f(\omega) + \omega \overline{f(\omega)} + g(\omega) + \overline{g(\omega)} \quad (6.7)$$

erfüllt die Differentialgleichung (6.6) immer<sup>2</sup>. Als nächstes müssen die Randbedingungen analog zum RHP für die jeweiligen Probleme formuliert werden. Bei allen drei Anwendungen (EVZ, ESZ und KIP) lassen sie sich durch

$$\begin{aligned} -\kappa f(\omega) + \omega \overline{f'(\omega)} + \overline{g'(\omega)} &= h_1(\omega) \quad \text{auf } \partial\Omega_u \\ f(\omega) + \omega \overline{f'(\omega)} + \overline{g'(\omega)} &= h_2(\omega) \quad \text{auf } \partial\Omega_q \end{aligned} \quad (6.8)$$

ausdrücken. Um schlussendlich wiederum schnelle Algorithmen zur Berechnung der Lösung anwenden zu können, müssen die Probleme ebenfalls konform verpflanzt werden. Mit Hilfe der konformen Abbildungsfunktion  $\omega(z)$  gilt dann auf dem Einheitskreis

$$\begin{aligned} -\kappa F(z) + \omega(z) \overline{F_1(z)} + \overline{G_1(z)} &= H_1(z) = h_1(\omega(z)) \quad \text{auf } \partial D_u \\ F(z) + \omega(z) \overline{F_1(z)} + \overline{G_1(z)} &= H_2(z) = h_2(\omega(z)) \quad \text{auf } \partial D_q \end{aligned} \quad (6.9)$$

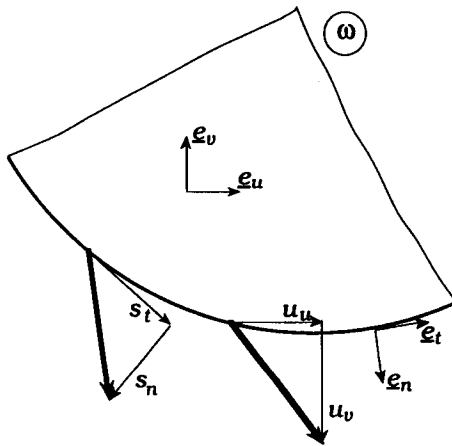
<sup>1</sup> Detaillierter Herleitungen und Angaben können in z.B. [Leipholz 74, Sokolnikoff 56, Muskhelishvili 53/65] studiert werden. Hier wird nur eine kurze Zusammenfassung dieser Überlegungen gegeben.

<sup>2</sup> Analog zur Nomenklatur der Figur 2-1 werden auch hier die Probleme in der physikalischen Ebene durch die komplexe Koordinate  $\omega$  beschrieben.

Dabei wurden die folgenden Verpflanzungsregeln und Definitionen benutzt:

$$\begin{aligned} F(z) &:= f(\omega(z)) & F_1(z) &:= \frac{d}{d\omega} f(\omega(z)) = \frac{F'(z)}{\omega'(z)} \\ G(z) &:= g(\omega(z)) & G_1(z) &:= \frac{d}{d\omega} g(\omega(z)) = \frac{G'(z)}{\omega'(z)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die reelle Konstante  $\kappa$ , sowie die komplexen Funktionen  $H_1(z)$  und  $H_2(z)$  sind gegebene, problemabhängige Grössen.



Figur 6-5. Physikalische Grössen bei Problemen der ebenen Elastostatik: Randspannungen  $s_t$  und  $s_n$  und Randverschiebungen  $u_u$  und  $u_v$ .

Für Probleme der ebenen Elastostatik gilt (Fig. 6-5)

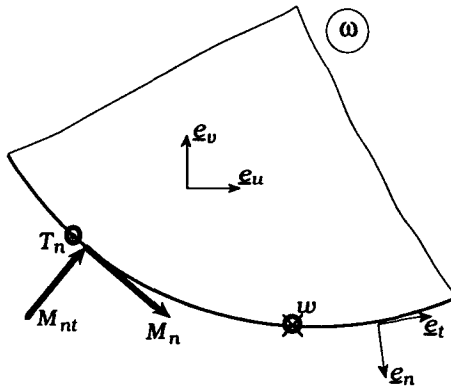
$$\kappa := \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{EVZ} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{ESZ}, \end{cases} \quad (6.11)$$

wobei  $\nu$  die Poisson- oder Querdehnungszahl bedeutet. Die gegebene Randwerte in beiden Fällen (EVZ und ESZ)<sup>1</sup>,

<sup>1</sup> Vergleiche auch die Bezeichnungen der Figur 3-1.

$$\begin{aligned}
 H_1 &:= -\mu(u_u + iu_v) \\
 H_2 &:= \frac{1}{2} \int_{\beta_k}^{\varphi} (s_n + is_t) i\omega' z d\varphi + C_{k1} + iC_{k2}, \quad \beta_k \leq \varphi \leq \alpha_{k+1}, \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

entsprechen der Vorgabe der Randverschiebung auf  $\partial D_u$  respektive der Randspannungen auf  $\partial D_q$ , die analog zu den von Neumann-Bedingungen bei den Potentialproblemen entlang dem Rand integriert werden müssen, damit die Formulierung (6.9) resultiert<sup>1</sup>. Durch  $\mu$  ist der Schubmodul dargestellt. Die vorerst freien, reellen Parameter  $C_{k1}$  und  $C_{k2}$  werden später durch entsprechende, notwendige Zusatzbedingungen bestimmt.



Figur 6–6. Physikalische Größen für Kirchhoffsche Platten: Randmomente  $M_{nt}$  und  $M_n$ , vertikale Randschubspannung  $T_n$ , die mit  $M_{nt}$  zusammenhängt und Verwölbung der Platte  $w$ .

Beim Kirchhoffschen Plattenproblem (KIP) gelten entsprechende Ausdrücke (Fig. 6–6), wobei  $\nu$  wieder die Querdehnungszahl ist und  $D$  die Plattensteifigkeit bedeutet:

<sup>1</sup> Diese Kombination von rein kinematischen respektive rein statischen Randbedingungen auf komplementären Teilen des Randes ist die einzige, die sich auf ein Koppelungsproblem reduzieren lässt. Andere, in der Praxis ebenfalls interessante Bedingungen, können durch das hier vorgestellte Verfahren nicht berücksichtigt werden. Vergleiche dazu auch oben die entsprechenden Bemerkungen bezüglich der Grenze der Anwendbarkeit bei Potentialproblemen.

$$\kappa := \frac{3 + \nu}{1 - \nu}.$$

$$H_1 := \frac{1}{2D(1-\nu)} \int_{\alpha_k}^{\varphi} \left[ M_n + iM_{nt} + i \int_{\alpha_k}^{\varphi} T_n |\omega'| |z| d\bar{\varphi} \right] i\omega' z d\bar{\varphi} \quad (6.13)$$

$$+ C_{k1} + iC_{k2} + izC_{k3}, \quad \alpha_k \leq \varphi \leq \beta_k$$

$$H_2 := \frac{1}{2} (\omega_{,u} + i\omega_{,v}).$$

Die Funktion  $H_1$  auf  $\partial D_u$  entspricht der Vorgabe aller Randspannungen (statische Randbedingung), entsprechend integriert, um wieder der Form (6.9) zu genügen. Auf den komplementären Teilen  $\partial D_q$  ist die Verwölbung  $w$  und die Verdrehung  $w_{,n}$  gegeben (kinematische Randbedingung), was in differenzierter Form auf  $H_2$  führt. Die durch die Differentiation  $w_{,s}$  verlorene Information bleibt durch die Zusatzbedingungen

$$\int_{s(\alpha_k)}^{s(\beta_k)} w_{,s} ds = -2 \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \operatorname{Re} \left\{ (F + \omega \bar{F}_1 + \bar{G}_1) i\omega' z \right\} d\varphi \quad (6.14)$$

$$= w(s(\beta_k)) - w(s(\alpha_k)), \quad k = 1, \dots, n$$

erhalten<sup>1</sup>.

Aus physikalischen Überlegungen folgt in allen Fällen (EVZ, ESZ und KIP), dass die Funktionen  $H_1$  und  $H_2$  und damit auch die komplexen Potentiale  $F(z)$  und  $G(z)$  auf dem Rand und insbesondere in den Übergangspunkten  $\{\alpha_k, \beta_k\}$  beschränkt bleiben müssen.

Soweit entspricht die bisherige Formulierung dem äquivalenten RHP (3.6) bei den Potentialproblemen. Der Schritt zur Formulierung der entsprechenden Koppelungsprobleme erfolgt durch die Erweiterung des komplexen Potentials  $F(z)$  auf die ganze komplexe Ebene:

$$F(z) := -\omega(z) \overline{F_1(1/\bar{z})} - \overline{G_1(1/\bar{z})}, \quad |z| > 1. \quad (6.15)$$

<sup>1</sup> Andere Randbedingungen können aus oben erwähnten Gründen auch hier nicht berücksichtigt werden.

Daraus folgt durch Einsetzen in (6.9) und Grenzwertbildung das Koppelungsproblem

$$\begin{aligned} -\kappa F^+ - F^- &= H_1 & \text{auf } \partial D_u \\ F^+ - F^- &= H_2 & \text{auf } \partial D_q. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Die Erweiterung (6.15) bedingt jedoch, dass auch die konforme Abbildungsfunktion  $\omega(z)$  auf die ganze Ebene erweitert werden muss. Insbesondere ist

$$\omega^+ = \omega^- \quad \text{auf } \partial D \quad (6.17)$$

eine Voraussetzung für (6.16). Im allgemeinen ist diese Erweiterung eine trickreiche Sache, können doch alle Arten von Singularitäten und Mehrdeutigkeiten in  $D^-$  auftreten. In der Literatur [Muskhelishvili 53] wird daher vereinfachend angenommen, dass  $\omega(z)$  in der ganzen Ebene durch eine endliche Potenzreihe darstellbar ist, die damit höchstens Pole in  $D^-$  induziert. Andererseits verhindert eine solche Annahme die Behandlung von Gebieten mit Ecken, eine Gebietsklasse, die für typische Anwendungen kaum vernachlässigt werden darf.

Bevor diese Problematik weiter verfolgt wird, soll zunächst noch die vollständige Lösung beschrieben werden. Der Aufbau entspricht demjenigen der Potentialprobleme (Kapitel 8). Die kanonische Lösung, mit einem Pol  $n$ -ten Grades in  $\{\infty\}$ , ist

$$X(z) := C \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\frac{1}{2} - \beta} (z - b_k)^{\frac{1}{2} + \beta}, \quad \beta := \frac{\ln \kappa}{2\pi}, \quad (6.18)$$

mit einer beliebigen Konstante  $C$ . Die Lösung für das eine komplexe Potential lautet damit

$$F(z) = X(z)[I(z) + R(z)]$$

$$I(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint J(t) \frac{dt}{t-z}, \quad t = e^{i\varphi} \quad (6.19)$$

$$J(t) := \begin{cases} -H_1 / (\kappa X^+) & \text{auf } \partial D_u \\ H_2 / X^+ & \text{auf } \partial D_q \end{cases}$$

wobei die Funktion  $R(z)$  noch bestimmt werden muss. Aus (6.15) und (6.19) folgt für das andere komplexe Potential ( $|z| \leq 1$ ),

$$\begin{aligned} G_1(z) &= -\overline{F(1/\bar{z})} - \overline{\omega(1/\bar{z})} F_1(z) \\ &= -\overline{X(1/\bar{z})} [I(1/\bar{z}) + R(1/\bar{z})] \\ &\quad - \frac{\overline{\omega(1/\bar{z})}}{\omega'(z)} (X'(z)[I(z) + R(z)] + X(z)[I'(z) + R'(z)]). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Beide Funktionen  $F(z)$  und  $G_1(z)$  müssen in  $D^+$  analytisch sein. Dies ist für  $F(z)$  erfüllt, falls  $R(z)$  analytisch in  $D^+$  ist. Die Analytizitätsdiskussion für  $G_1(z)$  ist kompliziert, denn einmal spielt der Pol von  $F(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  eine Rolle, dann aber auch die auf  $D^-$  erweiterte konforme Abbildung. Damit  $G_1(z)$  im Nullpunkt analytisch ist, muss  $F(z)$  in  $\{\infty\}$  analytisch sein. Da  $X(z)$  dort jedoch einen Pol  $n$ -ten Grades hat, müssen die Bedingungen

$$\oint J(t) t^m dt = 0, \quad m = 0, \dots, n-2 \quad (6.21)$$

erfüllt werden<sup>1</sup>. Wäre  $\omega(z)$  in der ganzen Ebene analytisch, also konstant<sup>2</sup>, würde aus (6.20) folgen, dass  $R(z)$  identisch Null wäre. In diesem Fall wären die Bedingungen (6.21) und allenfalls (6.14) die Bedingungsgleichungen für die reellen Integrationskonstanten  $C_{k1}$ ,  $C_{k2}$  und allenfalls  $C_{k3}$ .

<sup>1</sup> Diese Bedingungen werden aus der Potenzreihenentwicklung von  $F(z)$  in  $\{\infty\}$  gewonnen.

<sup>2</sup> Satz von Louisville. Falls  $\omega = 1$  entspricht dies der Problemstellung (6.8) auf einem Kreisgebiet.

Weist  $\omega(z)$  in  $D^-$  jedoch einzelne Pole  $m_j$ -ten Grades auf, müssten diese durch entsprechende Nullstellen gleichen Grades in  $R(z)$  ausgeglichen werden, um sicher zu stellen, dass  $G_1(z)$  in  $D^+$  analytisch bliebe. Die Frage, wie  $R(z)$  zu konstruieren bleibt, und zwar ohne grossen numerischen Aufwand, muss hier offen bleiben. Man müsste erst die Polstellen von  $\omega(z)$  und deren Grad feststellen, alle Funktionen, d.h.  $X(z)$ ,  $I(z)$ ,  $\omega(z)$  sowie den Ansatz für  $R(z)$  in der Nähe der Polstellen in Reihen entwickeln und einen Koeffizientenvergleich durchführen.

Noch mehr offene Fragen ergeben sich, wenn Gebiete mit Ecken zugelassen werden. Dann müsste  $R(z)$  ebenfalls das singuläre Verhalten der konformen Abbildungsfunktion in  $\omega(z)$  in  $D^-$  kompensieren. Die Fragen, ob das grundsätzlich funktioniert und wie entsprechende Algorithmen aussehen würden, können hier nicht beantwortet werden. Wäre es jedoch wirklich möglich, diese Hürden zu meistern, dann hätte man ein numerisches Werkzeug entwickelt, das recht interessante Problemstellungen numerisch sehr effizient lösen würde.

Teil 2

# **Detailaspekte**



Leer - Vide - Empty

## Kapitel 7

# Über Cauchy-Integrale

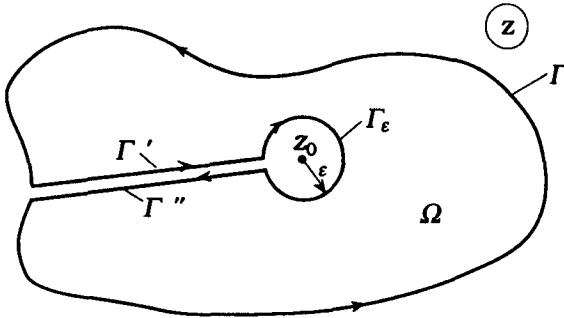
---

Cauchy-Integrale bilden die eigentliche Grundlage, das Fundament dieser Arbeit. So basiert die Herleitung der Lösung von Riemann-Hilbert-Problemen (Kapitel 3) wesentlich auf den Sokhotski-Formeln (auch Plemelj-Formeln benannt) (Kapitel 7.1c), wird doch das gemischte Randwertproblem (Fig. 1-1) auf ein homogenes Koppelungsproblem reduziert, dessen Lösung mit Hilfe dieser Sokhotski-Formeln hergeleitet werden kann. Die numerische Auswertung der Lösung (Kapitel 4) benutzt ebenfalls zwei fundamentale Tatsachen über Cauchy-Integrale: die Schwarzsche Formel (Kapitel 7.2a) zur analytischen Integration und der Zusammenhang mit Potenzreihen (Kapitel 7.2c) zur numerischen Integration mit FFT. Die konforme Abbildung (Kapitel 2) basiert auf der Konjugation am Einheitskreis mit der FFT, ein numerisches Verfahren, das sich ebenfalls aus den Eigenschaften der Cauchy-Integrale ableiten lässt (Kapitel 7.2d).

Aus diesen Gründen ist es wohl angebracht, einen kurzen, möglichst anschaulichen Überblick über Cauchy-Integrale zu geben, wohlwissend, dass eine Menge guter Literatur zu diesem Thema existiert. Zum Beispiel befinden sich in [Henrici 86] neben einer ausführlichen Darstellung dieser Theorie auch viele weitere Referenzen.

7.1 CAUCHY-INTEGRALE ÜBER GESCHLOSSENER KURVE

a) Definition der Cauchy-Integrale



Figur 7-1. Wird die Funktion  $f(z)/(z - z_0)$  entlang des angegebenen Weges integriert, kann daraus die Cauchysche Integralformel hergeleitet werden, wenn der Radius  $\epsilon$  gegen Null strebt.

Der Ausgangspunkt bildet der Cauchysche Integralsatz: Integrale über einer analytischen Funktion  $f(z)$  entlang eines geschlossenen Weges  $\Gamma$ , der nur analytisches Gebiet umschliesst, verschwinden<sup>1</sup>:

$$\oint_{\Gamma} f(t) dt = 0. \tag{7.1}$$

Wendet man diesen Satz auf die Funktion  $f(z)/(z - z_0)$  an, muss, wegen des im allgemeinen nicht analytischen Punktes  $z_0$ , der Weg entsprechend gelegt wird (Fig. 7-1):

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt + \underbrace{\oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t - z_0} dt + \oint_{\Gamma''} \frac{f(t)}{t - z_0} dt}_{= 0} + \underbrace{\oint_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(t)}{t - z_0} dt}_{=: I_\epsilon} = 0. \tag{7.2}$$

<sup>1</sup> Mit  $t$  sind hier und im ganzen Kapitel die komplexen Punkte auf dem Rand bezeichnet.

Die mittleren beiden Terme heben sich gegenseitig auf, der rechte Term kann explizit bestimmt werden, falls der Radius  $\varepsilon$  des Kreises gegen null strebt. Mit  $t = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}$  und damit  $dt = i\varepsilon e^{i\varphi}$  gilt nämlich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = -2\pi i f(z_0). \quad (7.3)$$

Daraus ergibt sich die Cauchysche Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-z} dt. \quad (7.4)$$

Wird auf dem Rand statt einer analytischen Funktion  $f(t)$  eine beliebige komplexe Funktion  $h(t)$  vorgegeben, definiert das Cauchy-Integral

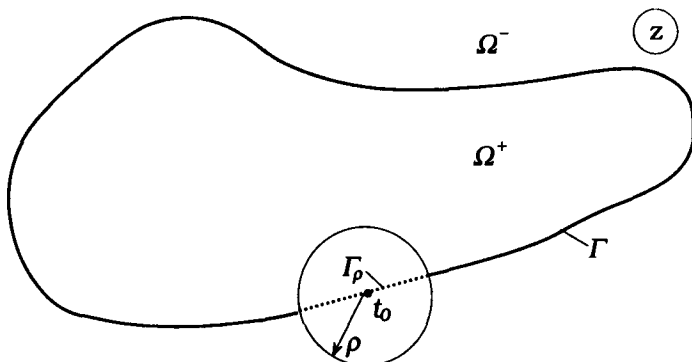
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt \quad (7.5)$$

ebenfalls in der ganzen Ebene (ohne  $\Gamma$ ) eine analytische Funktion. In den folgenden Kapiteln geht es darum, das Verhalten dieser Funktionen zu untersuchen, wenn der Aufpunkt  $z$  auf den Rand zu liegen kommt.

### b) Hauptwert und Hölderbedingung

Liegt  $z$  auf  $\Gamma$ ,  $z = t_0$  und ist  $h(t)$  stetig, dann existiert das Integral (7.5) im allgemeinen nicht. Diese Schwierigkeit kann umgangen werden, wenn das Cauchy-Integral als Hauptwert (principal value P.V.) definiert wird (Fig. 7-2):

$$f(t_0) = \text{P.V.} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-t_0} dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma-\Gamma_\rho} \frac{h(t)}{t-t_0} dt. \quad (7.6)$$



Figur 7-2. Wenn der Aufpunkt  $z$  auf dem Rand liegt ( $z = t_0$ ), muss aus dem Integrationsweg «die kritische Stelle entfernt» werden, um den Hauptwert des Cauchy-Integrale zu definieren.

Vereinfacht ausgedrückt: die Stelle  $t_0$  wird aus dem Integrationsweg entfernt. Eine Analyse des Grenzüberganges (7.6) zeigt, dass der Hauptwert existiert, wenn eine Hölderbedingung,

$$|h(t_0) - h(t)| \leq \mu |t_0 - t|^\gamma, \text{ mit } \mu > 0, 0 < \gamma \leq 1, \tag{7.7}$$

erfüllt ist. Er lässt sich dann durch das reguläre Integral

$$f(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} dt + \frac{1}{2} h(t_0) \tag{7.8}$$

berechnen.

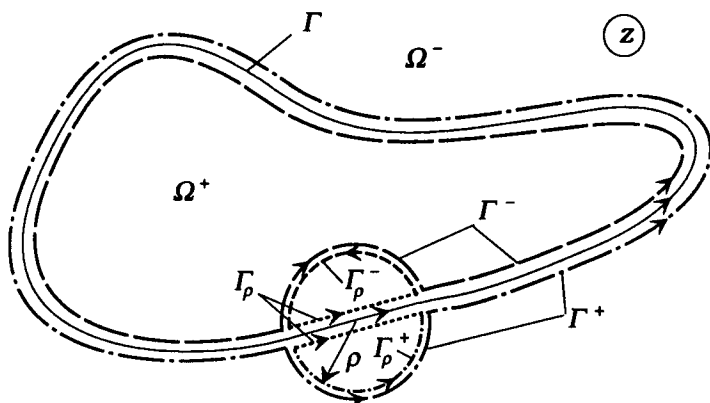
**c) Innerer und äusserer Grenzwert, Sokhotskyi-Formeln**

Im Gegensatz zum Hauptwert, bei dem der Aufpunkt  $z$  direkt auf den Rand gesetzt wird, können auch die Grenzübergänge

$$f^+(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega^+}} f(z) \text{ und } f^-(t_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \Omega^-}} f(z) \tag{7.9}$$

betrachtet werden: Welchen Wert ergibt sich für das Cauchy-Integral (7.5), wenn sich  $z$  von innen oder aussen dem Rand nähert?

Eine heuristische Überlegung kann anhand der Figur 7-3 angestellt werden.



Figur 7-3. Je nach Wahl des Integrationsweges  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  respektive  $\Gamma - \Gamma_\rho$  resultiert nach dem Übergang  $\rho \rightarrow 0$  der innere, der äussere Grenzwert respektive der Hauptwert.

Beim inneren Grenzwert  $f^+(t_0)$  bleibt der Aufpunkt  $t_0$  immer ganz innerhalb des Gebietes  $\Omega^+$ , der Integrationsweg führt also sozusagen «aussen an  $t_0$ » vorbei ( $\Gamma^+$ ), beim äusseren Grenzwert  $f^-(t_0)$  entsprechend «innen dran» vorbei ( $\Gamma^-$ ). Der Integrationsweg des Hauptwertes «überspringt» quasi den Punkt  $t_0$  ( $\Gamma - \Gamma_\rho$ ).

Gehört der Punkt  $t_0$  zu einem glatten Randstück, kann der Grenzübergang über die Integrationswege  $\Gamma_\rho^+$  und  $\Gamma_\rho^-$  durchgeführt werden:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{h(t)}{t - t_0} dt = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho^-} \frac{h(t)}{t - t_0} dt = 2\pi i \frac{h(t_0)}{2}. \quad (7.10)$$

Da sich der Integrationsweg  $\Gamma^+$  aus  $\Gamma - \Gamma_\rho + \Gamma_\rho^+$  zusammensetzt und  $\Gamma^-$  aus  $\Gamma - \Gamma_\rho + \Gamma_\rho^-$ , gilt

$$\begin{aligned} f^+(t_0) &= f(t_0) + \frac{h(t_0)}{2}, \\ f^-(t_0) &= f(t_0) - \frac{h(t_0)}{2}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

wobei  $f(t_0)$  den Hauptwert bedeutet. Aus der Addition, resp. Subtraktion dieser beiden Gleichungen resultieren die Sokhotskyi-Formeln (oft auch Plemelj-Formeln genannt):

$$\begin{aligned} f^+(t_0) + f^-(t_0) &= 2f(t_0), \\ f^+(t_0) - f^-(t_0) &= h(t_0). \end{aligned} \tag{7.12}$$

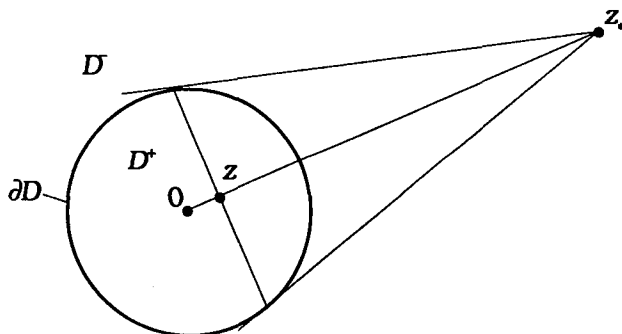
## 7.2 CAUCHY-INTEGRALE AUF DEM EINHEITSKREIS

## a) Schwarzsche Formeln

Die Schwarzsche Formel ist das Resultat der folgenden Randwertaufgabe: finde eine analytische Funktion  $k(z)$  mit Realteil  $u(z)$  im Inneren des Einheitskreises  $D^+$ , dessen innerer Grenzwert  $k^+(t)$  existiert,  $\operatorname{Re}\{k^+(t)\} = u(t)$  erfüllt und im Nullpunkt reell ist! Man kann die Aufgabe auch etwas anders stellen: Wie hängt das jetzt reell angenommene  $h(t)$  auf dem Rand mit  $u(t)$  zusammen, wenn  $k(z)$  durch das Cauchy-Integral

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t-z} dt \quad (7.13)$$

ausgedrückt werden soll?



Figur 7-4. Die Spiegelung am Einheitskreis.: dem Urbild  $z$  entspricht der gespiegelte, assoziierte Punkt  $z_* = 1/\bar{z}$ .

Zuerst muss der Zusammenhang mit der zu  $k(z)$  assoziierten Funktion

$$k_*(z) := \overline{k(1/\bar{z})}, \quad (7.14)$$

d.h. der am Einheitskreis gespiegelten Funktion, bestimmt werden. Aus der Definition (7.14) und der Feststellung, dass auf dem Kreis  $t\bar{t} = 1$  und  $dt\bar{t} + t\overline{dt} = 0$  gilt, folgt



$$k_*(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{\bar{t} - 1/\bar{z}} \overline{dt} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t-z} dt. \quad (7.15)$$

Der erste Term entspricht dem arithmetischen Mittelwert  $\hat{h}$ , denn mit  $t = e^{i\varphi}$  auf dem Kreis gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}) d\varphi =: \hat{h}. \quad (7.16)$$

Der zweite Term entspricht  $k(z)$ . Daher gilt

$$k_*(z) = \hat{h} - k(z). \quad (7.17)$$

Nähert sich  $z$  dem Rand von innen, dann nähert sich der symmetrische Punkt  $1/\bar{z}$  derselben Stelle  $t$  von aussen (Fig. 7-4). Aus (7.14) und (7.17) ergibt sich daher die Beziehung

$$k_*(t) = \hat{h} - k^-(t) = \overline{k^+(t)}. \quad (7.18)$$

Der Realteil  $u(t)$  des inneren Grenzwertes  $k^+(t)$  kann nun mit Hilfe der Sokhotskyi-Formel (7.12) durch  $h(t)$  ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} u(t) &:= \operatorname{Re}\{k^+(t)\} := \frac{1}{2} \left( k^+(t) + \overline{k^+(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( k^+(t) - k^-(t) + \hat{h} \right) = \frac{1}{2} \left( h(t) + \hat{h} \right). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Da die Mittelwerte  $\hat{h}$  und  $\hat{u}$  identisch sind, folgt aus (7.19)

$$h(t) := 2u(t) - \hat{u}. \quad (7.20)$$

In (7.13) substituiert, folgt die Schwarzsche Formel:

$$k(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_{\partial D} \frac{u(t)}{t-z} dt - \hat{u} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} u(t) \frac{t+z}{t-z} \frac{dt}{t}. \quad (7.21)$$

Wie oben bereits erwähnt, resultiert daraus immer

$$\operatorname{Im}\{k(0)\} = 0. \quad (7.22)$$

Bildet man das Cauchy-Integral aus dem Realteil einer in  $D^+$  analytischen Funktion  $k(z)$ , die (7.22) nicht erfüllt, dann kann  $k(z)$  aus der Identität

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\operatorname{Re}\{k(t)\}}{t-z} dt \equiv \frac{1}{2} (k(z) - \overline{k(0)}) \quad (7.23)$$

wieder rekonstruiert werden (folgt aus (7.21) und (7.22)). Analog gilt für den Imaginärteil die Identität

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{i \operatorname{Im}\{k(t)\}}{t-z} dt \equiv \frac{1}{2} (k(z) + \overline{k(0)}) \quad (7.24)$$

### b) Kontinuierliche Hilbert-Transformation (Konjugation)

Angenommen, auf dem Rand  $\partial D$  des Einheitskreises  $D^+$  sei der Realteil  $u(t)$  einer in  $D^+$  analytischen Funktion gegeben. Wie kann daraus die konjugierte Funktion, der Imaginärteil  $v(t)$ , berechnet werden? Die Antwort gibt die Hilbert-Transformation, die aus einer einfachen Anwendung der Sokhotski-Formeln (7.11) und der Schwarzschen Formel (7.21) folgt. Wendet man die Gleichung (7.11a) auf (7.21) an, folgt

$$\begin{aligned} k^+(t_0) &:= u(t_0) + iv(t_0) = \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{2u(t)}{t-t_0} dt \right]^+ - \hat{u} \\ &= \text{P. V.} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{u(t)}{t-t_0} dt + u(t_0) - \hat{u}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Die Beziehung von  $u(t)$  zu seiner Konjugierten  $v(t)$  wird direkt daraus abgelesen:

$$\begin{aligned}
 v(t_0) &= i\hat{u} - \text{P.V.} \frac{1}{\pi} \oint_{\partial D} \frac{u(t)}{t-t_0} dt \\
 &= -\text{P.V.} \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} u(t) \frac{t+t_0}{t-t_0} \frac{dt}{t} := \mathbf{K}[u(t_0)].
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

Erweitert man (7.26) für hölderstetige komplexe Funktionen  $h(t) := u(t) + iv(t)$  mit der natürlichen Definition

$$\mathbf{K}[h(t)] := \mathbf{K}[u(t)] + i\mathbf{K}[v(t)], \tag{7.27}$$

dann gelten die folgenden Beziehungen für die verallgemeinerte Konjugation. Für

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t-z} dt \tag{7.28}$$

gilt

$$\begin{aligned}
 k(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[h(t_0)] + \frac{1}{2} \hat{h}, \\
 k^+(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[h(t_0)] + \frac{1}{2} \hat{h} + \frac{1}{2} h(t_0), \\
 k^-(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[h(t_0)] + \frac{1}{2} \hat{h} - \frac{1}{2} h(t_0),
 \end{aligned}
 \tag{7.29}$$

und für die dazu assoziierte Funktion

$$k_*(z) = \hat{h} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{\overline{h(t)}}{t-z} dt \tag{7.30}$$

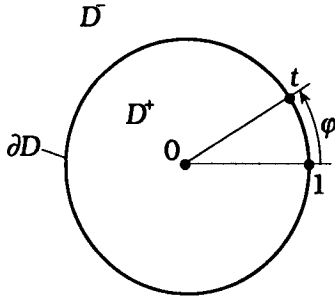
entsprechend

$$\begin{aligned}
 k_*(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[\overline{h(t_0)}] + \frac{1}{2} \hat{h}, \\
 k_*^+(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[\overline{h(t_0)}] + \frac{1}{2} \hat{h} - \frac{1}{2} \overline{h(t_0)}, \\
 k_*^-(t_0) &= \frac{i}{2} \mathbf{K}[\overline{h(t_0)}] + \frac{1}{2} \hat{h} + \frac{1}{2} \overline{h(t_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{7.31}$$

### c) Cauchy-Integrale und Potenzreihen

Vom Anwenderstandpunkt aus wird die Theorie der Cauchy-Integrale besonders dann interessant, wenn numerische Verfahren daraus resultieren. Ein paar wichtige Berechnungsmethoden lei-

ten sich aus der Tatsache ab, dass Cauchy-Integrale auf dem Einheitskreis eng mit Potenzreihen zusammenhängen



Figur 7-5. Cauchy-Integrale auf dem Einheitskreis: ein wesentlicher Punkt des Zusammenhanges mit Potenzreihen ist die Parametrisierung  $t = e^{i\varphi}$ .

Das auf dem Einheitskreis definierte Cauchy-Integral

$$k(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{h(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{i\varphi})}{1 - e^{-i\varphi}z} d\varphi, \quad t = e^{i\varphi} \quad (7.32)$$

kann nämlich in eine Potenzreihe entwickelt werden, wenn die Funktion  $h(t)$  durch eine Fourierreihe

$$h(e^{i\varphi}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{h}_l e^{il\varphi} \quad (7.33)$$

gegeben ist (Fig. 7-5). Aus der Taylorentwicklung für  $|z| < 1$

$$(1-z)^{-1} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (7.34)$$

folgt die Reihe

$$(1 - e^{i\varphi} z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j e^{-ij\varphi}. \quad (7.35)$$

Die Integration (7.32) lässt sich mit (7.33 und 7.35) termweise durchführen:

$$k(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \hat{h}_l e^{i(l-j)\varphi} z^j d\varphi = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{h}_j z^j, \quad |z| < 1. \quad (7.36)$$

Entsprechend folgt mit der Reihenentwicklung für  $|z| > 1$  um  $\{\infty\}$

$$(1-z)^{-1} = -\frac{1}{z} (1-z^{-1})^{-1} = -z^{-1} - z^{-2} - z^{-3} - \dots \quad (7.37)$$

und damit durch eine zu (7.36) analoge Rechnung

$$k(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{h}_{-j} z^{-j}, \quad |z| > 1. \quad (7.38)$$

Der Grenzübergang  $z \rightarrow t$  in (7.36) und (7.38) liefert die inneren und äusseren Grenzwerte. Daraus kann durch Einsetzen in die Sokhotskyi-Formeln (7.12) auch der Hauptwert als Reihe ausgedrückt werden:

$$k(t) = \frac{1}{2} \hat{h}_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (\hat{h}_j t^j - \hat{h}_{-j} t^{-j}), \quad |t|=1. \quad (7.39)$$

Falls die Funktion  $h(t)$  genügend glatt ist, darf er durch eine abgebrochene Fourierreihe,

$$h(t) \cong \sum_{l=0}^{N-1} \hat{h}_l e^{il\varphi}, \quad (7.40)$$

approximiert werden. Daraus resultieren die (7.36), (7.38) und (7.39) entsprechenden, approximierten Ausdrücke<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Eine ausführliche Herleitung dieser diskretisierten Formeln ist in [Henrici 86] zu finden.

$$k(z) \equiv \begin{cases} \hat{h}_0 + \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \hat{h}_j z^j & |z| < 1, \\ \frac{1}{2} \hat{h}_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} (\hat{h}_j - \hat{h}_{N-j}) z^j & |z| = 1, \\ \sum_{j=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \hat{h}_{N-j} z^j & |z| > 1, \end{cases} \quad (7.41)$$

wobei  $\lfloor N/2 \rfloor$  den ganzzahligen Teil von  $N/2$  bedeutet, und mit dem Apostroph nach dem Summensymbol angedeutet wird, dass der letzte Summand  $j=N/2$ , falls  $N$  gerade ist, mit einem (zusätzlichen) Faktor  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden muss.

#### d) Diskrete Konjugation am Einheitskreis

Dieselbe Rechnung wie in (7.33) bis (7.36) kann auch für die Konjugation (7.26) durchgeführt werden. Ist der Realteil  $u(t)$  der im Einheitskreis analytischen Funktion  $k(z)$  durch eine Fourierreihe,

$$u(e^{i\varphi}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{u}_j e^{ij\varphi}, \quad (7.42)$$

gegeben, berechnet sich die konjugierte Funktion  $v(t)$  durch<sup>1</sup>

$$v(e^{i\varphi}) = i\hat{u}_0 - 2i \left( \frac{1}{2} \hat{u}_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{u}_j e^{ij\varphi} - \hat{u}_{-j} e^{-ij\varphi}) \right). \quad (7.43)$$

Anders ausgedrückt, gilt auch

$$v(e^{i\varphi}) = -i \sum_{j=-\infty}^{\infty} \text{sign}(j) \hat{u}_j e^{ij\varphi}, \quad (7.44)$$

wobei

<sup>1</sup> Der Mittelwert  $\hat{u}$  entspricht dabei dem 0-ten Fourierkoeffizient  $\hat{u}_0$ .

$$\text{sign}(j) := \begin{cases} +1 & \text{falls } j > 0, \\ 0 & \text{falls } j = 0, \\ -1 & \text{falls } j < 0, \end{cases} \quad (7.45)$$

ist. Auch hier gibt es eine approximierte Form für glatte  $u(t)$ . Mit der Approximation

$$u(e^{i\varphi}) \cong \sum_{j=0}^{N-1} \hat{u}_j e^{j\varphi} \quad (7.46)$$

folgt nämlich

$$v(e^{i\varphi}) \cong -i \sum_{j=0}^{N-1} \sigma_j \hat{u}_j e^{j\varphi}, \quad (7.47)$$

wobei der diskretisierte Konjugationsoperator durch

$$\sigma_j = \begin{cases} +1 & \text{falls } j \in \{1, \dots, \lfloor N/2 \rfloor\}, \\ -1 & \text{falls } j \in \{\lfloor N/2 \rfloor, \dots, N-1\}, \\ 0 & \text{falls } j = 0 \text{ oder } j = \lfloor N/2 \rfloor \text{ und } N \text{ gerade} \end{cases} \quad (7.48)$$

definiert wird und wiederum

$$\lfloor N/2 \rfloor := \begin{cases} N/2 & \text{für gerade } N, \\ (N-1)/2 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.49)$$

bedeutet.

## Kapitel 8

### Konforme Abbildung

---

Wie bereits im Kapitel 2 erwähnt, ermöglicht erst die konforme Verpflanzung des zu lösenden Randwertproblems auf den Einheitskreis (Fig. 1-1) den Einsatz hoch effizienter numerischer Verfahren. Die Abbildung wird in zwei Schritten konstruiert: einer Schwarz-Christoffel-Abbildung (Kapitel 8.1) wird eine Theodorsen-Abbildung nachgeschaltet (Kapitel 8.2). Beide werden zu einer Gesamtabbildung (Kapitel 8-3) verknüpft.

An drei Stellen des resultierenden Lösungsverfahrens spielt die konforme Abbildung eine Rolle. Einmal müssen die gegebenen Randwerte auf den Einheitskreis verpflanzt werden. Dazu muss an kritischen Punkten des Randes (Ecken, Übergängen der Randbedingungen, Sprünge in den Randwerten) die inverse Abbildung vom Gebiet auf den Kreis berechnet werden (Kapitel 8.1c, 8.2c und 8.3a). Um die Singularitäten in den Cauchy-Integralen zu extrahieren, muss auch die lokale Entwicklung der Ränderzuordnung berechnet werden (Kapitel 8.1d, 8.2d, 8.3b und c). Diese Entwicklungen spielen schliesslich auch bei der Auswertung der Lösung an den kritischen Punkten eine entscheidende Rolle (Kapitel 11). Viele der Ausführungen dieses Kapitels lehnen sich an die Referenzen [Trefethen 80/82] und [Gutknecht 81/83] an.



## 8.1 SCHWARZ-CHRISTOFFEL-ABBILDUNG

### a) Schwarz-Christoffel-Formel

Die konforme Abbildung des Einheitskreises auf ein Polygon wird durch die Schwarz-Christoffel-Formel

$$\omega(\zeta) = \omega_c + C \int_0^{\zeta} \prod_{j=1}^N \left( 1 - \frac{\tilde{\zeta}}{\zeta_j} \right)^{\delta_j - 1} d\tilde{\zeta} \quad (8.1)$$

definiert (Fig. 2-3). Dabei bedeuten  $\pi\delta_j$  die inneren Winkel des Polygons ( $\delta_j \in (0, 2) \setminus 1$ ),  $\zeta_j$  die den Polygonecken  $\omega_j$  entsprechenden Stellen auf dem Einheitskreis,  $\omega_c$  das Abbild des Kreisursprunges und  $C$  eine Skalierungskonstante (vgl. Fig. 2-3). Wird der Hauptwert von  $\zeta^k$  durch einen Schnitt entlang der negativen Halbachse definiert, ist  $\omega(\zeta)$  eindeutig festgelegt und analytisch für alle  $|\zeta| < 1$ . Das Problem besteht darin, die Parameter  $\omega_c$ ,  $C$  und  $\zeta_j$  zu bestimmen, was auf ein nichtlineares Gleichungssystem führt.

### b) Zur Lösung des Parameterproblems

Da alle Details der Implementation SCPACK in [Trefethen 82] übersichtlich beschrieben werden, genügt hier eine kurze Zusammenfassung der Ideen der numerischen Implementation.

Konforme Abbildungen sind nicht eindeutig. Drei reelle Parameter können frei gewählt werden. Hier wird durch

$$\begin{aligned} \zeta_N &= 1 \text{ und} \\ \omega(0) &= \omega_c \end{aligned} \quad (8.2)$$

die Abbildung eindeutig definiert. Sind alle Ecken endlich<sup>1</sup>, werden die folgenden Bestimmungsgleichungen aufgestellt:

---

<sup>1</sup> SCPACK lässt auch Ecken im Punkt  $\{\infty\}$  zu.

$$\begin{aligned}
 C &= (\omega_N - \omega_c) / \int_0^{\zeta_N} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta_j}\right)^{\delta_j - 1} d\bar{\zeta} \\
 \omega_1 - \omega_c &= C \int_0^{\zeta_1} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta_j}\right)^{\delta_j - 1} d\bar{\zeta} \\
 |\omega_{k+1} - \omega_k| &= \left| C \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta_j}\right)^{\delta_j - 1} d\bar{\zeta} \right|, \quad k = 2, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{8.3}$$

Während die erste dieser Gleichungen  $C$  bestimmt, sind die restlichen  $N - 1$  reelle Bestimmungsgleichungen für die  $\zeta_j$ .

Da die Formel (8.1) bereits die richtigen Winkel im Polygon garantiert, wird die Lage der  $\zeta_j$  durch die Seitenverhältnisse der Polygonseiten allein bestimmt. Dabei müssen die  $\zeta_j$  in aufsteigender Ordnung auf dem Kreis liegen. Dies wird durch die Variablentransformation

$$y_k := \ln \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k-1}}{\vartheta_{k+1} - \vartheta_k}, \quad k = 1, \dots, N-1 \tag{8.4}$$

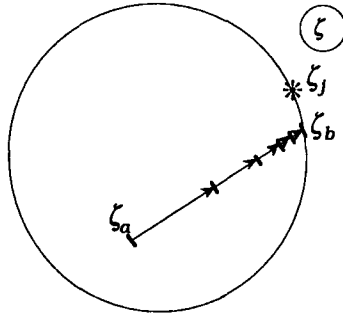
mit

$$\zeta_k = e^{\vartheta_k} \tag{8.5}$$

erzwungen. In jedem Iterationsschritt zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen (8.3) wird mit den Werten  $y_k$  startend, erst jedem Winkel  $\vartheta_k$  ein Wert zugewiesen (8.4), damit die  $\zeta_k$  bestimmt (8.5) und schliesslich die Gleichungen (8.3) ausgewertet.

Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Auswertung der Integrale in (8.3). Die Wahl des Integrationsweges spielt, mathematisch gesehen, keine Rolle, solange dieser durch analytisches Gebiet führt. Er kann jedoch sehr wohl die Genauigkeit der numerischen Auswertung beeinflussen. Liegen nämlich Singularitäten des Integranden sehr nahe an den Auswertungspunkten des Integranden, können erhebliche Ungenauigkeiten entstehen. SCPACK meistert diese Schwierigkeiten dank zweier Ideen. Einmal be-

rücksichtigen Gauss–Jacobi–Quadraturformeln<sup>1</sup> die Endsingularitäten in (8.3) explizit. Dann wird der Integrationsweg immer geradlinig gewählt, auch wenn Anfangs- und Endpunkt auf dem Kreisrand liegen. Er wird jedoch fortlaufend so halbiert, dass keine benachbarte Singularität näher als die halbe Intervalllänge entfernt liegt (Fig. 8–1)



Figur 8–1. Der geradlinige Integrationsweg bei der Auswertung der Schwarz–Christoffel–Formel wird fortlaufend halbiert, bis die nächstliegende Singularität  $\zeta_j$  (\*) weiter als die halbe Intervalllänge entfernt ist.

Der resultierende Algorithmus zur Bestimmung der Parameter scheint recht robust<sup>2</sup>, effizient und genau zu sein.

### c) Auswertung der Schwarz–Christoffel–Abbildung

Die Vorwärtsabbildung  $\omega(\zeta)$  (vom Kreis auf das Polygon) wird wie eben beschrieben aus (8.1) berechnet, wobei die Parameter  $C$  und  $\zeta_j$  jetzt bekannt sind. Die Berechnung erfolgt punktweise. Der Gradient kann ebenfalls direkt aus

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = C \prod_{j=1}^N \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_j} \right)^{\delta_j - 1} \quad (8.6)$$

<sup>1</sup> Theorie und Implementationen sind in [Piessens et al. 83] zu finden.

<sup>2</sup> Er versagt, verständlicherweise, bei sehr langen, gewundenen Gebieten, weil in solchen Fällen der Gradient der Abbildung innerhalb des Gebietes um viele Größenordnungen variieren kann (sogenanntes «crowding»), was Auslöschungseffekte zur Folge hat.

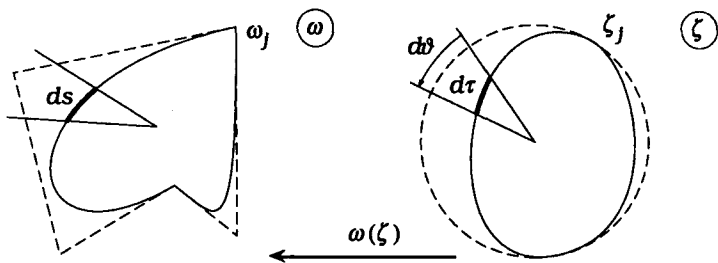
bestimmt werden.

Die Rückwärtsabbildung ist numerisch dann nicht ganz einfach durchzuführen, wenn keine guten Näherungswerte für eine Newton-Iteration vorhanden sind. SCPACK errechnet in solchen Fällen erst eine grobe Näherung aus der Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Da konforme Abbildungen bijektiv und analytisch sind, ist der Betrag des Gradienten (8.6) immer positiv und von Null verschieden. Der inverse Gradient

$$g(\omega, \zeta) := \frac{d\zeta}{d\omega} = \frac{1}{C} \prod_{j=1}^N \left( 1 - \frac{\zeta}{\zeta_j} \right)^{1-\delta_j}, \quad (8.7)$$

ist also überall im Gebiet definiert. Dieser Ausdruck kann daher als eine gewöhnliche Differentialgleichung für die komplexe Variable  $\omega$  aufgefasst werden. Startend mit einem bekannten Paar  $(\omega_0, \zeta_0)$  wird (8.7) bis zum gewünschten Punkt  $\omega_*$  integriert. Die damit gefundene Näherung  $\zeta(\omega_*)$  wird mit einer Newton-Iteration noch verfeinert.

#### d) Entwicklung der Ränderzuordnung in Ecknähe



Figur 8-2. Es ist der Zusammenhang zwischen der Bogenlänge  $\tau$  der Zwischenkurve und der Bogenlänge  $s$  des gegebenen Gebietes in der Variable  $\vartheta$  gesucht. Bei Gebietsecken  $\omega_j$  liegt der entsprechende Punkt der Zwischenkurve auf dem Kreis,  $\rho(\vartheta_j) = 1$ , und hat in  $\vartheta$  stetige erste Ableitungen,  $\dot{\rho}(\vartheta_j) = 0$ .

Die Extraktion von Singularitäten aus den Cauchy-Integralen (Kapitel 10) verlangt eine Reihenentwicklung der Ränderzuord-

nung. Der Anteil der Schwarz–Christoffel–Abbildung besteht aus der Funktion  $s(\tau(\vartheta))$ , die in den Ecken des Gebietes singular ist<sup>1</sup>. Der vermutlich einfachste Weg, eine Reihe herzuleiten, beruht auf der termweisen Integration der Entwicklung von  $|\omega'(\zeta)|$ .

Aus Figur 8–2 folgt aus (8.6) der Absolutbetrag des Gradienten,

$$\frac{ds}{d\tau}(\vartheta) := \left| \omega'(\rho(\vartheta)e^{i\vartheta}) \right| = |C| \prod_{k=1}^N \left| 1 - \rho(\vartheta)e^{i(\vartheta-\vartheta_k)} \right|^{\delta_k-1}, \quad (8.8)$$

falls (8.5) die Urbilder der Polygonecken definiert. Der Zusammenhang zwischen  $\tau$  und  $\vartheta$  gibt die Parameterisierung der Zwischenkurve  $\rho(\vartheta)$ ,

$$\dot{\tau} := \frac{d\tau}{d\vartheta} = \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \dot{\rho}^2(\vartheta)}, \quad (8.9)$$

wobei die Punktableitung immer die Ableitung nach  $\vartheta$  bedeuten soll. Die beiden Ausdrücke (8.8) und (8.9) zusammengesetzt,

$$\dot{s}(\vartheta) = \frac{ds}{d\tau}(\vartheta) \dot{\tau}(\vartheta), \quad (8.10)$$

müssen also in eine Reihe in  $\vartheta$  um die Eckpunkte

$$\omega_l = \omega(\zeta_l) = \omega(\rho(\vartheta_l)e^{i\vartheta_l}) \quad (8.11)$$

entwickelt werden. Stimmen in den Ecken (8.11) die Tangenten des Polygons mit denjenigen der gegebenen Randkurve überein, was bei der Konstruktion des Polygons vorausgesetzt wird<sup>2</sup>, ist dort

$$\begin{aligned} \rho(\vartheta_l) &= 1, \text{ und} \\ \dot{\rho}(\vartheta_l) &= 0. \end{aligned} \quad (8.12)$$

<sup>1</sup> Das Verhalten der konformen Abbildung in Ecknähe wird in [Lehmann 57] untersucht.

<sup>2</sup> Vergleiche dazu Kapitel 2.

Der erste Term von (8.10), der Ausdruck (8.8) kann in Ecknähe multiplikativ in einen singulären Teil,

$$\check{s}_{l,\tau}(\vartheta) := \left| 1 - \rho(\vartheta) e^{i(\vartheta - \vartheta_l)} \right|^{\delta_l - 1}, \quad (8.13)$$

und einen regulären Teil,

$$\bar{s}_{l,\tau}(\vartheta) := |C| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left| 1 - \rho(\vartheta) e^{i(\vartheta - \vartheta_k)} \right|^{\delta_k - 1}, \quad (8.14)$$

zerlegt werden. Die Reihe von (8.10) besteht aus der Verknüpfung der Entwicklungen (8.9), (8.13) und (8.14).

Definiert man

$$\begin{aligned} g_k(\vartheta) &:= \left| 1 - \rho(\vartheta) e^{i(\vartheta - \vartheta_k)} \right|^{\delta_k - 1} = h_k(\vartheta)^{(\delta_k - 1)/2} \quad \text{und} \\ h_k(\vartheta) &:= \left| 1 - \rho(\vartheta) e^{i(\vartheta - \vartheta_k)} \right|^2 \\ &= \left( 1 + \rho(\vartheta)^2 - 2\rho(\vartheta) \cos(\vartheta - \vartheta_k) \right), \end{aligned} \quad (8.15)$$

dann folgen für die Ausdrücke (8.13),

$$\check{s}_{l,\tau}(\vartheta) = g_l(\vartheta) = h_l(\vartheta)^{(\delta_l - 1)/2}, \quad (8.16)$$

und für (8.14)

$$\bar{s}_{l,\tau}(\vartheta) = |C| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N g_k(\vartheta). \quad (8.17)$$

Da in den singulären Stellen  $\vartheta_l$

$$\begin{aligned} h_l(\vartheta_l) = \dot{h}_l(\vartheta_l) = \ddot{h}_l(\vartheta_l) = 0 \quad \text{und} \\ \ddot{h}_l(\vartheta_l) = 2 \end{aligned} \quad (8.18)$$

ist und daher in die Reihe

$$h_l(\vartheta) = (\vartheta - \vartheta_l)^2 \left[ 1 + O\left((\vartheta - \vartheta_l)^2\right) \right] \quad (8.19)$$

entwickelt werden kann, resultiert für (8.16) die Reihe

$$\check{s}_{l,\tau}(\vartheta) = |\vartheta - \vartheta_l|^{\delta_l - 1} \left[ 1 + O\left((\vartheta - \vartheta_l)^2\right) \right]. \quad (8.20)$$

Ähnlich kann die Entwicklung von (8.17) hergeleitet werden. Aus den trigonometrischen Halbwinkelsätzen und den Definitionen (8.15) ergeben sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned} g_k(\vartheta_l) &= \left| 2 \sin \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right|^{(\delta_l - 1)/2} \quad \text{und} \\ \dot{g}_k(\vartheta_l) &= \frac{\delta_l - 1}{2} g_k(\vartheta_l) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \end{aligned} \quad (8.21)$$

und damit die Taylorreihe von (8.14) um  $\vartheta_k \neq \vartheta_l$

$$\begin{aligned} \bar{s}_{l,\tau}(\vartheta) &= |C| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left| 2 \sin \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right|^{\delta_k - 1} \\ &\quad \left[ 1 + \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \frac{1 - \delta_k}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right) (\vartheta - \vartheta_l) + O\left((\vartheta - \vartheta_l)^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Die Entwicklung von (8.9) liefert wegen (8.12) die Koeffizienten

$$\dot{\tau}(\vartheta_l) = 1, \quad \text{und} \quad \ddot{\tau}(\vartheta_l) = 0 \quad (8.23)$$

und damit

$$\dot{\tau}(\vartheta) = 1 + O\left((\vartheta - \vartheta_l)^2\right). \quad (8.24)$$

Multipliziert man (8.20), (8.22) und (8.24) miteinander, ergibt dies die schliesslich die Reihe für (8.10),

$$\dot{s}(\vartheta) = |\vartheta - \vartheta_l|^{\delta_l - 1} |C| \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left| 2 \sin \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right|^{\delta_k - 1} \left[ 1 + \left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \frac{\delta_k - 1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right) (\vartheta - \vartheta_l) + O((\vartheta - \vartheta_l)^2) \right], \quad (8.25)$$

welche nun termweise integriert werden kann. Dies resultiert in der gesuchten Entwicklung der Ränderzuordnung in den Ecken:

$$s - s_l = \sigma_{l0} |\vartheta - \vartheta_l|^{\delta_l - 1} (\vartheta - \vartheta_l) \left[ 1 + \sigma_{l1} (\vartheta - \vartheta_l) + O((\vartheta - \vartheta_l)^2) \right]. \quad (8.26)$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} s_l &:= s(\vartheta_l) \\ \sigma_{l0} &:= \frac{|C|}{\delta_l} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left| 2 \sin \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2} \right|^{\delta_k - 1} \\ \sigma_{l1} &:= \frac{\delta_l}{\delta_l + 1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \frac{\delta_k - 1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta_l - \vartheta_k}{2}. \end{aligned} \quad (8.27)$$



## 8.2 THEODORSEN-ABBILDUNG

### a) Gleichung von Theodorsen

Die Theodorsen-Abbildung

$$\zeta(z) = ze^{W(z)} \quad (8.28)$$

mit der in  $D^+$  analytischen Funktion  $W(z)$ , bestimmt die Transformation des Einheitskreises in der  $z$ -Ebene auf ein Gebiet in  $\zeta$ , das durch den sternförmigen Rand  $\rho(\vartheta)$  abgeschlossen wird (Fig. 2-2). Die Ableitung der Theodorsen-Gleichungen resultiert aus der Zerlegung der Hilfsfunktion  $W(z)$  in Real- und Imaginärteil auf dem Rand. Mit

$$W(z) = \ln \left| \frac{\zeta(z)}{z} \right| + i \arg \left( \frac{\zeta(z)}{z} \right) \quad (8.29)$$

aus (8.28) folgt auf dem Rand  $z = e^{i\varphi}$ , dass

$$\zeta(e^{i\varphi}) = \rho(\vartheta(\varphi)) e^{i\vartheta(\varphi)} \quad (8.30)$$

und daher (8.29) in

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{W(e^{i\varphi})\} &= \ln(\rho(\vartheta(\varphi))), \text{ und} \\ \operatorname{Im}\{W(e^{i\varphi})\} &= \vartheta(\varphi) - \varphi \end{aligned} \quad (8.31)$$

zerlegt werden kann. Diese beiden reellen Funktionen sind definitionsgemäss konjugiert zueinander<sup>1</sup>, was auf die Theodorsen-Gleichung führt:

$$\vartheta(\varphi) - \varphi = K[\ln(\rho(\vartheta(\varphi)))]. \quad (8.32)$$

<sup>1</sup> Der Konjugationsoperator ist im Kapitel 7.2b für den kontinuierlichen, im Kapitel 7.2d für den diskreten Fall beschrieben.

### b) Modifizierte Theodorsen-Iteration

Die numerische Implementation beruht darauf, dass die Hilfsfunktion  $W(z)$  durch eine abgebrochene Potenzreihe

$$W(z) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \hat{W}_k z^k \quad (8.33)$$

approximiert wird<sup>1</sup>, und dass aus (8.32) eine Iteration gebildet wird. Die einfachste Variante dafür, die klassische Theodorsen-Iteration

$$\vartheta(\varphi)_{v+1} - \varphi = K \left[ \ln \rho(\vartheta(\varphi)_v) \right], \quad (8.34)$$

weist allerdings ein schlechtes Konvergenzverhalten auf [Gaier 64, Koppenfels und Stallmann 59]. Es wurden daher verschiedene Modifikationen und andere, ähnliche Iterationen vorgeschlagen, die in [Gutknecht 86 b] zu einer generellen Theorie vereinigt worden sind. Die implementierte Version [Gutknecht 83] ist eine Richardson-Iteration 2-ten Grades mit Unterrelaxation:

$$\begin{aligned} Y_{v+1} &= \omega K \left[ \ln \rho(Y_v + \varphi) \right] + (1 - \omega) Y_{v-1} \\ Y_v &:= \vartheta(\varphi)_v - \varphi. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Der optimale Unterrelaxationsfaktor kann durch

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad \text{mit } \varepsilon = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq \vartheta \leq 2\pi} \left| \frac{\dot{\rho}(\vartheta)}{\rho(\vartheta)} \right| \quad (8.36)$$

aus der Randkurve bestimmt werden.

Die Approximation (8.33) ermöglicht bei der Berechnung der Konjugation die Anwendung der FFT, beschränkt andererseits die

<sup>1</sup> Die in (8.33) eingeführte ganze Zahl  $n$  hat nichts mit der Anzahl Dirichlet-respektive von Neumann-Rändern zu tun (Fig. 3-1), die ebenfalls mit  $n$  bezeichnet wird.

Abbildung auf glatte Ränder<sup>1</sup>. Werden die Koeffizienten von  $W(z)$  (8.33) durch

$$\hat{W}_k = \hat{W}_{Rk} + i\hat{W}_{Jk} \quad (8.37)$$

in Real- und Imaginärteil aufgespalten, können damit die Ausdrücke (8.31) approximiert werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{W(e^{i\varphi})\} &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{W}_{Rk} \cos k\varphi - \hat{W}_{Jk} \sin k\varphi \\ \operatorname{Im}\{W(e^{i\varphi})\} &= \sum_{k=0}^{n-1} \hat{W}_{Jk} \cos k\varphi + \hat{W}_{Rk} \sin k\varphi \end{aligned} \quad (8.38)$$

Daraus geht ähnlich wie auch aus Kapitel 7.2d hervor, dass die Konjugation aus einer Vertauschung mit Vorzeichenwechsel von Real- und Imaginärteil der Koeffizienten  $\hat{W}_{Rk}$  und  $\hat{W}_{Jk}$  besteht. In der realisierten Implementation werden die reellen Fouriertransformationen auf komplexe reduziert, was eine Halbierung des Aufwandes bewirkt [Brigham 74].

Bei den Ausdrücken (8.33) und (8.38) handelt es sich um trigonometrische Approximationen der Daten. Oszillationseffekte<sup>2</sup> können gedämpft werden, wenn eine andere als die trigonometrischen Approximation angenommen<sup>3</sup> werden. Dies äussert sich in einer zusätzlichen Gewichtung der Fourierkoeffizienten mit datenunabhängigen Abminderungsfaktoren bei der Synthese<sup>4</sup>:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\mu n} \chi_k \hat{W}_{k \bmod n} z^k. \quad (8.39)$$

<sup>1</sup> Dies ist mit ein Grund, warum eine spezielle erste Abbildung zur Elimination der Ecken (Kapitel 8.1) benutzt wird.

<sup>2</sup> Sogenannte Gibbssche Oszillationen [Brigham 74].

<sup>3</sup> Zum Beispiel Spline-Interpolation, Caesaro- oder Lanzco-Glättung usw. [Gutknecht 86 a].

<sup>4</sup> Damit ist es auch möglich, Daten auf einem  $\mu$  mal feineren Raster zu generieren. Näheres zur ganzen Theorie um die Abminderungsfaktoren ist zum Beispiel in [Henrici 86] oder [Gutknecht 76 a] zu finden.

Der Algorithmus zur Berechnung der Theodorsen-Abbildung (8.29) besteht aus den folgenden Schritten<sup>1</sup>:

(A) Vorbereiten der Iteration:

- der Rand  $\rho(\vartheta)$  muss kontinuierlich gegeben sein, je nachdem müssen daher Interpolationskoeffizienten bestimmt werden<sup>2</sup>.
- Der Unterrelaxationsfaktor (8.36),
- die Stützstellen  $\varphi_j := e^{i2\pi j/n}$ ,  $l = 0, \dots, n-1$  auf dem Einheitskreis,
- die Abminderungsfaktoren und
- die Anfangsnäherungen  $Y_{0j} = Y_{-1j} = 0$  müssen bestimmt werden.

(B) Iteration zur Bestimmung der Koeffizienten  $\hat{W}_k$ :

- Rand der  $\nu$ -ten Näherung  $\rho_j := \rho(Y_{\nu j} + \varphi_j)$  bestimmen.
- Konjugierte  $K[\ln(\rho_j)]$  in drei Schritten berechnen:
  - 1) Fourieranalyse von  $\ln(\rho_j)$ ,
  - 2) Konjugation (Vertauschen von Real- und Imaginärteil mit Vorzeichenwechsel (8.38)) und Multiplikation mit Abminderungsfaktoren und
  - 3) Fouriersynthese der in 2) modifizierten Fourierkoeffizienten liefert  $K[\rho_j]$ .
- Näherung  $Y_{\nu+1}$  aus (8.35) bestimmen
- $\nu = \nu + 1$  setzen, Abbruchkriterium prüfen.

**c) Auswertung der Theodorsen-Abbildung**

Sind die Koeffizienten  $\hat{W}_k$  der Potenzreihe (8.33) einmal bestimmt, geht es bei der Vorwärtsabbildung nur noch darum, die Funktion

<sup>1</sup> Diese Schritte entsprechen den Punkten (6) und (7) des am Ende von Kapitel 2 beschriebenen Verfahrens.

<sup>2</sup> Wurde bereits eine Schwarz-Christoffel-Abbildung berechnet, ist diese Interpolation unumgänglich. Da die Abbildung (8.1) nur punktweise ausgewertet werden kann, würde sonst ein immenser numerischer Aufwand folgen.

(8.28) möglichst effizient auszuwerten. Dies kann an  $n$  Punkten simultan durch eine FFT geschehen, falls die Punkte

$$z_j := re^{i2\pi j/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (8.40)$$

äquidistant auf einem Kreis verteilt sind. Dann kann nämlich (8.33) als Fourierreihe

$$W(z_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{W}_k r^k e^{i2\pi jk/n} \quad (8.41)$$

aufgefasst werden, wobei die Koeffizienten  $\hat{W}_k$  erst mit  $r^k$  modifiziert werden müssen<sup>1</sup>.

An einzelnen, beliebigen Punkten wird die Berechnung etwas aufwendiger, die Potenzreihe (8.33) muss durch ein Horner Schema

$$\begin{aligned} W(z)_0 &= \hat{W}_{n-1} \\ W(z)_{k+1} &= W(z)_k z + \hat{W}_{n-k-2}, \quad k = 0, \dots, n-2 \end{aligned} \quad (8.42)$$

ausgewertet werden.

Der Gradient

$$\zeta'(z) = (1 + zW'(z))e^{W(z)} \quad (8.43)$$

wird aus (8.28) durch analoge Verfahren berechnet. Der erste Term in (8.43) nämlich wie (8.33) ebenfalls eine Potenzreihe,

$$1 + zW'(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k\hat{W}_k z^k, \quad (8.44)$$

die je nachdem durch die FFT oder ein Horner Schema ausgewertet wird.

---

<sup>1</sup> Allenfalls können zusätzlich auch noch Abminderungsfaktoren berücksichtigt werden.

Die inverse Abbildung einzelner Punkte ist aufwendiger: gesucht ist der Punkt  $z$ , welcher durch die Abbildung (8.28) auf die gegebene Stelle  $\zeta_*$  abgebildet wird. Eine Newton-Iteration scheint erfolgversprechend, wenn der gesuchte Punkt auf dem Rand liegt, da in diesem Fall aus den Stützwerten  $\varphi_j$  ein guter Startwert gefunden werden kann. Allerdings müssen bei jedem Iterationsschritt

$$z_{v+1} = z_v + \frac{\zeta_* - z_v e^{W(z_v)}}{(1 + z_v W'(z_v)) e^{W(z_v)}} \quad (8.45)$$

die Reihen (8.33) und (8.43) durch ein eher aufwendiges Horner-schema berechnet werden. Glücklicherweise muss dieser Prozess effektiv nur für wenige Punkte durchgeführt werden<sup>1</sup>.

#### d) Entwicklung der Ränderzuordnung

Da die Hilfsfunktion  $W(z)$  überall auf dem Rand glatt ist, kann deren Imaginärteil (8.31b) in jedem Punkt  $e^{i\theta_1}$  in eine Potenzreihe

$$\vartheta(\varphi) - \vartheta(\varphi_1) = d_{11}(\varphi - \varphi_1) \left[ 1 + d_{12}(\varphi - \varphi_1) + O((\varphi - \varphi_1)^2) \right] \quad (8.46)$$

entwickelt werden. Die Koeffizienten<sup>2</sup>  $d_{11}$  und  $d_{12}$  folgen aus den ersten zwei Ableitungen von (8.38b):

$$\begin{aligned} d_{11} &:= \vartheta'(\varphi_1) = \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k (\hat{W}_{Rk} \cos k\varphi_1 - \hat{W}_{Jk} \sin k\varphi_k) \right) \\ d_{12} &:= \frac{\vartheta''(\varphi_1)}{2\vartheta'(\varphi_1)} = \left( - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 (\hat{W}_{Jk} \cos k\varphi_1 + \hat{W}_{Rk} \sin k\varphi_k) \right) / d_{11}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

<sup>1</sup> Vergleiche dazu den Punkt (A) der Beschreibung des gesamten Lösungsverfahrens am Ende des Kapitels 4.

<sup>2</sup> Werden die Ecken «nur» durch Polynome eliminiert (Kapitel 8.1), ist die Zwischenkurve nur in  $C^1$ . Daher sind quadratische und höhere Terme eigentlich nicht sinnvoll. Trotzdem muss in gewissen Fällen der quadratische Term mitgenommen werden, um die Extraktion für alle bis auf  $C^1$ -Terme durchführen zu können (vgl. Kapitel 10).

### 8.3 GESAMTABBILDUNG

#### a) Auswertung der Abbildung

Sind die Abbildungsparameter der beiden Teilabbildungen (8.1) und (8.28) bestimmt, wird die Gesamtabbildung durch die Verknüpfung

$$\omega(z) = \omega(\zeta(z)) \quad (8.48)$$

berechnet. Der Gradient lässt sich entsprechend aus (8.6) und (8.43) berechnen:

$$\omega'(z) = \frac{d\omega}{d\zeta}(\zeta(z)) \frac{d\zeta}{dz}(z). \quad (8.49)$$

Die dazu notwendigen numerischen Prozeduren wurden in den vorhergehenden zwei Kapiteln erläutert.

Um in Ecknähe die Lösung auszuwerten (Kapitel 11.2c), braucht es eine spezielle Darstellung von (8.49). Aus (8.6) und (8.28) folgt für die Ecke  $z_l$

$$\omega'(z) = \left(1 - \frac{\zeta(z)}{\zeta(z_l)}\right)^{\delta_l - 1} C \zeta'(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left(1 - \frac{\zeta(z)}{\zeta(z_k)}\right)^{\delta_k - 1}. \quad (8.50)$$

Mit der Entwicklung um  $z_l$

$$\zeta(z) = \zeta(z_l) + \zeta'(z_l)(z - z_l) + \tilde{\zeta}(z), \quad (8.51)$$

wobei  $\tilde{\zeta}(z)$  eine doppelte Nullstelle in  $z_l$  hat, lässt sich der erste Term in (8.50) durch

$$\left(1 - \frac{\zeta(z)}{\zeta(z_l)}\right) = \left(1 - \frac{z}{z_l}\right) \left[ \frac{z_l}{\zeta(z_l)} \left( \zeta'(z_l) - \frac{\tilde{\zeta}(z)}{z - z_l} \right) \right] \quad (8.52)$$

ausdrücken. Der Ausdruck in eckiger Klammer ist für  $z = z_l$  endlich und von Null verschieden. Damit kann (8.50) anders dargestellt werden, wobei die Funktion  $\tilde{\omega}_l'(z)$  für  $z = z_l$  ebenfalls endlich und von Null verschieden ist:

$$\omega'(z) = \left(1 - \frac{z}{z_l}\right)^{\delta_l - 1} \tilde{\omega}_l'(z)$$

$$\tilde{\omega}_l'(z) := \left[ \frac{z_l}{\zeta(z_l)} \left( \zeta'(z_l) - \frac{\tilde{\zeta}(z)}{z - z_l} \right) \right]^{\delta_l - 1} C \zeta'(z) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^N \left( 1 - \frac{\zeta(z)}{\zeta(z_k)} \right)^{\delta_k - 1} \quad (8.53)$$

**b) Entwicklung der Ränderzuordnung um glatte Punkte**

Gehört der Punkt

$$s_l := s(\varphi_l) \quad (8.54)$$

zu einem glatten Randstück, ist die Funktion  $s(\varphi)$  glatt und lässt sich daher durch die Taylorreihe

$$s - s_l := \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_l)(\varphi - \varphi_l) + O((\varphi - \varphi_l)^2) \quad (8.55)$$

ausdrücken. Der erste Koeffizient resultiert aus der Multiplikation von (8.6) mit (8.43):

$$\frac{ds}{d\varphi}(\varphi_l) = \frac{ds}{d\tau}(\zeta(e^{i\varphi_l})) \frac{d\tau}{d\varphi}(e^{i\varphi_l}) = \left| \frac{d\omega}{d\zeta}(\zeta(e^{i\varphi_l})) \right| \left| \frac{d\zeta}{dz}(e^{i\varphi_l}) \right|. \quad (8.56)$$

**c) Entwicklung der Ränderzuordnung in Ecknähe**

An Ecken,

$$s_l := s(\varphi_l), \quad (8.57)$$

ist die Funktion  $s(\varphi)$  singulär. Die entsprechende Entwicklung folgt aus der Verknüpfung von (8.26) mit (8.46)

$$s - s_l = \sigma_{l0} d_{l1}^{\delta_l} \operatorname{sign}(\varphi - \varphi_l) |\varphi - \varphi_l|^{\delta_l} \left[ 1 + (\sigma_{l1} d_{l1} + \delta_l d_{l2})(\varphi - \varphi_l) + O((\varphi - \varphi_l)^2) \right], \quad (8.58)$$

wobei die Koeffizienten aus (8.27) und (8.47) hervorgehen. Da  $\delta_l \in (0, 2) \setminus 1$  für geschlossene Polygone gilt (Fig. 8-2), berücksichtigt die Reihe (8.58) explizit alle Terme mit Exponent  $\leq 1$ .



Leer - Vide - Empty

## Kapitel 9

### Riemann–Hilbert–Problem

---

Wie im ersten Kapitel erwähnt, liegt der Keim des ganzen Lösungsverfahrens in der Formulierung eines äquivalenten Riemann–Hilbert–Problems (RHP). Um eine Lösung herleiten zu können muss dieses erst nochmals in ein Koppelungsproblem umgewandelt werden, bevor mit dem Aufbau der Lösung, basierend auf den Sokhotskyi–Formeln (Kapitel 7.1c), begonnen werden kann. Da die Formulierung der verschiedenen äquivalenten Problemstellungen im Kapitel 3 bereits ausführlich beschrieben ist, genügt hier eine Zusammenfassung (Kapitel 9.1). Der Aufbau der Lösung (Kapitel 9.2) fällt entsprechend detaillierter aus.

## 9.1 ÄQUIVALENTE PROBLEMSTELLUNGEN

### a) Gemischtes Randwertproblem

Gesucht ist die Lösung des konform auf den Einheitskreis verpflanzten Potentialproblems (Fig. 1-1 und 3-1),

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 && \text{in } D^+, \\ U &= U_0 && \text{auf } \partial D_u, \\ Q &:= \frac{dU}{dn} = Q_0 && \text{auf } \partial D_q. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Die Übergangspunkte von  $\partial D_q$  nach  $\partial D_u$  seien wie bereits in den früheren Kapiteln mit

$$a_k = e^{i\alpha_k}, \quad k=1, \dots, n, \quad (9.2)$$

diejenigen von  $\partial D_u$  nach  $\partial D_q$  mit

$$b_k = e^{i\beta_k}, \quad k=1, \dots, n \quad (9.3)$$

bezeichnet. Die Anzahl Dirichlet-Randstücke  $\partial D_u$ , respektive von Neumann-Randstücke  $\partial D_q$  sei  $n$ .

### b) Äquivalentes Riemann-Hilbert-Problem

Der Realteil  $U(z)$  jeder in  $D^+$  analytischen Funktion

$$F(z) = U(z) + iV(z) \quad (9.4)$$

erfüllt die Differentialgleichung (9.1a). Die Randbedingungen (9.1b und c) können als eigentliches RHP,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\overline{\alpha(\varphi)} F^+(e^{i\varphi})\} &= \Gamma(\varphi), \\ \alpha(\varphi) &= 1, \quad \Gamma(\varphi) = U_0(\varphi) && \varphi \in \partial D_u, \\ \alpha(\varphi) &= i, \quad \Gamma(\varphi) = V_0(\varphi) + C(\varphi) && \varphi \in \partial D_q, \end{aligned} \quad (9.5)$$

formuliert werden<sup>1</sup> falls die gegebenen Randwerte  $\mathcal{Q}_0(\varphi)$  entlang den von Neumann-Rändern integriert werden:

$$\begin{aligned}
 V_0(\varphi) &:= \int_{\beta_k}^{\varphi} \mathcal{Q}_0(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad \beta_k \leq \varphi \leq \alpha_{k+1}, \quad k=1, \dots, n, \\
 C(\varphi) &:= \begin{cases} 0 & \text{auf } \partial D_u \\ C_k & \text{auf } \partial D_u, \quad \beta_k \leq \varphi \leq \alpha_{k+1}, \quad k=1, \dots, n. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

Die Funktion  $C(\varphi)$  beinhaltet die dabei entstehenden Integrationskonstanten  $C_k$ . Damit (9.4) bis (9.6) wirklich der Problemstellung (9.1) entspricht, müssen die Zusatzbedingungen

$$\begin{aligned}
 F(z) &\text{ analytisch in } D^+, \\
 &\text{analytisch auf } \partial D \text{ fortsetzbar und} \\
 &\text{beschränkt in } D^+ \cup \partial D,
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

ebenfalls erfüllt sein (vgl. Kapitel 3).

### c) Zugehöriges Koppelungsproblem

Das eigentliche RHP (9.5) wird nochmals unterteilt. Dazu muss die Funktion (9.4) mit Hilfe der assoziierten Funktion

$$F_*(z) := \overline{F(1/\bar{z})} \tag{9.8}$$

auf die ganze komplexe Ebene ausgeweitet werden:

$$F(z) \equiv F_*(z), \quad |z| > 1, \tag{9.9}$$

die Symmetriebedingung bezüglich dem Einheitskreis (Fig. 7-3). Da wegen (9.8) und (9.9) auf dem Rand

---

<sup>1</sup> Mit  $F^+$  wird der innere Grenzwert bezeichnet (Kapitel 7.1c). Die komplexe Funktion  $a(\varphi)$  wird oft Koeffizient des RHP genannt, der im vorliegenden Fall an den Übergangspunkten diskontinuierlich ist. Es ist nicht von vornherein klar wie sich das Argument des Koeffizienten an diesen Stellen verhält. Je nachdem wird die entsprechende kanonische Lösung (Kapitel 9.2a) dort beschränkt oder nicht.

$$F^+(e^{i\varphi}) = \overline{F^-(e^{i\varphi})} \quad \text{und} \quad F^-(e^{i\varphi}) = \overline{F^+(e^{i\varphi})} \quad (9.10)$$

gilt, kann das RHP (9.5) mit Hilfe von (9.9) in das Koppelungsproblem

$$\begin{aligned} F^+(e^{i\varphi}) &= G(\varphi)F^-(e^{i\varphi}) + g(\varphi) \\ G(\varphi) &:= -\frac{\alpha(\varphi)}{\alpha(\varphi)} \\ g(\varphi) &:= \frac{2\Gamma(\varphi)}{\alpha(\varphi)} \end{aligned} \quad (9.11)$$

umgewandelt werden, was gleichbedeutend ist (vgl. (9.5)) mit

$$\begin{aligned} F^+(e^{i\varphi}) &= -F^-(e^{i\varphi}) + 2U_0(\varphi) && \text{auf } \partial D_u, \\ F^+(e^{i\varphi}) &= F^-(e^{i\varphi}) + 2i(V_0(\varphi) + C(\varphi)) && \text{auf } \partial D_q. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Damit ist (9.1) einerseits äquivalent zu (9.4), ..., (9.7) und andererseits (9.5) äquivalent zu (9.9), (9.12).

## 9.2 HERLEITUNG DER LÖSUNG

### a) Kanonische Lösung

Als erstes wird zum Aufbau der Lösung die kanonische Lösung  $X(z)$  gebraucht.  $X(z)$  ist zunächst eine nichtverschwindende in  $D^+$  und  $D^- \setminus \{\infty\}$  analytische Lösung des homogenen Koppelungsproblems (9.12),

$$\begin{aligned} X^+(e^{i\varphi}) &= -X^-(e^{i\varphi}) \quad \text{auf } \partial D_u, \\ X^+(e^{i\varphi}) &= X^-(e^{i\varphi}) \quad \text{auf } \partial D_q, \end{aligned} \quad (9.13)$$

welche in  $\{\infty\}$  höchstens einen Pol minimaler Ordnung haben darf. Man beachte, dass die Bedingung (9.13b) einer analytischen Fortsetzung über die von Neumann-Ränder gleichkommt. Der Rand zerfällt daher in einzelne Bogenstücke  $\partial D_u$ . Ist die kanonische Lösung  $X_k(z)$  für ein einzelnes Bogenstück bekannt, erfüllt das Produkt<sup>1</sup>

$$X(z) = C \prod_{k=1}^n X_k(z) \quad (9.14)$$

die Bedingung (9.13). Es ist also zunächst eine kanonische Lösung gesucht, die

$$X_{k0}^+(e^{i\varphi}) = -X_{k0}^-(e^{i\varphi}) = e^{i\tau} X_{k0}^-(e^{i\varphi}) \quad (9.15)$$

auf dem  $k$ -ten Bogenstück  $\partial D_u$  erfüllt<sup>2</sup>. Da diese Lösung voraussetzungsgemäss nirgends verschwindet, darf (9.15) logarithmiert werden,

$$\ln X_{k0}^+(e^{i\varphi}) - \ln X_{k0}^-(e^{i\varphi}) = i\tau. \quad (9.16)$$

- 
- 1 Würde statt dem Produkt- ein Summenansatz versucht, würde man feststellen, dass die Lösung des  $k$ -ten Bogenstückes bei allen anderen eine Inhomogenität in der Gleichung (9.13a) bewirkte, diese also nicht mehr erfüllen würde.
  - 2 Der Index 0 deutet an, dass aus dieser Bedingung nur eine spezielle Lösung gefunden wird, die weiter unten erweitert wird.

Ein Vergleich mit der Sokhotskyi-Formel (7.12b) und deren Zusammenhang mit Cauchy-Integralen (7.5) zeigt, dass mit  $t = e^{i\varphi}$

$$\ln X_{k_0}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a_k}^{\beta_k} \frac{i\pi}{e^{i\varphi} - z} i e^{i\varphi} d\varphi \quad (9.17)$$

eine Lösung von (9.16) ist. Solange  $z$  nicht auf dem Bogenstück selbst liegt, darf (9.17) explizit integriert werden<sup>1</sup>,

$$\ln X_{k_0}(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{b_k - z}{a_k - z}. \quad (9.18)$$

Dies führt auf eine Funktion

$$X_{k_0}(z) = C(z - a_k)^{-1/2} (z - b_k)^{1/2}. \quad (9.19)$$

Es stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit von (9.19). Sei der Ansatz der allgemeinen Lösung

$$X_k(z) = k(z) X_{k_0}(z). \quad (9.20)$$

$X_{k_0}(z)$  erfüllt (9.15) bereits, von  $X_k(z)$  muss dies ebenfalls verlangt werden. Daher gilt

$$\begin{aligned} X_k^+(e^{i\varphi}) &= k^+(e^{i\varphi}) X_{k_0}^+(e^{i\varphi}) = -X_k^-(e^{i\varphi}) \\ &= -k^-(e^{i\varphi}) X_{k_0}^-(e^{i\varphi}) = k^-(e^{i\varphi}) X_{k_0}^+(e^{i\varphi}) \end{aligned} \quad (9.21)$$

woraus die Bedingung

$$k^+(e^{i\varphi}) = k^-(e^{i\varphi}) \quad (9.22)$$

folgt, die bedeutet, dass  $k(z)$  überall ausser in den nicht regulären Endpunkten  $a_k$  und  $b_k$ , sowie dem Punkt  $\{\infty\}$  analytisch sein muss. Es ist also

<sup>1</sup> Entsprechend Figur 3-1 wird  $a_k = \exp(i\alpha_k)$  und  $b_k = \exp(i\beta_k)$  gesetzt.

$$k(z) = C(z - a_k)^{n_{a_k}} (z - b_k)^{n_{b_k}} \quad (9.23)$$

und entsprechend

$$X_k(z) = C(z - a_k)^{n_{a_k} - 1/2} (z - b_k)^{n_{b_k} + 1/2}. \quad (9.24)$$

Je nach Wahl der ganzen Zahlen  $n_{a_k}$  und  $n_{b_k}$  ist  $X_k(z)$  in den Übergangsstellen  $a_k$  und  $b_k$  beschränkt oder nicht. Im Punkt  $\{\infty\}$  entsteht ein Pol vom Grade  $n_{a_k} + n_{b_k}$ , falls diese Summe positiv ist. Da die gesuchte kanonische Lösung sowohl in  $D^+$  als auch auf dem ganzen Rand  $\partial D$  beschränkt sein soll (9.7c), andererseits der Pol in  $\{\infty\}$  minimal sein soll, muss

$$n_{a_k} = 1, \text{ und } n_{b_k} = 0 \quad (9.25)$$

gesetzt werden. Aus (9.14) ergibt sich damit die gesuchte kanonische Lösung

$$X(z) = C \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2}. \quad (9.26)$$

Sie wird in den Punkten  $a_k$  und  $b_k$  null und weist in  $\{\infty\}$  einen Pol  $n$ -ten Grades auf. Damit die Wurzelfunktionen in (9.26) eindeutig festgelegt sind, muss die komplexe Ebene wegen (9.13a) entlang den Dirichlet-Rändern  $\partial D_u$  aufgeschnitten werden. Aus (9.26) folgt für die assoziierte kanonische Lösung

$$X_*(z) := \overline{X(1/\bar{z})} = \frac{\bar{C}}{C} \frac{X(z)}{z^n} \prod_{k=1}^n a_k^{-1/2} b_k^{-1/2}. \quad (9.27)$$

Mit der Wahl

$$C = \prod_{k=1}^n a_k^{-1/4} b_k^{-1/4} \quad (9.28)$$



gilt schlussendlich<sup>1</sup>

$$X_*(z) = \frac{X(z)}{z^n}. \quad (9.29)$$

### b) Partikuläre Lösung des Koppelungsproblems

Aus der eben hergeleiteten kanonischen Funktion  $X(z)$  kann wiederum mit Hilfe der Sokhotskyi–Formel (7.12b) eine partikuläre Lösung  $F_{p_0}(z)$  des eigentlichen Koppelungsproblems (9.11), respektive (9.12) gefunden werden. Da die kanonische Lösung die entsprechende homogene Gleichung erfüllt, gilt für den Quotienten<sup>2</sup>  $F_{p_0}(z)/X(z)$

$$\left( \frac{F_{p_0}(e^{i\varphi})}{X(e^{i\varphi})} \right)^+ = \left( \frac{F_{p_0}(e^{i\varphi})}{X(e^{i\varphi})} \right)^- + \frac{g(\varphi)}{X^+(e^{i\varphi})}. \quad (9.30)$$

Ein Vergleich mit (7.12) zeigt, dass mit  $t = e^{i\varphi}$  und (9.11)

$$F_{p_0}(z) = \frac{X(z)}{2\pi} \oint J_0(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \quad (9.31)$$

gelten muss, wobei

$$J_0(\varphi) = \frac{2\Gamma(\varphi)}{a(\varphi)X^+(e^{i\varphi})} \quad (9.32)$$

ist. Obwohl  $J_0(\varphi)$  in den Übergangspunkten  $a_k$  und  $b_k$  singularär ist, ist die Funktion  $F_{p_0}(z)$  beschränkt, da sich diese Singularitäten mit den Nullstellen von  $X(z)$  aufheben.

<sup>1</sup> C könnte noch mit einem beliebigen reellen Faktor versehen werden, der jedoch für die Methode unerheblich ist und infolgedessen weggelassen wird.

<sup>2</sup> Dieser Quotient existiert überall, ausser allenfalls in den Punkten  $a_k$  und  $b_k$ , weil die kanonische Lösung eine von null verschiedene Funktion ist.

Drei Fragen müssen nun noch beantwortet werden, bevor die allgemeine Lösung des zu (9.1) äquivalenten Koppelungsproblem feststeht:

- Wie lautet die allgemeine Lösung des eigentlichen Koppelungsproblems (9.12), wenn nur Lösungen betrachtet werden, die im Gebiet und auf dem Rand beschränkt bleiben?
- Wie wird die Symmetriebedingung (9.9) erfüllt?
- Was bewirkt die Forderung nach der Analytizität der Lösung in  $D^+$ ?

Die Beantwortung der zweiten Frage wird die Grundlage zur Antwort der dritten liefern, worauf sich zeigen wird, dass die erste automatisch beantwortet ist.

**c) Symmetriebedingung erfüllen**

Es gibt eine einfache Konstruktion, um jede Lösung  $F_K(z)$  des eigentlichen Koppelungsproblems (9.12) zu symmetrisieren. Da die Grenzwerte der assoziierten Funktion  $F_{K^*}(z)$  die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overline{F_{K^*}^+(e^{i\varphi})} &= F_K^-(e^{i\varphi}) \quad \text{und} \\ \overline{F_{K^*}^-(e^{i\varphi})} &= F_K^+(e^{i\varphi}) \end{aligned} \tag{9.33}$$

erfüllen (vgl. (9.10)), folgt aus (9.11)

$$F_{K^*}^+(e^{i\varphi}) = G(\varphi) F_{K^*}^-(e^{i\varphi}) + g(\varphi). \tag{9.34}$$

Die assoziierte Funktion  $F_{K^*}(z)$  ist also ebenfalls eine Lösung des Koppelungsproblem. Daraus kann die symmetrisierte Lösung

$$F(z) = \frac{1}{2} (F_{K^*}(z) + F_K(z)) \tag{9.35}$$

konstruiert werden, die (9.9) erfüllt.

**d) Analytizität im Gebiet erfüllen**

Aus der Lösung (9.31), (9.32) kann mit (9.35) eine symmetrische Lösung des eigentlichen Koppelungsproblems (9.12) und damit eine Lösung des eigentlichen RHPs (9.5) konstruiert werden:

$$F_{p_0S}(z) = \frac{1}{2} \left( F_{p_0^*}(z) + F_{p_0}(z) \right). \quad (9.36)$$

Es stellt sich die Frage nach der Analytizität dieser Lösung in  $D^+$  (9.7a).  $F_{p_0}(z)$  ist offensichtlich in  $D^+$  analytisch, hat jedoch einen Pol vom Grad  $n-1$  in  $\{\infty\}$ <sup>1</sup>. Bei der gespiegelten Funktion  $F_{p_0^*}(z)$  ist der Sachverhalt genau umgekehrt, analytisch in  $D^-$ , Pol  $n-1$ -ter Ordnung in 0. Die Funktion (9.36) ist also im allgemeinen keine Lösung des äquivalenten RHPs (9.4) bis (9.7).

Glücklicherweise steckt in  $J_0(\varphi)$  (9.32) die Funktion  $C(\varphi)$  (9.6), die  $n$  offene Integrationskonstanten  $C_k$  enthält. Eine spezielle Wahl dieser Konstanten wird die Analytizität von  $F_{p_0S}(z)$  in 0 ermöglichen. Die zugehörigen Bedingungsgleichungen können aus der Reihenentwicklung der Funktion  $F_{p_0}(z)$  um den Punkt  $\{\infty\}$  abgelesen werden. Da die kanonische Lösung (9.26) dort einen Pol  $n$ -ten Grades hat, kann sie in die Reihe

$$X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{X}_j z^{n-j} \quad (9.37)$$

entwickelt werden. Im Integranden von (9.31) kann der Term  $e^{i\varphi}/(e^{i\varphi} - z)$  entsprechend durch die Reihe

$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{e^{i\varphi}}{z} \right)^k \quad (9.38)$$

ausgedrückt werden. Die beiden Reihen (9.37) und (9.38) in (9.31) eingesetzt ergeben

---

<sup>1</sup> Das Cauchy-Integral (9.31) hat einen Pol 1-ten Grades in  $\{\infty\}$ .

$$F_{p_0}(z) = - \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_j \left[ \frac{1}{2\pi} \oint J_0(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi \right] z^{n-j-k}. \quad (9.39)$$

Soll  $F_{p_0}(z)$  in  $\{\infty\}$  analytisch sein, müssen alle Koeffizienten von  $z^m$  mit  $m > 0$  verschwinden. Da  $\hat{X}_j$  gegebene, von null verschiedene Werte sind, müssen die Bedingungen

$$\frac{1}{2\pi} \oint J_0(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi = 0, \quad k=1, \dots, n-1 \quad (9.40)$$

durch entsprechende Wahl von  $C(\varphi)$  erfüllt werden. Dieselben Bedingungen (9.40) bewirken auch die Analytizität von  $F_{p_0^*}(z)$  in 0.

Es bleibt die Frage nach der Eindeutigkeit und der expliziten Form der Lösung (9.36) unter den Nebenbedingungen (9.49).

### e) Eindeutigkeit und explizite Form der Lösung

In [Henrici 86] wird gezeigt, wie die allgemeine Lösung eines RHPs aus der symmetrisierten Lösung des Koppelungsproblems (9.36) und der kanonischen Lösung (9.26), (9.28) konstruiert wird. Es stellt sich dabei heraus, dass im vorliegenden Fall  $F_{p_0^*}(z)$  tatsächlich die einzige Lösung ist, falls die Nebenbedingungen (9.40) erfüllt sind.

Die Frage nach der expliziten Form von (9.36) kann aus dem Zusammenhang zwischen  $F_{p_0}(z)$  und  $F_{p_0^*}(z)$  hergeleitet werden. Wegen (9.8) und (9.31) ist nämlich

$$F_{p_0^*}(z) = \frac{X_*(z)}{2\pi} \oint \overline{J_0(\varphi)} \frac{e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi} - 1/z} d\varphi. \quad (9.41)$$

Aus (9.11), (9.29) und (9.33) folgt

$$\overline{X^+(e^{i\varphi})} = X_*^-(e^{i\varphi}) = \frac{X^-(e^{i\varphi})}{e^{i\varphi}} = \frac{X^+(e^{i\varphi})}{G(\varphi)e^{i\varphi}} = -\frac{\overline{\alpha(\varphi)}X^+(e^{i\varphi})}{\alpha(\varphi)e^{i\varphi}}, \quad (9.42)$$

woraus sich mit (9.32) für die konjugierte Funktion

$$\overline{J_0(\varphi)} = \frac{2\Gamma(\varphi)}{\alpha(\varphi)X^+(e^{i\varphi})} = -\frac{2\Gamma(\varphi)e^{i\pi\varphi}}{\alpha(\varphi)X^+(e^{i\varphi})} = -J_0(\varphi)e^{i\pi\varphi} \quad (9.43)$$

ergibt. Der zweite Teil des Integranden in (9.41) wird ebenfalls umgeformt:

$$\frac{e^{-i\varphi}}{e^{-i\varphi} - 1/z} = -\frac{z}{e^{i\varphi}} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}. \quad (9.44)$$

Berücksichtigt man schliesslich noch (9.29), folgt aus (9.41) bis (9.44) der gesuchte Ausdruck

$$F_{p_0}^*(z) = \frac{X(z)}{z^{n-1}} \frac{1}{2\pi} \oint J_0(\varphi) e^{i(n-1)\varphi} \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi. \quad (9.45)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} F_m(z) &:= \frac{X(z)}{z^m} I_m(z) \\ I_m(z) &:= \frac{1}{2\pi} \oint J_m(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \\ J_m(\varphi) &:= \frac{2\Gamma(\varphi)e^{im\varphi}}{\alpha(\varphi)X^+(e^{i\varphi})} = J_0(\varphi)e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (9.46)$$

kann die Lösung (9.31), (9.32), (9.36) und (9.40) vorläufig zu

$$\begin{aligned} U(z) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} (F_0(z) + F_{n-1}(z)) \right\}, \\ I_m(0) &= 0, \quad m \in \{1, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (9.47)$$

zusammengefasst werden.

### f) Verallgemeinerung und Zusammenfassung der Lösung

Ist  $m \in \{0, \dots, n-1\}$ , dann sind die Funktionen  $F_m(z)$  (9.46) identisch.

Um dies zu beweisen müssen die Entwicklungen dieser Funktionen um den Nullpunkt analysiert werden. Mit den Taylorentwicklungen

$$X(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{X}_j z^j \quad \text{und} \quad (9.48)$$

$$\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z}{e^{i\varphi}} \right)^k$$

folgt aus (9.46) die Reihe

$$F_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \hat{X}_j z^{j+k-m} I_{m-k}(0), \quad |z| < 1 \quad (9.49)$$

Substituiert man  $q = k - m$  folgt daraus

$$F_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=-m}^{\infty} \hat{X}_j z^{j+q} I_{-q}(0), \quad |z| < 1. \quad (9.50)$$

Da gemäss (9.47b) die Koeffizienten

$$I_{-q}(0) = 0 \quad \forall \quad q \in \{-n+1, \dots, -1\} \quad (9.51)$$

sind, resultieren identische Entwicklungen (9.50)

$$F_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \hat{X}_j z^{j+q} I_{-q}(0), \quad |z| < 1 \quad (9.52)$$

falls

$$m \in \{0, \dots, n-1\}. \quad (9.53)$$

Für  $m < 0$ , ist  $F_m(z)$  in 0 wohl analytisch. Eine Analyse zeigt jedoch, dass dann in  $\{\infty\}$  ein Pol auftritt und demzufolge die symmetrisierte Lösung (9.47a) in 0 nicht analytisch ist. Umgekehrt entsteht ein Pol in 0, für  $m \geq n$ , was der Analytizitätsbedingung ebenfalls widerspricht.

Die Lösung des ursprünglichen Problems (9.1) wird nochmals zusammenfassend dargestellt:

$$\begin{aligned}
 U(z) &= \operatorname{Re}\{F_m(z)\} \quad \forall m \in \{0, \dots, n-1\} \\
 F_m(z) &:= \frac{X(z)}{z^m} I_m(z) \\
 I_m(z) &:= \frac{1}{2\pi} \oint J_m(\varphi) \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \\
 J_m(\varphi) &:= \frac{2\Gamma(\varphi) e^{im\varphi}}{\alpha(\varphi) X^+(e^{i\varphi})},
 \end{aligned} \tag{9.54}$$

wobei

$$I_m(0) = 0 \quad \forall m \in \{1, \dots, n-1\}, \tag{9.55}$$

die Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten in  $C(\varphi)$  erfüllt sein müssen. Der Vollständigkeit halber seien folgende Ausdrücke ebenfalls nochmals wiederholt:

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (a_k^{-1/4} b_k^{-1/4}) (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2}, \tag{9.56}$$

wobei die komplexe Ebene entlang  $\partial D_u$  aufgeschnitten sein muss (Fig. 3-2),

$$\begin{aligned}
 \alpha(\varphi) &= 1, \quad \Gamma(\varphi) = U_0(\varphi) & \varphi \in \partial D_u, \\
 \alpha(\varphi) &= i, \quad \Gamma(\varphi) = V_0(\varphi) + C(\varphi) & \varphi \in \partial D_q,
 \end{aligned}$$

$$V_0(\varphi) := \int_{\beta_k}^{\varphi} \mathcal{Q}_0(\bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad \beta_k \leq \varphi \leq \alpha_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n, \tag{9.57}$$

$$C(\varphi) := \begin{cases} 0 & \text{auf } \partial D_u, \\ C_k & \text{auf } \partial D_u, \quad k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$$a_k = e^{i\alpha_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$b_k = e^{i\beta_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Die Bezeichnungen folgen aus Figuren 3-1.

## Kapitel 10

### Analytische Extraktion der Singularitäten

---

Wie aus dem letzten Kapitel hervorgeht, müssen sowohl bei der Bestimmung der Integrationskonstanten, die bei der Formulierung des RHPs entstehen (Kapitel 9.1), als auch bei der Auswertung der Lösung selbst (Kapitel 9.2), Cauchy-Integrale über den Einheitskreis ausgewertet werden, die singuläre Stellen aufweisen. Zur Berechnung werden zwei Tatsachen über Cauchy-Integrale benutzt: erstens erlaubt der Zusammenhang von Cauchy-Integralen mit Potenzreihen (Kapitel 7.2c) die Benutzung der FFT, falls die Funktionen genügend glatt sind. Zweitens ermöglicht die Schwarzsche Formel (Kapitel 7.2a) die analytische Integration für Funktionen, die Real- oder Imaginärteil bekannter, analytischer Funktionen sind. Diese beiden Tatsachen werden verknüpft, indem analytische Ansätze so gewählt werden, dass sie bis zu einem gewissen Grad die Singularitäten approximieren (Kapitel 10.2). Die geglätteten Restfunktionen sind dann zur Auswertung mit FFT geeignet. Die Voraussetzung zur Bestimmung der Extraktionsfunktionen ist eine genaue Analyse der auftretenden Singularitäten (Kapitel 10.1), in die die bereits untersuchte Ränderzuordnung der konformen Abbildung (Kapitel 8.3c) mit hineinfließt.



**10.1 ANALYSE DER ZU EXTRAHIERENDEN SINGULARITÄTEN****a) Typisierung der auftretenden Singularitäten**

Betrachtet man die vollständige Formulierung der Lösung (9.54) bis (9.57), sieht man, dass sowohl bei den Bedingungsgleichungen (9.55), als auch bei der Auswertung der Lösung (9.54a) Cauchy-Integrale der Funktionen (9.54d) berechnet werden müssen. Eine einfache Typisierung der darin auftretenden Singularitäten kann vorgenommen werden, wenn die Ränderzuordnung der konformen Abbildung (8.56), (8.58), die kanonische Lösung auf dem Rand (9.56) und die ursprünglichen auf dem Gebietsrand gegebenen Randwerte (Fig. 1-1) einzeln charakterisiert werden.

Die Randwerte  $\Gamma(\varphi)$ , des RHPs auf dem Einheitskreis ist mit den ursprünglich auf dem Rand gegebenen Werten  $\gamma(s)$  durch die Ränderzuordnung  $s(\varphi)$  verbunden,

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \gamma(s(\varphi)), \\ \gamma(s) &= \begin{cases} u_0(s) & \text{auf } \partial\Omega_u, \\ v_0(s) + c(s) & \text{auf } \partial\Omega_q, \end{cases} \end{aligned} \quad (10.1)$$

wobei die Verpflanzungsregeln<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} U_0(\varphi) &= u_0(s(\varphi)) \\ V_0(\varphi) &= v_0(s(\varphi)) \\ C(\varphi) &= c(s(\varphi)) \end{aligned} \quad (10.2)$$

gelten. Es soll vorausgesetzt sein, dass die Randwerte (10.2) auf dem ursprünglichen Gebietsrand stückweise glatte Funktionen sind. Betrachtet man neben (10.1), (10.2) auch die Ausdrücke (8.56), (8.58), (9.56) und (9.57), können fünf verschiedene Singularitätstypen in (9.54d) charakterisiert werden (Fig.4-1):

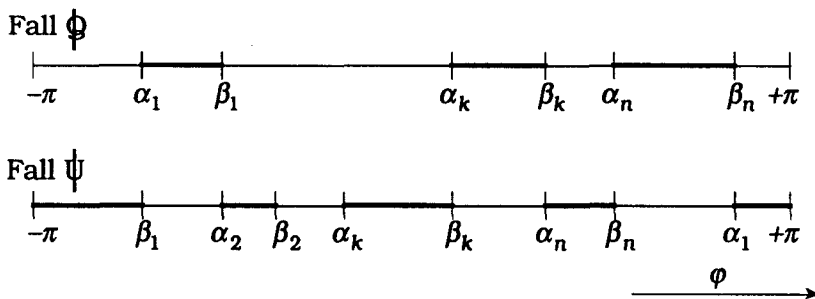
---

<sup>1</sup> Vergleiche Figur 2-1.

- (Ü) An Übergangsstellen der Randbedingungen (Punkte  $a_k$  und  $b_k$ , die nicht gleichzeitig einem Eckpunkt entsprechen) weist  $\alpha(\varphi)$  und  $\Gamma(\varphi)$  eine Sprungstelle und  $X^+(e^{i\varphi})$  eine Wurzelsingularität auf.
- (S) An Sprungstellen der Randwerte selbst, die weder mit Ecken noch mit Übergangsstellen zusammenfallen weist  $\Gamma(\varphi)$  eine Sprungstelle auf.
- (E) An Ecken des Gebietes, die nicht zu (Ü) oder (S) gehören besteht die Ecksingularität (8.54) in  $s(\varphi)$ .
- (ÜE) Fallen Übergangsstellen mit Ecken zusammen, springen dort  $\alpha(\varphi)$  und  $\Gamma(\varphi)$ . Die Wurzelsingularität in  $X^+(e^{i\varphi})$  und die Ecksingularität in  $s(\varphi)$  treten gemeinsam auf.
- (SE) Fallen Sprungstellen der Randwerte auf Ecken, treten neben dem Sprung in  $\Gamma(\varphi)$  auch die Ecksingularität in  $s(\varphi)$  auf.

Um diese Singularitäten zu extrahieren müssen an allen kritischen Stellen  $\varphi_i$  lokale Entwicklungen in  $\varphi$  gefunden werden. Die Koeffizienten dieser Reihen müssen explizit berechnet werden, um entsprechende Extraktionsfunktionen bestimmen zu können.

**b) Die «richtigen» Zweige — eine Konvention**



Figur 10-1. Liegen alle Argumente der Übergangsstellen  $a_k$  und  $b_k$  im Intervall  $[-\pi, \pi]$  und sind die Werte  $\beta_k$  aufsteigend geordnet, können prinzipiell zwei Konfigurationen unterschieden werden:  $-\pi$  liegt auf  $\partial D_q$  (Fall  $\Phi$ ) oder auf  $\partial D_u$  (Fall  $\Psi$ )

Die meisten heute gängigen Computer nehmen bei der Berechnung komplexer Logarithmen  $\ln z$  und Wurzeln  $\sqrt{z}$  einen Schnitt entlang der negativen reellen Achse an, um die Hauptwerte festzulegen. Es ist daher sinnvoll, die Argumente der komplexen Werte von  $t = e^{i\varphi}$ ,  $a_k = e^{i\alpha_k}$  und  $b_k = e^{i\beta_k}$  auf dem Rand des Einheitskreises entsprechend zu definieren:

$$\varphi, \alpha_k, \beta_k \in [-\pi, \pi). \quad (10.3)$$

Daraus und mit der Konvention

$$\beta_k < \beta_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (10.4)$$

sind grundsätzlich zwei verschiedene Konfigurationen der Übergangspunkte  $a_k$  und  $b_k$  möglich (Fig. 10-1):

Fall  $\Phi$ :  $\varphi = -\pi$  liegt auf  $\partial D_q$ , d. h.

$$-\pi < \alpha_1 < \beta_1 \quad \text{und} \quad \beta_{k-1} < \alpha_k < \beta_k, \quad k = 2, \dots, n, \quad (10.5)$$

Fall  $\Psi$ :  $\varphi = -\pi$  liegt auf  $\partial D_u$ , d. h.

$$\beta_{k-1} < \alpha_k < \beta_k, \quad k = 2, \dots, n, \quad \text{und} \quad \beta_n < \alpha_1 < \pi.$$

Zum Beispiel kann der Ausdruck  $(1 - a/b)^\kappa$  mit  $a = e^{i\alpha}$  und  $b = e^{i\beta}$  eindeutig umgeformt werden, wenn (10.3) auf den Absolutwert

$$\begin{aligned} |1 - a/b|^\kappa &= \left( (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin^2(\alpha - \beta) \right)^\kappa \\ &= \left( 2 \left( 1 - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right)^\kappa = \left| 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|^\kappa \end{aligned} \quad (10.6)$$

und auf das Argument

$$\arg\left((1 - a/b)^\kappa\right) = \kappa \frac{\alpha - \beta}{2} \begin{cases} +\kappa\pi/2 & \text{falls } \alpha < \beta \\ -\kappa\pi/2 & \text{falls } \alpha > \beta \end{cases} \quad (10.7)$$

angewendet wird:

$$(1 - \alpha/b)^\kappa = \left| 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right|^\kappa e^{i\kappa\alpha/2} e^{-i\kappa\beta/2} \begin{cases} e^{i\kappa\pi/2} & \text{falls } \alpha < \beta \\ e^{-i\kappa\pi/2} & \text{falls } \alpha > \beta. \end{cases} \quad (10.8)$$

**c) Neuformulierung der singulären Funktionen**

Mit den Definition (10.3) und mit (10.8) sollen die Funktionen  $J_m(\varphi)$  (9.54d) eindeutig und «implementationsnah» festgelegt werden. Dazu braucht es zuerst eine Untersuchung der kanonischen Lösung (9.56).

Legt man die Hauptwerte komplexer Wurzeln gemäss Kapitel 10.1b fest, muss  $X(z)$  (9.56) für das Innen- und das Aussengebiet verschieden angegeben werden, um jeweils einen analytischen Ausdruck zu erhalten:

$$X(z) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (a_k^{1/4} b_k^{1/4}) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)^{1/2} & |z| \leq 1, \\ \prod_{k=1}^n z (a_k^{-1/4} b_k^{-1/4}) \left(1 - \frac{a_k}{z}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{b_k}{z}\right)^{1/2} & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (10.9)$$

Damit die Sprungrelationen (9.13) richtig erfüllt werden, müssen auch bei den Konstanten  $a_k^{1/4} b_k^{1/4}$  die «richtigen» Zweige gewählt werden. Vorläufig sollen sie durch

$$\begin{aligned} a_k^{1/4} b_k^{1/4} &= D_k e^{i\alpha_k/4} e^{i\beta_k/4} \\ D_k &\in \{1, -1, i, -i\} \end{aligned} \quad (10.10)$$

charakterisiert werden.

Aus (10.9) und (10.10) folgen für  $z = e^{i\varphi}$  die inneren und äusseren Grenzwerte<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Das Produkt (10.11) ist nicht mit dem Ansatz (9.14) zu verwechseln. Hier sind die Teilfunktionen nur auf dem Rand definiert und enthalten einen Teil der Konstante C bereits.

$$\begin{aligned}
 X^+(e^{i\varphi}) &= \prod_{k=1}^n X_k^+(\varphi) \\
 X^-(e^{i\varphi}) &= \prod_{k=1}^n X_k^-(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{10.11}$$

wobei wegen (10.8)

$$\begin{aligned}
 X_k^+(\varphi) &= e^{i\varphi/2} 2 \sqrt{\left| \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \right|} H_k^+(\varphi) \\
 X_k^-(\varphi) &= e^{i\varphi/2} 2 \sqrt{\left| \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \right|} H_k^-(\varphi)
 \end{aligned}
 \tag{10.12}$$

mit

$$H_k^+(\varphi) = D_k \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} i \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \alpha_k \\ 1 \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \beta_k \\ -i \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} & \text{und } \alpha_k < \beta_k \\ \left\{ \begin{array}{l} i \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \beta_k \\ 1 \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \alpha_k \\ -i \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} & \text{und } \alpha_k > \beta_k \end{cases}
 \tag{10.13}$$

respektive

$$H_k^-(\varphi) = \frac{1}{D_k} \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} -i \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \alpha_k \\ 1 \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \beta_k \\ i \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} & \text{und } \alpha_k < \beta_k \\ \left\{ \begin{array}{l} -i \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \beta_k \\ 1 \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \alpha_k \\ i \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} & \text{und } \alpha_k > \beta_k \end{cases}
 \tag{10.14}$$

gilt. Damit  $X(z)$  gemäss (9.13) über die von Neumann-Ränder analytisch fortsetzbar ist und über die Dirichlet-Ränder das Vorzeichen wechselt, muss

$$D_k = \begin{cases} i \text{ falls } \alpha_k < \beta_k \\ 1 \text{ falls } \alpha_k > \beta_k \end{cases}
 \tag{10.15}$$

gesetzt werden<sup>1</sup>. Dies resultiert in der stückweise konstanten Funktion

$$H_k^+(\varphi) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} -1 \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \alpha_k \\ i \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \beta_k \\ 1 \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} \text{ und } \alpha_k < \beta_k \\ \left. \begin{array}{l} i \text{ falls } -\pi \leq \varphi < \beta_k \\ 1 \text{ falls } \beta_k \leq \varphi < \alpha_k \\ -i \text{ falls } \alpha_k \leq \varphi < \pi \end{array} \right\} \text{ und } \alpha_k > \beta_k . \end{cases} \quad (10.16)$$

Die Funktion  $J_m(\varphi)$  (9.54d) lässt sich mit (10.1), (10.11a), (10.12a) und (10.16) neu zusammenfassen:

$$J_m(\varphi) = W_m(\varphi)P(\varphi)R(\varphi)\gamma(s(\varphi)), \quad \varphi \in [-\pi, \pi), \quad (10.17)$$

wobei die komplexe Funktion  $W_m(\varphi)$  durch

$$W_m(\varphi) := 2i \exp\left(i\left(m - \frac{n}{2}\right)\varphi\right) \quad (10.18)$$

und die beiden reellen Funktionen  $P(\varphi)$  und  $R(\varphi)$  durch

$$P(\varphi) := \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\sqrt{\left|\sin \frac{\varphi - \alpha_k}{2} \sin \frac{\varphi - \beta_k}{2}\right|}} \quad (10.19)$$

und

$$R(\varphi) := \frac{1}{i\alpha(\varphi)} \prod_{k=1}^n \frac{1}{H_k^+(\varphi)} \quad (10.20)$$

definiert sind. Die stückweise konstante, reelle Funktion  $R(\varphi)$  lautet nach Einsetzen von (9.57a) und (10.16) in beiden Fällen  $\Phi$  und  $\Psi$ :

<sup>1</sup> Eigentlich könnte man auch die negativen Vorzeichen wählen. Da jedoch die kanonische Lösung sowieso nur bis auf einen reellen, von null verschiedenen Faktor bestimmt ist, der sich jedoch in der Lösungsformel (9.59) wieder wegekürzt, spielt diese Wahl keine Rolle.

$$R(\varphi) = \begin{cases} (-1)^n & \text{für } -\pi \leq \varphi < \beta_1 \\ (-1)^{n-k} & \text{für } \beta_k < \varphi < \beta_{k+1} \\ 1 & \text{für } \beta_n < \varphi < \pi. \end{cases} \quad (10.21)$$

Da  $R(\varphi)$  überall den Absolutbetrag 1 hat und das Vorzeichen an denselben Stellen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  wechselt, wo die Randwerte  $\gamma(s(\varphi))$  Sprungstellen aufweisen, können diese zwei Funktionen zu

$$\tilde{\gamma}(s(\varphi)) := R(\varphi) \gamma(s(\varphi)) \quad (10.22)$$

zusammengefasst werden. Obwohl  $W_m(\varphi)$  für ungerade  $n$  bei  $\varphi = -\pi$  das Vorzeichen wechselt, ist  $J_m(\varphi)$  dort stetig, da in diesen Fällen die Funktion  $R(\varphi)$  ebenfalls das Vorzeichen wechselt.

Die Ausdrücke (10.17) bis (10.19) mit (10.21) und (10.22) teilen (9.54d) so in reelle und komplexe Funktionen auf, dass sie der Typisierung der Singularitäten entsprechen und die Funktionen  $J_m(\varphi)$  eindeutig festlegen.

#### **d) Lokale Entwicklung um die Singularitäten**

Nach der Umstrukturierung der Funktionen  $J_m(\varphi)$  im obigen Abschnitt, lässt sich deren Entwicklung um die kritischen Stellen (Ü), (S), (E), (ÜE) und (SE) aus den Entwicklungen der Teilfunktionen  $W_m(\varphi)$ ,  $P(\varphi)$ ,  $\tilde{\gamma}(s)$  und  $s(\varphi)$  zusammenstellen. Aus zwei Gründen soll diese Entwicklung nur bis zur Ordnung 1 explizit durchgeführt werden:

- Da Ecken durch Polynome eliminiert werden, resultiert im allgemeinen eine Zwischenkurve in  $C^1$ . Die Entwicklung der Ränderzuordnung (Kapitel 8.3c) ist für höhere Terme daher ungenau.
- Die Approximation der  $C^1$ -glatten Restfunktionen durch eine diskrete Fourierreihe liefert genügend genaue Resultate, insbesondere wenn man den zusätzlichen Aufwand zur Berechnung höherer Terme mit dem Genauigkeitsgewinn abwägt.

Die Funktion  $W_m(\varphi)$  (10.18) ist im ganzen Intervall  $[-\pi, \pi)$  glatt, sie kann also um jede Stelle  $\varphi_l$  in eine komplexe Taylorreihe entwickelt werden:

$$W_m(\varphi) = \hat{W}_{m10} \left[ 1 + \hat{W}_{m11}(\varphi - \varphi_l) + O\left((\varphi - \varphi_l)^2\right) \right], \quad (10.23)$$

wobei

$$\begin{aligned} \hat{W}_{m10} &:= 2i \exp\left(i\left(m - \frac{n}{2}\right)\varphi\right), \\ \hat{W}_{m11} &:= i\left(m - \frac{n}{2}\right). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Bei den Reihen für  $P(\varphi)$  müssen zwei Fälle unterschieden werden<sup>1</sup>: ist  $\varphi_l \in \{\alpha_k, \beta_k, k \in \{1, \dots, n\}\}^2$ , gilt

$$P(\varphi) = \hat{P}_{10} |\varphi - \varphi_l|^{-1/2} \left[ 1 + \hat{P}_{11}(\varphi - \varphi_l) + O\left((\varphi - \varphi_l)^2\right) \right] \quad (10.25)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{P}_{10} &:= \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j, \\ \text{falls } \varphi_l = \alpha_j}}^n \left| 2 \sin \frac{\varphi_l - \alpha_j}{2} \right|^{-1/2} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j, \\ \text{falls } \varphi_l = \beta_j}}^n \left| 2 \sin \frac{\varphi_l - \beta_j}{2} \right|^{-1/2} \\ \hat{P}_{11} &:= -\frac{1}{4} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, \\ \text{falls } \varphi_l = \alpha_j}}^n \operatorname{ctg} \frac{\varphi_l - \alpha_j}{2} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j, \\ \text{falls } \varphi_l = \beta_j}}^n \operatorname{ctg} \frac{\varphi_l - \beta_j}{2}, \end{aligned} \quad (10.26)$$

ist jedoch  $\varphi_l \notin \{\alpha_k, \beta_k, k \in \{1, \dots, n\}\}^3$ , gilt die reguläre Reihenentwicklung

$$P(\varphi) = \hat{P}_{100} \left[ 1 + \hat{P}_{101}(\varphi - \varphi_l) + O\left((\varphi - \varphi_l)^2\right) \right], \quad (10.27)$$

wobei wieder (10.26) die Koeffizienten definiert<sup>4</sup>.

<sup>1</sup> Die Herleitung der Entwicklung ist analog zu (8.25), der Herleitung der Ränderzuordnung der Schwarz-Christoffel-Abbildung in Ecknähe (8.25), wobei  $\delta_1 - 1 = -1/2$  gesetzt werden muss.  
<sup>2</sup> Dies trifft für die Typen (Ü) und (ÜE) zu.  
<sup>3</sup> Gilt für die Typen (S), (E) und (SE).  
<sup>4</sup> Der Index  $k$  läuft dabei immer vollständig von 1 bis  $n$ .



Die mit  $R(\varphi)$  modifizierten Randwerte  $\gamma(s)$  sind generell durch eine Reihe

$$\tilde{\gamma}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{\gamma}_{ik}^{\pm}}{k!} (s - s_i)^k \quad (10.28)$$

darstellbar. Die Koeffizienten  $\hat{\gamma}_{ik}^{\pm}$  müssen je nach Singularitätstyp (Kapitel 10.1a) anders interpretiert werden: für Typen (Ü) und (ÜE) durch

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ik}^- &= R(\alpha_i) \frac{d^k [v_0(s(\alpha_i)) + C(\alpha_i)]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i = \alpha_i \\ & && \text{und } \varphi \leq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^+ &= R(\alpha_i) \frac{d^k [u_0(s(\alpha_i))]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i = \alpha_i \\ & && \text{und } \varphi \geq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^- &= R^-(\beta_i) \frac{d^k [u_0(s(\beta_i))]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i = \beta_i \\ & && \text{und } \varphi \leq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^+ &= R^+(\beta_i) \frac{d^k [v_0(s(\beta_i)) + C(\beta_i)]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i = \beta_i \\ & && \text{und } \varphi \geq \varphi_i \end{aligned} \quad (10.29)$$

und für die Typen (S), (E) und (SE) durch

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{ik}^- &= R(\varphi_i) \frac{d^k [u_0^-(s(\varphi_i))]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i \in \partial D_u \\ & && \text{und } \varphi \leq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^+ &= R(\varphi_i) \frac{d^k [u_0^+(s(\varphi_i))]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i \in \partial D_u \\ & && \text{und } \varphi \geq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^- &= R(\varphi_i) \frac{d^k [v_0^-(s(\beta_i)) + C(\beta_i)]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i \in \partial D_q \\ & && \text{und } \varphi \leq \varphi_i \\ \hat{\gamma}_{ik}^+ &= R(\varphi_i) \frac{d^k [v_0^+(s(\beta_i)) + C(\beta_i)]}{ds^k} && \text{falls } \varphi_i \in \partial D_q \\ & && \text{und } \varphi \geq \varphi_i \end{aligned} \quad (10.30)$$

wobei beim Typ (E)  $\hat{\gamma}_{10}^- = \hat{\gamma}_{10}^+$  vorausgesetzt wird. Die oberen Indizes + und - bedeuten dabei die oberen und unteren Grenzwerte der entsprechenden Funktionen, beispielsweise

$$k^-(\varphi_l) = \lim_{\substack{\varphi \rightarrow \varphi_l \\ \varphi < \varphi_l}} k(\varphi) \quad \text{und} \quad k^+(\varphi_l) = \lim_{\substack{\varphi \rightarrow \varphi_l \\ \varphi > \varphi_l}} k(\varphi). \quad (10.31)$$

Berücksichtigt man in (10.28) die Entwicklung der Ränderzuordnung (8.56) und (8.58), folgt in Ecknähe (Typen (E), (ÜE), (SE))

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\varphi) &:= \tilde{\gamma}(s(\varphi)) \\ &= \sum_{k=k_u}^{\infty} |\varphi - \varphi_l|^{k\delta_l} \hat{\Gamma}_{lk0}^{\pm} \left[ 1 + \hat{\Gamma}_{lk1}^{\pm} (\varphi - \varphi_l) + O\left((\varphi - \varphi_l)^2\right) \right] \end{aligned} \quad (10.32)$$

mit<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{lk0}^{\pm} &= \frac{\hat{\gamma}_{lk}^{\pm}}{k!} \left( \sigma_{l0} d_{l1}^{\delta_l} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_l} \text{sign}(\varphi - \varphi_l) \right)^k \\ \hat{\Gamma}_{lk1}^{\pm} &= k(\sigma_{l1} d_{l1} + \delta_l d_{l2}) \end{aligned} \quad (10.33)$$

$$k_u = \begin{cases} 1 & \text{im Fall (E)} \\ 0 & \text{in den Fällen (ÜE) und (SE)} \end{cases}$$

und sonst (Typen (Ü), (S)),

$$\tilde{\Gamma}(\varphi) := \tilde{\gamma}(s(\varphi)) = \hat{\Gamma}_{l0}^{\pm} + \hat{\Gamma}_{l1}^{\pm} (\varphi - \varphi_l) + O\left((\varphi - \varphi_l)^2\right) \quad (10.34)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{l0}^{\pm} &= \hat{\gamma}_{l0}^{\pm} \\ \hat{\Gamma}_{lk1}^{\pm} &= \hat{\gamma}_{l1}^{\pm} \left| \frac{d\omega}{d\zeta}(\zeta(e^{i\varphi_l})) \right| \left| \frac{d\zeta}{dz}(e^{i\varphi_l}) \right|. \end{aligned} \quad (10.35)$$

<sup>1</sup> Die skalierten Innenwinkel  $\delta_l$  sind in Figur 2-3 definiert.

Die Koeffizienten  $\sigma_{ij}$  und  $d_{ij}$  sind in (8.27) und (8.47) definiert. Die Berechnung der Beträge der Gradienten der konformen Abbildung in (19.35) gehen aus den Kapiteln 8.1c und 8.2c hervor.

Die Ausdrücke (10.23) bis (10.35) können nun für jeden Typ zusammengefasst werden, woraus die folgenden Entwicklungen für  $J_m(\varphi)$  folgen. Es wird dabei die Abkürzung  $\varepsilon := \varphi - \varphi_1$  benutzt.

Typ (Ü):

$$\begin{aligned}
 J_m(\varphi) &= \hat{J}_{m100}^\pm |\varepsilon|^{-1/2} + \hat{J}_{m110}^\pm \varepsilon |\varepsilon|^{-1/2} + O(\varepsilon^2 |\varepsilon|^{-1/2}) \\
 \hat{J}_{m100}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \hat{I}_{10}^\pm \\
 \hat{J}_{m110}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \left[ (\hat{W}_{m11} + \hat{P}_{111}) \hat{I}_{10}^\pm + \hat{I}_{11}^\pm \right].
 \end{aligned} \tag{10.36}$$

Typ (S):

$$\begin{aligned}
 J_m(\varphi) &= \hat{J}_{m100}^\pm + \hat{J}_{m110}^\pm \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\
 \hat{J}_{m100}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{100} \hat{I}_{10}^\pm \\
 \hat{J}_{m110}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{100} \left[ (\hat{W}_{m11} + \hat{P}_{101}) \hat{I}_{10}^\pm + \hat{I}_{11}^\pm \right].
 \end{aligned} \tag{10.37}$$

Typ (E):

$$\begin{aligned}
 J_m(\varphi) &= \sum_{k=1}^{\text{int } 1/2 \delta_1} \hat{J}_{m1k0}^\pm |\varepsilon|^{k\delta_1} + O\left(|\varepsilon|^{\delta_1(1+\text{int } 1/2 \delta_1)}\right) \\
 \hat{J}_{m100}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{100} \hat{I}_{1k0}^\pm.
 \end{aligned} \tag{10.38}$$

Typ (ÜE):

$$\begin{aligned}
 J_m(\varphi) &= \sum_{k=0}^{\text{int } 3/2 \delta_1} \hat{J}_{m1k0}^\pm |\varepsilon|^{k\delta_1 - 1/2} \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{\text{int } 1/2 \delta_1} \hat{J}_{m1k1}^\pm \varepsilon |\varepsilon|^{k\delta_1 + 1/2} + O\left(|\varepsilon|^{\delta_1(1+\text{int } 1/2 \delta_1)}\right) \\
 \hat{J}_{m1k0}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \hat{I}_{1k0}^\pm \\
 \hat{J}_{m1k1}^\pm &:= \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \hat{I}_{1k0}^\pm \left( \hat{W}_{m11} + \hat{P}_{111} + \hat{I}_{1k1}^\pm \right).
 \end{aligned} \tag{10.39}$$

Typ (SE):

$$J_m(\varphi) = \sum_{k=0}^{int \frac{1}{\delta_t}} \hat{J}_{mlk0}^{\pm} |\varepsilon|^{k\delta_t} + O\left(|\varepsilon|^{\delta_t(1+int \frac{1}{\delta_t})}\right) \quad (10.40)$$

$$\hat{J}_{ml00}^{\pm} := \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{100} \hat{I}_{lk0}^{\pm}.$$

## 10.2 KONSTRUKTION DER EXTRAKTIONSFUNKTIONEN

### a) Ansatz

Um eine Extraktionsfunktion zu konstruieren, ist es wohl am einfachsten, für jeden Term der Reihen (10.36) bis (10.40) je einen Real- und einen Imaginärteil analytischer Funktionen anzusetzen. Ist der Exponent des Terms  $\beta$  nicht ganzzahlig, genügt der Ansatz

$$E_\beta = K \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^\beta, \quad z_1 = e^{i\varphi_1}. \quad (10.41)$$

Ist der Exponent jedoch ganz ( $=k$ ), muss der Ansatz

$$E_k = K \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^k \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right), \quad z_1 = e^{i\varphi_1} \quad (10.42)$$

benutzt werden, um die entsprechenden Sprünge in  $J_m(\varphi)$  extrahieren zu können. Mit Hilfe von (10.8) können (10.41) und (10.42) auf dem Rand mit  $z = \exp(i\varphi)$  in Real- und Imaginärteil zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_\beta(e^{i\varphi})\} &= \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^\beta \left[ K_R C_\beta(\varepsilon) - K_J S_\beta(\varepsilon) \right] \\ \operatorname{Im}\{E_\beta(e^{i\varphi})\} &= \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^\beta \left[ K_R S_\beta(\varepsilon) + K_J C_\beta(\varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (10.43)$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_k(e^{i\varphi})\} &= \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^k \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right| \left[ K_R C_k(\varepsilon) - K_J S_k(\varepsilon) \right] \\ &\quad + \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^k L(\varepsilon) \left[ -K_R S_k(\varepsilon) - K_J C_k(\varepsilon) \right] \\ \operatorname{Im}\{E_k(e^{i\varphi})\} &= \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^k \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right| \left[ K_R S_k(\varepsilon) + K_J C_k(\varepsilon) \right] \\ &\quad + \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^k L(\varepsilon) \left[ K_R C_k(\varepsilon) - K_J S_k(\varepsilon) \right]. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Dabei bedeuten

$$\varepsilon := \varphi - \varphi_l,$$

$$K_R := \operatorname{Re}\{K\},$$

$$K_J := \operatorname{Im}\{K\},$$

$$C_\gamma(\varepsilon) := \begin{cases} \cos(\gamma(\varepsilon + \pi)/2) & \text{falls } \varepsilon < 0 \\ \cos(\gamma(\varepsilon - \pi)/2) & \text{falls } \varepsilon > 0, \end{cases} \quad (10.45)$$

$$S_\gamma(\varepsilon) := \begin{cases} \sin(\gamma(\varepsilon + \pi)/2) & \text{falls } \varepsilon < 0 \\ \sin(\gamma(\varepsilon - \pi)/2) & \text{falls } \varepsilon > 0, \end{cases}$$

$$L(\varepsilon) := \begin{cases} (\varepsilon + \pi)/2 & \text{falls } \varepsilon < 0 \\ (\varepsilon - \pi)/2 & \text{falls } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Um schliesslich auch einen Koeffizientenvergleich mit (10.36) bis (10.40) durchführen zu können, ist es notwendig die entsprechenden Entwicklungen von (10.41) und (10.42) auf dem Rand zu kennen. Es ist so, dass die Koeffizienten dieser Reihen je nach Vorzeichen von  $\varepsilon$  verschieden sind, was mit den oberen Indizes + und - angedeutet wird. Aus den Reihen

$$\begin{aligned} \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right|^\gamma &= |\varepsilon|^\gamma [1 + O(\varepsilon^2)] \\ \ln \left| 2 \sin \frac{\varepsilon}{2} \right| &= \ln |\varepsilon| + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (10.46)$$

folgt für (10.43) die Reihe

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_\beta(e^{i\varphi})\}^\pm &= (K_R C_0 \pm K_J S_0) |\varepsilon|^\beta \\ &\quad + \frac{\beta}{2} (\pm K_R S_0 - K_J C_0) \varepsilon |\varepsilon|^\beta + O(\varepsilon^2 |\varepsilon|^\beta) \\ \operatorname{Im}\{E_\beta(e^{i\varphi})\}^\pm &= (\mp K_R S_0 + K_J C_0) |\varepsilon|^\beta \\ &\quad + \frac{\beta}{2} (K_R C_0 \pm K_J S_0) \varepsilon |\varepsilon|^\beta + O(\varepsilon^2 |\varepsilon|^\beta), \end{aligned} \quad (10.47)$$

für (10.44) falls  $k=0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_0(e^{i\varphi})\}^\pm &= K_R \ln|\varepsilon| \pm \frac{\pi K_J}{2} - \frac{K_J}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \operatorname{Im}\{E_0(e^{i\varphi})\}^\pm &= K_J \ln|\varepsilon| \mp \frac{\pi K_R}{2} + \frac{K_R}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (10.48)$$

und falls  $k=1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{E_1(e^{i\varphi})\}^\pm &= K_J \varepsilon \ln|\varepsilon| \mp \frac{\pi K_R}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ \operatorname{Im}\{E_1(e^{i\varphi})\}^\pm &= -K_R \varepsilon \ln|\varepsilon| \mp \frac{\pi K_J}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (10.49)$$

wobei das obere Vorzeichen für positive  $\varepsilon$ , das untere für negative  $\varepsilon$  gilt und

$$\begin{aligned} C_0 &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} C_\gamma(\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_\gamma(\varepsilon) = \cos \frac{\gamma\pi}{2} \\ S_0 &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} S_\gamma(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_\gamma(\varepsilon) = \sin \frac{\gamma\pi}{2} \end{aligned} \quad (10.50)$$

bedeuten. Die nächsten fünf Abschnitte (10.2b bis f) befassen sich mit den Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten der Extraktionsfunktionen für die fünf Singularitätstypen<sup>1</sup> (Ü), (S), (E), (ÜE) und (SE).

### b) Extraktionskoeffizienten bei Übergängen

Bei Übergangstellen (Ü) muss für die zu extrahierende Funktion  $\check{J}_m(\varphi)$  eine der Entwicklung (10.36) entsprechender Ansatz

$$\begin{aligned} \check{J}_{ml}(\varphi) &:= \operatorname{Re}\left\{K_{ml01}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} + i \operatorname{Im}\left\{K_{ml02}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\} \\ &+ \operatorname{Re}\left\{K_{ml03}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{+\frac{1}{2}}\right\} + i \operatorname{Im}\left\{K_{ml04}\left(1-\frac{z}{z_1}\right)^{+\frac{1}{2}}\right\} \end{aligned} \quad (10.51)$$

mit der Entwicklung

---

<sup>1</sup> Vergleiche auch Figur 4-1.

$$\begin{aligned}
 \check{J}_{ml}^{\pm}(\varphi) = & \\
 & \left[ (K_{Rml01} \mp K_{Jml01}) + i(\pm K_{Rml02} + K_{Jml02}) \right] \sqrt{\frac{1}{2}} |\varepsilon|^{-\frac{1}{2}} \\
 & + \left\{ [(\pm K_{Rml03} + K_{Jml03}) - i(K_{Rml04} \mp K_{Jml04})] \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4} [(\pm K_{Rml01} + K_{Jml01}) - i(K_{Rml02} \mp K_{Jml02})] \right\} \sqrt{\frac{1}{2}} \varepsilon |\varepsilon|^{-\frac{1}{2}} \\
 & + O(\varepsilon^2 |\varepsilon|^{-\frac{1}{2}})
 \end{aligned} \tag{10.52}$$

gewählt werden. Der Koeffizientenvergleich mit (10.36) liefert die folgenden vier komplexen Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 K_{Rml01} + iK_{Jml02} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{\Gamma}_{l0}^{+} + \hat{\Gamma}_{l0}^{-} \right) \\
 K_{Jml01} - iK_{Rml02} &= -\sqrt{\frac{1}{2}} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{\Gamma}_{l0}^{+} - \hat{\Gamma}_{l0}^{-} \right) \\
 K_{Jml03} - iK_{Rml04} &= -\frac{1}{4} (K_{Jml01} - iK_{Rml02}) \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{2}} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left[ (\hat{W}_{ml1} + \hat{P}_{ll1}) \left( \hat{\Gamma}_{l0}^{+} + \hat{\Gamma}_{l0}^{-} \right) + \left( \hat{\Gamma}_{ll}^{+} + \hat{\Gamma}_{ll}^{-} \right) \right] \\
 K_{Rml03} + iK_{Jml04} &= -\frac{1}{4} (K_{Rml01} + iK_{Jml02}) \\
 &+ \sqrt{\frac{1}{2}} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left[ (\hat{W}_{ml1} + \hat{P}_{ll1}) \left( \hat{\Gamma}_{l0}^{+} - \hat{\Gamma}_{l0}^{-} \right) + \left( \hat{\Gamma}_{ll}^{+} - \hat{\Gamma}_{ll}^{-} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{10.53}$$

### c) Extraktionskoeffizienten bei Sprüngen

Beide Terme (10.37) beim Typ (S) haben ganzzahlige Exponenten. Dies führt auf den Ansatz

$$\begin{aligned}
 \check{J}_{ml}(\varphi) := & \operatorname{Re} \left\{ K_{ml01} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{ml02} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ K_{ml03} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} \\
 & + i \operatorname{Im} \left\{ K_{ml04} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

mit der Entwicklung



$$\begin{aligned}
 \check{J}_{ml}^{\pm}(\varphi) = & \pm \frac{\pi}{2} [K_{Jml01} - iK_{Rml02}] \\
 & + [K_{Rml01} + iK_{Jml02}] \ln|\varepsilon| \\
 & + \left[ \mp \frac{\pi}{2} (K_{Rml03} + iK_{Jml04}) - \frac{1}{2} (K_{Jml01} - iK_{Rml02}) \right] \varepsilon \quad (10.55) \\
 & + [K_{Jml03} - iK_{Rml04}] \varepsilon \ln|\varepsilon| \\
 & + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit (10.37) liefert

$$\begin{aligned}
 K_{Rml01} + iK_{Jml02} &= 0 \\
 K_{Jml01} - iK_{Rml02} &= +\frac{1}{\pi} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{100} (\hat{I}_{10}^{+} - \hat{I}_{10}^{-}) \\
 K_{Jml03} - iK_{Rml04} &= 0 \\
 K_{Rml03} + iK_{Jml04} &= -\frac{1}{\pi} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{100} \\
 & \left[ (\hat{W}_{ml1} + \hat{P}_{101}) (\hat{I}_{10}^{+} - \hat{I}_{10}^{-}) + (\hat{I}_{11}^{+} - \hat{I}_{11}^{-}) \right]. \quad (10.56)
 \end{aligned}$$

#### d) Extraktionskoeffizienten bei Ecken

Beim Typus (E) (10.38) müssen zwei Fälle unterschieden werden. Ist

$$L_{12} := 1/\delta_1 \quad (10.57)$$

keine ganze Zahl, dann genügt der Ansatz

$$\check{J}_{ml}(\varphi) := \sum_{k=1}^{k_{10}} \operatorname{Re} \left\{ K_{mlk1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mlk2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1} \right\} \quad (10.58)$$

mit  $k_{10} = \operatorname{int} L_{12}$ . Ist jedoch  $L_{12}$  ganz, gilt der Ansatz (10.58) mit dem oberen Summationsindex  $k_{10} = L_{12} - 1$  und dem Zusatzterm

$$\operatorname{Re} \left\{ K_{mlL_{12}1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mlL_{12}2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\}. \quad (10.59)$$

In beiden Fällen folgen aus der Entwicklung von (10.58) die Bedingung

$$\begin{aligned}
 K_{Rmlk1} + iK_{Jmlk2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{100} \left( \hat{I}_{lk0}^{+} + \hat{I}_{lk0}^{-} \right) / 2 \cos \left( \frac{k\delta_1\pi}{2} \right) \\
 K_{Jmlk1} - iK_{Rmlk2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{100} \left( \hat{I}_{lk0}^{+} - \hat{I}_{lk0}^{-} \right) / 2 \sin \left( \frac{k\delta_1\pi}{2} \right). \quad (10.60)
 \end{aligned}$$

Ist  $L_{12}$  ganz muss zusätzlich

$$\begin{aligned} K_{RmL_{12}1} + iK_{JmL_{12}2} &= -\frac{1}{\pi} \hat{W}_{m10} \hat{P}_{100} \left( \hat{I}_{lk0}^+ - \hat{I}_{lk0}^- \right) \\ K_{JmL_{12}1} - iK_{RmL_{12}2} &= 0 \end{aligned} \quad (10.61)$$

erfüllt werden.

**e) Extraktionskoeffizienten bei Eckübergängen**

Hier (Typ (ÜE)) müssen drei Fälle unterschieden werden. Die Unterscheidung kann anhand der drei Zahlen

$$\begin{aligned} L_{11} &:= \frac{1}{2} \delta_1 \\ L_{12} &:= 2L_{11} = \frac{2}{2} \delta_1 = \frac{1}{\delta_1} \\ L_{13} &:= 3L_{11} = \frac{3}{2} \delta_1 \end{aligned} \quad (10.62)$$

erkannt werden.

Fall ÜE11: Ist  $L_{11}$  und damit auch  $L_{12}$  und  $L_{13}$  ganz, gibt es in (10.39) je einen Term mit Exponent 0 und 1.

Fall ÜE10: Ist nur  $L_{13}$  ganz, existiert kein Exponent 0, jedoch der Exponent 1.

Fall ÜE00: Sind alle Zahlen  $L_{11}$ ,  $L_{12}$  und  $L_{13}$  gebrochen, existieren keine ganzzahlige Exponenten.

Der Ansatz lautet in allen drei Fällen zunächst einmal<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \check{J}_{ml}(\varphi) &:= \sum_{k=0}^{k_{11}} \operatorname{Re} \left\{ K_{mlk1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1 - \frac{1}{2}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mlk2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1 - \frac{1}{2}} \right\} \\ &+ \sum_{k=0}^{k_{12}} \operatorname{Re} \left\{ K_{mlk3} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1 + \frac{1}{2}} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mlk4} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1 + \frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (10.63)$$

wobei

<sup>1</sup> Im Fall ÜE11 läuft die erste Summe von  $k=0$  bis  $k=L_3-1$  ohne  $k=L_1$ .

$$k_{l1} = \begin{cases} \text{int } L_{l3} \\ L_{l3} - 1 \\ L_{l3} - 1 \end{cases} \quad k_{l2} = \begin{cases} \text{int } L_{l1} & \text{im Fall } \ddot{U}E00 \\ \text{int } L_{l1} & \text{im Fall } \ddot{U}E10 \\ L_{l1} - 1 & \text{im Fall } \ddot{U}E11. \end{cases} \quad (10.64)$$

Dieser Ansatz muss noch durch die folgenden Einzelterme ergänzt werden: In den Fällen  $\ddot{U}E10$  und  $\ddot{U}E11$  mit

$$\text{Re}\left\{K_{mL_{l3}}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\} + i \text{Im}\left\{K_{mL_{l3}2}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\} \quad (10.65)$$

und im Fall  $\ddot{U}E11$  mit den zwei weiteren Termen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} &\text{Re}\left\{K_{mL_{l1}1}\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\} + i \text{Im}\left\{K_{mL_{l1}2}\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\} \\ &\text{Re}\left\{K_{mL_{l1}3}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\} + i \text{Im}\left\{K_{mL_{l1}4}\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\ln\left(1 - \frac{z}{z_1}\right)\right\}. \end{aligned} \quad (10.66)$$

Der Koeffizientenvergleich von (10.64) mit (10.39) liefert

$$\begin{aligned} K_{Rmlk1} + iK_{Jmlk2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{l10} \left( \hat{I}_{lk0}^+ + \hat{I}_{lk0}^- \right) / 2 \cos\left(\frac{(2k\delta_l - 1)\pi}{4}\right) \\ K_{Jmlk1} - iK_{Rmlk2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{l10} \left( \hat{I}_{lk0}^+ - \hat{I}_{lk0}^- \right) / 2 \sin\left(\frac{(2k\delta_l - 1)\pi}{4}\right) \\ K_{Jmlk3} - iK_{Rmlk4} &= \frac{(2k\delta_l - 1)}{4} (K_{Jmlk1} - iK_{Rmlk2}) \\ &\quad + \frac{\hat{W}_{ml0} \hat{P}_{l10} \left( \hat{W}_{ml1} + \hat{P}_{l11} + \hat{I}_{lk1} \right) \left( \hat{I}_{lk0}^+ + \hat{I}_{lk0}^- \right)}{2 \cos\left(\frac{(2k\delta_l - 1)\pi}{4}\right)} \\ K_{Rmlk3} + iK_{Jmlk4} &= \frac{(2k\delta_l - 1)}{4} (K_{Rmlk1} + iK_{Jmlk2}) \\ &\quad - \frac{\hat{W}_{ml0} \hat{P}_{l10} \left( \hat{W}_{ml1} + \hat{P}_{l11} + \hat{I}_{lk1} \right) \left( \hat{I}_{lk0}^+ - \hat{I}_{lk0}^- \right)}{2 \sin\left(\frac{(2k\delta_l - 1)\pi}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (10.67)$$

Aus (10.65) und (10.66) folgen entsprechend

<sup>1</sup> Der obere Term in (10.66) bezieht sich auf die erste Summe in (10.39) der zweite auf die zweite Summe.

$$\begin{aligned}
 K_{RmL_{43}1} + iK_{JmL_{43}2} &= -\frac{1}{\pi} \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \left( \hat{I}_{L_{43}0}^+ + \hat{I}_{L_{43}0}^- \right) \\
 K_{JmL_{43}1} - iK_{RmL_{43}2} &= 0 \\
 K_{RmL_{41}1} + iK_{JmL_{41}2} &= 0 \\
 K_{JmL_{41}1} - iK_{RmL_{41}2} &= \frac{1}{\pi} \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \left( \hat{I}_{L_{41}0}^+ - \hat{I}_{L_{41}0}^- \right) \\
 K_{JmL_{41}3} - iK_{RmL_{41}4} &= 0 \\
 K_{RmL_{41}k3} + iK_{JmL_{41}4} &= -\frac{1}{\pi} \hat{W}_{m10} \hat{P}_{110} \\
 &\quad \left( \hat{W}_{m11} + \hat{P}_{111} + \hat{I}_{L_{41}1} \right) \left( \hat{I}_{L_{41}0}^+ - \hat{I}_{L_{41}0}^- \right).
 \end{aligned} \tag{10.68}$$

**f) Extraktionskoeffizienten bei Sprüngen an Ecken**

Der Term 0-ter Ordnung tritt in (10.40) (Typus (SE)) immer auf, der Term erster Ordnung nur wenn

$$L_{12} := 1/\delta_1 \tag{10.69}$$

ganz ist. Der Ansatz lautet ähnlich dem Typ (E)

$$\begin{aligned}
 \check{J}_{ml}^{\pm}(\varphi) &:= \operatorname{Re} \left\{ K_{m101} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{m102} \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{k_{13}} \operatorname{Re} \left\{ K_{mk1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1} \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mk2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right)^{k\delta_1} \right\},
 \end{aligned} \tag{10.70}$$

wobei

$$k_{13} = \begin{cases} L_{12} - 1 & \text{falls } L_2 \text{ ganz} \\ \operatorname{int} L_{12} & \text{sonst,} \end{cases} \tag{10.71}$$

und im Fall ganzzahligen  $L_{12}$  der Zusatzterm

$$\operatorname{Re} \left\{ K_{mL_{12}1} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} + i \operatorname{Im} \left\{ K_{mL_{12}2} \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \ln \left( 1 - \frac{z}{z_1} \right) \right\} \tag{10.72}$$

mitberücksichtigt werden muss. Die Koeffizientenbedingungen aus dem Vergleich mit (10.40) lauten

$$\begin{aligned}
 K_{Rml01} + iK_{Jml02} &= 0 \\
 K_{Jml01} - iK_{Rml02} &= \frac{1}{\pi} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{I}_{lk0}^+ - \hat{I}_{lk0}^- \right) \\
 K_{Rmkl1} + iK_{Jmkl2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{I}_{lk0}^+ + \hat{I}_{lk0}^- \right) / 2 \cos\left(\frac{k\delta_l\pi}{2}\right) \\
 K_{Jmkl1} - iK_{Rmkl2} &= \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{I}_{lk0}^+ - \hat{I}_{lk0}^- \right) / 2 \sin\left(\frac{k\delta_l\pi}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{10.73}$$

Für den Zusatzterm gilt allenfalls noch

$$\begin{aligned}
 K_{Rmll_{12}1} + iK_{Jmll_{12}2} &= -\frac{1}{\pi} \hat{W}_{ml0} \hat{P}_{ll0} \left( \hat{I}_{ll_{20}}^+ - \hat{I}_{ll_{20}}^- \right) \\
 K_{Jmll_{12}1} - iK_{Rmll_{12}2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{10.74}$$

### g) Resultierende Extraktionsfunktion

Für jedes  $m$  wurden in den letzten fünf Abschnitten an allen kritischen Stellen  $\varphi_i$  je eine Summe von analytischen Funktionen bestimmt. Die gesamten zu extrahierenden Funktionen  $\check{J}_m(\varphi)$  bestehen aus der Summe über alle kritischen Stellen der jeweiligen Ansätze (Kapitel 10.2b bis f).

Die daraus resultierenden Cauchy-Integrale  $\check{I}_m(z)$  werden mit Hilfe der modifizierten Schwarzschen Formeln (7.23) und (7.24) berechnet. Dazu werden die Funktionen  $\check{J}_m(\varphi)$  in Real- und Imaginärteil unterteilt:

$$\check{J}_m(\varphi) = \sum_i \check{J}_{mi}(\varphi) = \text{Re}\{E_{mR}(e^{i\varphi})\} + i \text{Im}\{E_{mJ}(e^{i\varphi})\}. \tag{10.75}$$

Die analytischen Funktionen  $E_{mR}(z)$  und  $E_{mJ}(z)$  setzen sich aus denjenigen Teilfunktionen der Ansätze (Kapitel 10.2b bis f) zusammen, die zum Real- und Imaginärteil der Funktionen  $\check{J}_m(\varphi)$  beitragen. Aus (7.23) und (7.24) folgt daraus für das zugehörige Extraktions-Cauchy-Integral

$$\check{I}_m(z) = \frac{1}{2} \left( E_{mR}(z) + E_{mJ}(z) + \overline{E_{mR}(0)} - \overline{E_{mJ}(0)} \right). \tag{10.76}$$

## Kapitel 11

### Resultierendes Lösungsverfahren

---

An verschiedenen Stellen dieser Arbeit werden Teilstücke des Verfahrens mehr oder weniger detailliert dargestellt. Auf diese Stellen wird in diesem Kapitel nochmals verwiesen und, wo nötig, durch präzisere Informationen ergänzt. Dies gilt speziell für die Bestimmung der Lösungsparameter des verpflanzten Potentialproblems (Kapitel 11.1b) und die Auswertung der Lösung an kritischen Randpunkten (Kapitel 11.2c).

## 11.1 LÖSUNGSPARAMETER BESTIMMEN

### a) Konforme Abbildung

Der erste Teil des Verfahrens besteht darin, die konforme Abbildung vom Einheitskreis auf das einfach zusammenhängende Problemgebiet zu bestimmen<sup>1</sup>. Ausgangspunkt ist die Definition des Gebietes in Form von diskreten Punkten und (oder) den Eckpunkten eines umschriebenen Polygons. Zweierlei Daten resultieren aus diesem Teil: die eigentlichen Parameter der Abbildung<sup>2</sup>, im wesentlichen sind dies

- die Urbilder der Polygonecken auf dem Einheitskreis aus der Schwarz-Christoffel-Abbildung und
- die Fourierkoeffizienten der Ränderzuordnungsfunktion aus der Theodorsen-Abbildung,

sowie die gesamte Abbildungsfunktion samt Gradient<sup>3</sup> auf einem Netz diskreter Stellen, und zwar

- auf äquidistant verteilten Punkten auf dem Rand des Einheitskreises und
- auf äquidistant verteilten Punkten auf Kreisen im Inneren des Einheitskreises.

Soweit sind die numerischen Berechnungen vom zu lösenden Potentialproblem unabhängig. Um die Extraktionskoeffizienten bestimmen zu können<sup>4</sup>, muss an allen kritischen Randpunkten (Fig. 4-1) sowohl die konforme Abbildung selbst<sup>5</sup>, als auch deren Reihenentwicklung in  $\varphi$  bestimmt werden<sup>6</sup>.

---

<sup>1</sup> Das Implementationskonzept wird im Kapitel 5 beschrieben.

<sup>2</sup> Am Ende von Kapitel 2 steht eine Übersicht über die Hauptschritte zu deren Berechnung, Kapitel 8.1b beinhaltet Details zur Schwarz-Christoffel-, Kapitel 8.2c zur Theodorsen-Abbildung. Eine Gesamtzusammenstellung ist im Anhang B untergebracht..

<sup>3</sup> Dazu enthalten Kapitel 8.1c, 8.2c und 8.3a die Details.

<sup>4</sup> Kapitel 10.

<sup>5</sup> Kapitel 8.1c und 8.2c.

<sup>6</sup> Kapitel 8.1d und 8.2d sowie 8.3b und c.

Von allen Punkten, in denen die Lösung ausgewertet werden soll, muss ebenfalls die Abbildungsfunktion mitsamt dem Gradienten bekannt sein. Dies ist einfach möglich, falls diese Punkte gleichmässig auf Kreisen verteilt sind, andernfalls ist die Berechnung wesentlich aufwendig<sup>1</sup>.

### b) Integrationskonstanten, Extraktions- und Fourierkoeffizienten

Die Lösung des gemischten Potentialproblems (9.54) bis (9.57) beruht neben der konformen Abbildung auf dreierlei Parameter:

- Integrationskonstanten, die bei der Integration der von Neumann-Bedingungen entlang dem Rand (3.5) entstehen.
- Koeffizienten der Extraktionsfunktionen zur analytischen Behandlung der Singularitäten in den Cauchy-Integralen.
- Fourierkoeffizienten zur Berechnung der Rest-Integrale (4.4) und (7.41)

Zur Berechnung der Integrationskonstanten  $C_k$  muss die Bedingung (9.55) respektive (4.1),

$$\underbrace{\frac{i}{\pi} \int_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{e^{im\varphi}}{X^+(e^{i\varphi})} d\varphi}_{=: A_{mk}} C_k = \frac{1}{\pi} \underbrace{\oint_{\partial D} \frac{\Gamma_0(\varphi) e^{im\varphi}}{\alpha(\varphi) X^+(e^{i\varphi})} d\varphi}_{=: B_m}, \quad \begin{matrix} k=1, \dots, n, \\ m=1, \dots, n-1 \end{matrix} \quad (11.1)$$

erfüllt werden<sup>2</sup>. Eine genauer Vergleich von Real- und Imaginärteilen der Gleichungen (11.1) zeigt, dass paarweise immer zwei Gleichungen identisch sind. Es genügt daher (11.1) im Bereich

---

<sup>1</sup> Für jeden Punkt muss zur Auswertung der Fourierreihen je einmal ein Horner Schema durchlaufen werden (Kapitel 8.2c).  
<sup>2</sup> Die Funktion  $\Gamma_0(\varphi)$  beinhaltet nur die gegebenen Randwerte  $U_0(\varphi)$  und  $V_0(\varphi)$ , ohne die Konstanten  $C_k$ .



$m \in \{1, \lfloor N/2 \rfloor\}$  auszuwerten<sup>1</sup>. Dies sind  $n-1$  reelle Gleichungen für  $n$  unbekannte reelle Konstanten  $C_k$ . Die letzte Gleichung kann willkürlich gewählt werden, sie entspricht der Wahl einer freien, additiven Konstanten des Imaginärteils von  $F_0(z)$ . Sie hat keinen Einfluss auf die Lösung  $u(\omega)$ .

Im Integranden der rechten Seite  $B_m$  stecken Singularitäten, welche für jedes  $m$  einzeln extrahiert werden müssen. Da  $B_m$  der Auswertung eines Cauchy-Integrales im Nullpunkt entspricht, braucht nur der 0-te Fourierkoeffizient der Restfunktion bestimmt zu werden.

Die Integranden der Systemmatrize  $A_{mk}$  weisen in den Endpunkten  $\beta_k$  und  $\alpha_{k+1}$  Singularitäten mit dem Exponent  $-\frac{1}{2}$  auf<sup>2</sup>. Sie sind kontinuierlich gegeben, also an beliebigen Stellen auswertbar. Daher bieten sich Gauss-Jacobi Quadraturformeln an, die Endsingularitäten berücksichtigen [Plessens et al. 83].

Die Berechnung der Integrationskonstanten geschieht also durch die folgende Schritte<sup>3</sup>:

(1) Rechte Seite  $B_m$  :

- Bestimme die Extraktionskoeffizienten  $K_{mkj}$  für  $m \in \{1, \lfloor N/2 \rfloor\}$  und damit  $\check{J}_m(\varphi)$  gemäss Kapitel 10, wobei nur die gegebenen Randbedingungen, ohne die Integrationskonstanten berücksichtigt werden.
- Bilde daraus die Differenz  $\bar{J}_m(\varphi) = J_m(\varphi) - \check{J}_m(\varphi)$  auf äquidistanten Punkten.
- Berechne  $\check{I}_m(0)$  mit (10.76).
- Berechne  $\bar{I}_m(0)$ , den 0-ten Fourierkoeffizienten von  $\bar{J}_m(\varphi)$ .
- Bilde  $B_m = \bar{I}_m(0) + \check{I}_m(0)$ .

<sup>1</sup> Ist  $n$  gerade, muss nur der Imaginärteil der  $n/2$ -ten Gleichung aufgestellt werden, da der Realteil identisch null ist (vgl. 7.49).

<sup>2</sup> Diese Singularitäten stammen von der kanonischen Lösung  $X(z)$  im Nenner ab.

<sup>3</sup> Vergleiche auch das Schema im Anhang A.

## 11.1 Lösungsparameter bestimmen 163

- (2) Systemmatrize  $A_{mk}$ :
  - Benutze zur Berechnung jedes Elementes von  $A_{mk}$  eine Gauss-Jacobi-Quadraturformel, die die Endsingularitäten berücksichtigt.
- (3) Integrationskonstanten  $C_k$ :
  - Erfinde eine  $n$ -te Gleichung, z.B.  $C_0 = 0$ .
  - Löse das reelle, volle, nichtsymmetrische und lineare Gleichungssystem  $A_{mk} C_k = B_m$ .

Die übrigen Parameter der Lösung können nun analog zum Schritt (1) bestimmt werden:

- (4) Korrektur der gegebenen Randbedingungen:
  - Ergänze die gegebenen Randwerte mit den in (1) bis (3) berechneten Konstanten  $C_k$  (9.57).
- (5) Extraktionskoeffizienten:
  - Bestimme die Extraktionskoeffizienten  $K_{okj}$  gemäss Kapitel 10. Es sind die korrigierten Randwerte zu verwenden.
- (6) Fourierkoeffizienten:
  - Bilde die Differenz  $\tilde{J}_0(\varphi) = J_0(\varphi) - \check{J}_0(\varphi)$ .
  - Die Fourieranalyse von  $\tilde{J}_0(\varphi)$  liefert die gesuchten Koeffizienten, welche gemäss (7.33) und (7.41) vor der Synthese noch leicht modifiziert werden müssen.

## 11.2 LÖSUNG UND GRADIENT AUSWERTEN

### a) Auf äquidistanten Punkten auf Kreisen

Die Lösung auf dem Problemgebiet  $\Omega$

$$u(\omega(z)) = U(z) = \operatorname{Re}\{f(\omega(z))\} = \operatorname{Re}\{F(z)\} \quad (11.2)$$

und deren komplexer Gradient

$$\operatorname{grad} u(\omega(z)) = \frac{d}{d\omega} \overline{f(\omega(z))} = \frac{\overline{F'(z)}}{\omega'(z)} \quad (11.3)$$

werden aus kanonischer Lösung  $X(z)$ , Extraktionsfunktion  $\dot{I}_0(z)$ , Restfunktion  $\bar{I}_0(z)$  und konformer Abbildung  $\omega(z)$  zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} F_0(z) &= X(z) \left[ \bar{I}_0(z) + \dot{I}_0(z) \right] \\ \frac{F_0'(z)}{\omega'(z)} &= \frac{X'(z)}{\omega'(z)} \left[ \bar{I}_0(z) + \dot{I}_0(z) \right] + \frac{X(z)}{\omega'(z)} \left[ \bar{I}_0'(z) + \dot{I}_0'(z) \right]. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Kanonische Lösung (9.56) und Extraktionsfunktion sind analytisch gegeben, können also an beliebigen Punkten ausgewertet werden. Die Restfunktion ist durch Fourierkoeffizienten definiert (7.41), die konforme Abbildung soweit nur auf gleichmässig verteilten Punkten auf Kreisen (Kapitel 11.1a). Darauf lassen sich die Ausdrücke (11.4) sehr effizient berechnen. Pro Kreis ist nur je eine FFT für  $\bar{I}_0(z)$  und  $\bar{I}_0'(z)$  notwendig, die übrigen Werte sind bereits bestimmt worden oder können direkt und sehr effizient berechnet werden.

Etwas muss dabei jedoch beachtet werden: wenn einer der Auswertungspunkte auf dem Rand liegt und zufälligerweise sehr nahe oder direkt auf einen kritischen Randpunkt zu liegen

kommt, können einzelne  $\omega'(z)$ ,  $\dot{I}_0(z)$  oder  $\dot{I}_0'(z)$  unbeschränkt werden<sup>1</sup>.

**b) Auf Einzelpunkten**

Solange die Auswertungsstellen nicht auf kritischen Randpunkten liegen, kann (11.4) mit zwei Ausnahmen wie eben beschrieben berechnet werden. Einmal muss die konforme Abbildung für jeden Punkt ausgewertet werden<sup>2</sup>, dann muss die FFT durch ein Horner-Algorithmus ersetzt werden, d.h. die Fourierreihe muss für jeden Punkt vollständig berechnet werden. Es ist also möglich die Lösung an beliebigen Stellen zu erhalten. Handelt es sich jedoch um viele unregelmässig verteilte Stellen, kann die Auswertung gesamthaft schon aufwendig werden.

**c) Auf kritischen Randpunkten**

Soll (11.4) an kritischen Randpunkten (Fig. 4-1) ausgewertet werden, müssen die Verhalten der kanonischen Lösung, der Extraktionsfunktion und der konformen Abbildung genau untersucht und verglichen werden, um die resultierenden Grenzwerte und Verhalten bestimmen zu können.

In allen folgenden Ausdrücken wird die Abkürzung

$$(\ ) \doteq \left( 1 - \frac{z}{z_l} \right) \tag{11.5}$$

verwendet, wobei  $z_l$  immer eine kritische Stelle ( $\ddot{U}$ ), (S), (E), ( $\ddot{U}E$ ) oder (SE) bedeutet.

Die kanonische Lösung kann in der Nähe von Übergängen ( $\ddot{U}$ ) und ( $\ddot{U}E$ ) durch

---

<sup>1</sup> Für die Auswertung auf diesen Stellen siehe weiter unten Abschnitt c.

<sup>2</sup> Siehe Kapitel 8.1c, 8.2c und 8.3a.

$$\begin{aligned}
 X(z) &= ( )^{1/2} \bar{X}_1(z) \\
 X'(z) &= -\frac{1}{2z_1} ( )^{-1/2} \bar{X}_1(z) + ( )^{1/2} \bar{X}'_1(z) \\
 \bar{X}_1(z) &:= C \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{2n} \left( 1 - \frac{z}{z_k} \right)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

dargestellt werden.  $\bar{X}_1(z)$  ist in  $z_l$  glatt. Entsprechend folgt für die Extraktionsfunktion aus Kapitel 10.2 die Darstellung<sup>1</sup>

$$\dot{I}_0(z) = \left\{ \begin{array}{ll}
 D_{l0a} ( )^{-1/2} + D_{l0b} ( )^{1/2} + R_{\dot{U}}(z) & (\dot{U}) \\
 D_{l0a} \ln( ) + D_{l0b} ( ) \ln( ) + R_S(z) & (S) \\
 \sum_{k=1}^{k_{l0}} D_{lka} ( )^{k\delta_l} + R_E(z) + \left\{ D_{L_{l2}a} ( ) \ln( ) \right\} \Big|_{L_{l2} \text{ ganz}} & (E) \\
 \sum_{k=0}^{k_{l1}} D_{lka} ( )^{k\delta_l - 1/2} + \sum_{k=0}^{k_{l2}} D_{lkb} ( )^{k\delta_l + 1/2} + R_{\dot{U}E}(z) & (11.7) \\
 \quad + \left\{ D_{L_{l3}a} ( ) \ln( ) \right\} \Big|_{\text{Fall } \dot{U}E_{10/11}} & (\dot{U}E) \\
 \quad + \left\{ D_{L_{l1}a} \ln( ) + D_{L_{l1}b} ( ) \ln( ) \right\} \Big|_{\text{Fall } \dot{U}E_{11}} \\
 D_{l0a} \ln( ) + \sum_{k=1}^{k_{l3}} D_{lka} ( )^{k\delta_l} + R_{SE}(z) & (SE) \\
 \quad + \left\{ D_{L_{l2}a} ( ) \ln( ) \right\} \Big|_{L_{l2} \text{ ganz}}
 \end{array} \right.$$

wobei die Extraktionskoeffizienten  $K_{0mjl}$  zu

$$\begin{aligned}
 D_{lka} &:= (K_{0lk1} + K_{0lk2})/2 \\
 D_{lkb} &:= (K_{0lk3} + K_{0lk4})/2.
 \end{aligned} \tag{11.8}$$

<sup>1</sup> Die Grössen  $k_{li}$  und  $L_{li}$  entsprechen den Definitionen in Kapitel 10.2.

zusammengefasst sind, weil sie gemäss (10.76) zur Auswertung nicht mehr einzeln gebraucht werden. In (11.7) sind die für den entsprechenden kritischen Punkt wichtigen Terme explizit dargestellt, alle anderen Terme werden in der Funktion  $R_{\cdot}(z)$  zusammengefasst. Die Terme in geschweifter Klammer treten nur in Spezialfällen auf (vgl. Kapitel 10.2). Die erste Ableitung von (11.7) liefert

$$\dot{I}_0'(z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{D_{10a}}{2z_1} ( )^{-3/2} - \frac{D_{10b}}{2z_1} ( )^{-1/2} + R_{\dot{u}}'(z) \quad (\ddot{U}) \\ - \frac{D_{10a}}{2z_1} ( )^{-1} - \frac{D_{10b}}{z_1} (1 + \ln( )) + R_S'(z) \quad (S) \\ - \sum_{k=1}^{k_{10}} \frac{k\delta_1 D_{lka}}{z_1} ( )^{k\delta_1-1} + R_E'(z) \\ - \left\{ \frac{D_{l_{12}a}}{z_1} (1 + \ln( )) \right\} \Big|_{L_{12} \text{ ganz}} \quad (E) \\ - \sum_{k=0}^{k_{11}} \frac{(k\delta_1 - 1/2) D_{lka}}{z_1} ( )^{k\delta_1-3/2} \\ - \sum_{k=0}^{k_{12}} \frac{(k\delta_1 + 1/2) D_{lkb}}{z_1} ( )^{k\delta_1-1/2} + R_{\dot{U}E}'(z) \quad (11.9) \\ - \left\{ \frac{D_{l_{13}a}}{z_1} (1 + \ln( )) \right\} \Big|_{\text{Fall OE10/11}} \\ + R_E'(z) \quad (\ddot{U}E) \\ - \left\{ \frac{D_{l_{11}a}}{z_1} ( )^{-1} + \frac{D_{l_{11}b}}{z_1} (1 + \ln( )) \right\} \Big|_{\text{Fall OE11}} \\ - \frac{D_{10a}}{z_1} ( )^{-1} - \sum_{k=1}^{k_{13}} \frac{k\delta_1 D_{lka}}{z_1} ( )^{k\delta_1-1} + R_{SE}'(z) \quad (SE) \\ - \left\{ \frac{D_{l_{12}a}}{z_1} (1 + \ln( )) \right\} \Big|_{L_{12} \text{ ganz}} \end{array} \right.$$

Schliesslich kann der Gradient der konformen Abbildung in Ecknähe (E, ÜE, SE) durch

$$\omega'(z) = (\ )^{\delta_i-1} \bar{\omega}_i'(z) \quad (11.10)$$

ausgedrückt werden<sup>1</sup>.

Die Lösung kann mit Hilfe der Darstellungen (11.4) bis (11.10) für die kritischen Randpunkte angegeben werden:

$$F(z_i) = \begin{cases} D_{10a} \bar{X}_i(z_i) & (\bar{U}) \\ D_{10a} X(z_i) \ln(z_i) + X(z_i) [R_s(z_i) + \bar{I}_0(z_i)] & (S) \\ X(z_i) [R_E(z_i) + \bar{I}_0(z_i)] & (E) \\ D_{10a} \bar{X}_i(z_i) & (\bar{UE}) \\ D_{10a} X(z_i) \ln(z_i) + X(z_i) [R_{SE}(z_i) + \bar{I}_0(z_i)] & (SE). \end{cases} \quad (11.11)$$

Die entsprechenden Verhalten für den komplexen, konjugierten Gradienten (11.4) resultieren nach einiger Rechnung<sup>2</sup>:

bei Übergängen ( $\bar{U}$ ),

$$\frac{F'(z)}{\omega'(z)} = - \frac{\bar{X}_i(z_i) [\bar{I}_0(z_i) + R_{\bar{U}}(z_i)]}{2z_i \bar{\omega}'(z_i)} (\ )^{-\frac{1}{2}} + \frac{z_i D_{10a} \bar{X}_i'(z_i) - D_{10b} \bar{X}_i(z_i)}{z_i \bar{\omega}'(z_i)}, \quad (11.12)$$

<sup>1</sup> Die Herleitung und die Definition von  $\bar{\omega}_i'(z)$  ist in Kapitel 8.3a zu finden.

<sup>2</sup> Bemerkenswert ist dabei, dass alle Terme der Sonderfälle (geschweifte Klammern) in (11.9) wegfallen.

bei Sprüngen (S),

$$\begin{aligned}
 \frac{F'(z)}{\omega'(z)} = & -\frac{D_{10a}X(z_1)}{2z_1\bar{\omega}'(z_1)}( )^{-1} \\
 & + \frac{z_1D_{10a}X'(z_1) - D_{10b}X(z_1)}{z_1\bar{\omega}'(z_1)} \ln( ) \\
 & + \frac{X'(z_1)[\bar{I}_0(z_1) + R_s(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)} \\
 & + \frac{X(z_1)[\bar{I}_0'(z_1) + R_s'(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)} ,
 \end{aligned} \tag{11.13}$$

bei Ecken (E),

$$\begin{aligned}
 \frac{F'(z)}{\omega'(z)} = & \frac{X'(z_1)[\bar{I}_0(z_1) + R_E(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)}( )^{1-\delta_l} \\
 & + \frac{X(z_1)[\bar{I}_0'(z_1) + R_E'(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)}( )^{1-\delta_l} \\
 & - \frac{\delta_l D_{11a}X(z_1)}{z_1\bar{\omega}'(z_1)} ,
 \end{aligned} \tag{11.14}$$

bei Eckübergängen (ÜE),

$$\begin{aligned}
 \frac{F'(z)}{\omega'(z)} = & -\frac{\bar{X}_l(z_1)[\bar{I}_0(z_1) + R_{ÜE}(z_1)]}{2z_1\bar{\omega}'(z_1)}( )^{1/2-\delta_l} \\
 & + \frac{z_1D_{10a}\bar{X}_l'(z_1) - D_{10b}\bar{X}_l(z_1)}{z_1\bar{\omega}'(z_1)}( )^{1-\delta_l} \\
 & + \frac{\bar{X}_l'(z_1)[\bar{I}_0(z_1) + R_{ÜE}(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)}( )^{3/2-\delta_l} \\
 & + \frac{\bar{X}_l(z_1)[\bar{I}_0'(z_1) + R_{ÜE}'(z_1)]}{\bar{\omega}'(z_1)}( )^{3/2-\delta_l} \\
 & - \frac{\delta_l D_{11a}\bar{X}_l(z_1)}{z_1\bar{\omega}'(z_1)}
 \end{aligned} \tag{11.15}$$



und schlussendlich bei Sprungecken (SE),

$$\begin{aligned}
 \frac{F'(z)}{\omega'(z)} = & -\frac{D_{10a} X(z_l)}{z_l \tilde{\omega}'(z_l)} ( )^{-\delta_l} \\
 & + \frac{D_{10a} X'(z_l)}{\tilde{\omega}'(z_l)} ( )^{1-\delta_l} \ln( ) \\
 & + \frac{X'(z_l) [\tilde{I}_0(z_l) + R_{SE}(z_l)]}{\tilde{\omega}'(z_l)} ( )^{1-\delta_l} \\
 & + \frac{X(z_l) [\tilde{I}_0'(z_l) + R_{SE}'(z_l)]}{\tilde{\omega}'(z_l)} ( )^{1-\delta_l}.
 \end{aligned}
 \tag{11.16}$$

# **Anhänge**

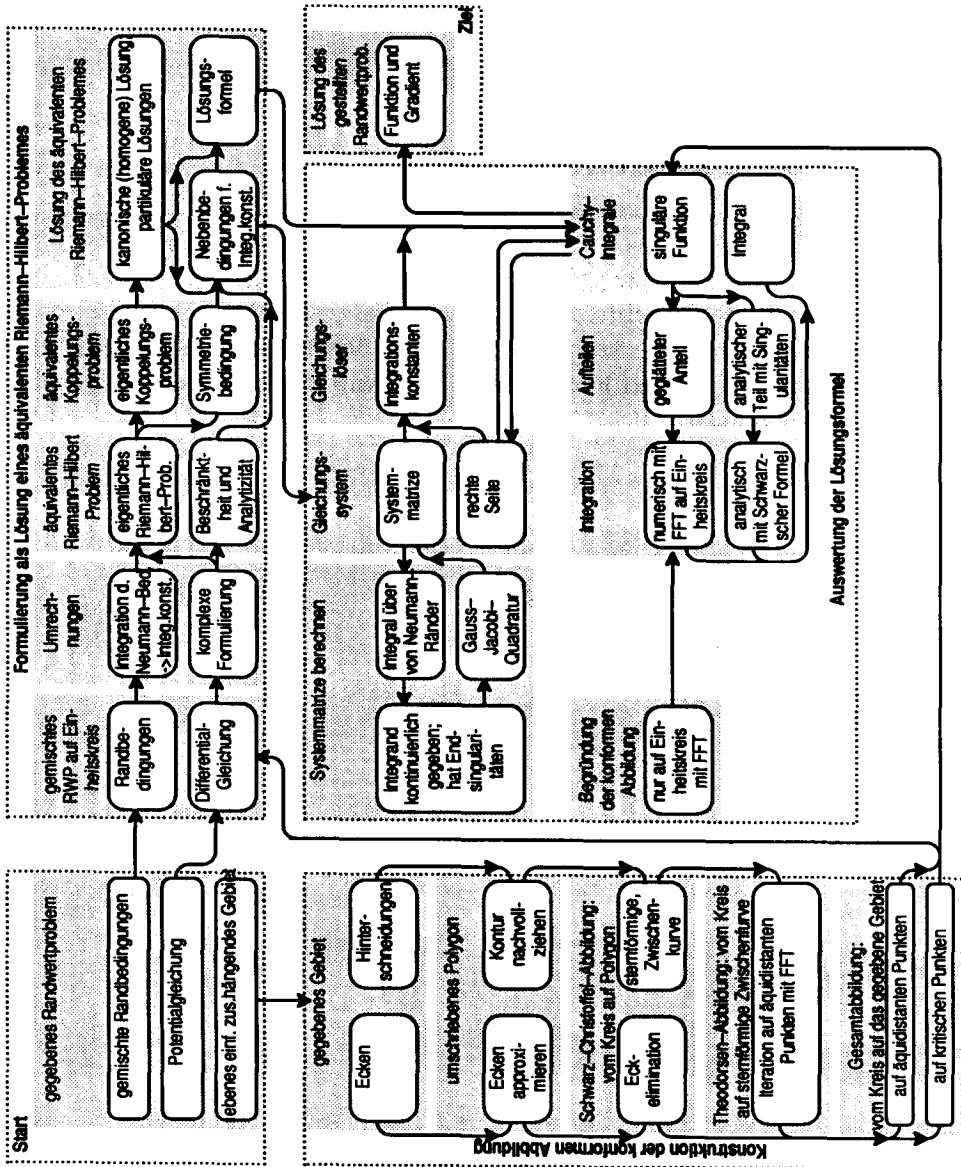
Leer - Vide - Empty

## Anhang A

### Grafische Zusammenfassung

---

In Anlehnung an die gröberen Übersichten in den Figuren 2-1 und 6-1 stellt das nachfolgende Schema eine feinere Strukturierung der Ingredienzen der Methode dar. Vielleicht hilft diese Darstellung, dem roten Faden beim Studium dieser Arbeit besser folgen zu können.



## Anhang B

## Zusammenfassung des Algorithmus

**A) Berechne die Parameter der konformen Abbildung vom Einheitskreis auf das gegebene einfach zusammenhängende Gebiet (Kapitel 2, 5 und 8, insbesondere Fig. 5–4)<sup>1</sup>.**

**Module: Prep1, Prep2, Gebiet**

- (1) Definiere das gegebene Gebiet punktweise<sup>2</sup>.
- (2) Umschreibe<sup>3</sup> das Gebiet mit einem Polygon,
  - das gemeinsame Ecken und Tangenten mit dem Gebiet hat (Eckelimination),
  - das den Rand in den wesentlichen Zügen nachvollzieht (sternförmige Zwischenkurve),
  - jedoch möglichst wenige Ecken aufweist (Rechenaufwand).

**Modul: SCHWARZ**

- (3) Löse das Parameterproblem der Schwarz–Christoffel–Abbildung. Benutze dabei
  - eine Variablentransformation, um die richtige Reihenfolge der Urbilder der Ecken zu garantieren (8.4)

<sup>1</sup> Ist das Gebiet polygonal, entfallen Schritte (1) und (4) bis (8), ist das Gebiet sternförmig ohne Ecken, entfallen Schritte (2) bis (4)

<sup>2</sup> Die Schwarz–Christoffel–Abbildung wird nur punktweise berechnet.

<sup>3</sup> Respektive definiere ein polygonales Gebiet durch seine Ecken.

- eine zusammengesetzte Gauss–Jacobi–Quadratur, um Singularitäten im Integranden und nahe am Integrationsweg zu berücksichtigen (Fig. 8–1)
  - einen nichtlinearen Gleichungslöser, um damit die Urbilder der Ecken auf dem Einheitskreis und eine Skalierungskonstante zu berechnen (8.3)
- (4) Finde die Punkte der Zwischenkurve, die auf die gegebene Punkte des Randes abgebildet werden. Verwende dazu die inverse Schwarz–Christoffel Abbildung, führe daher für jeden Randpunkt eine Newton–Iteration durch (Kapitel 8.1c).
- (5) Prüfe die Sternförmigkeit der Zwischenkurve.

**Modul: THEODOR**

- (6) Berechne eine kontinuierliche Approximation der Zwischenkurve, beispielsweise durch eine Spline–Interpolation [De Boor 78]. Die Theodorsen–Iteration verlangt, dass der Rand kontinuierlich gegeben ist.
- (7) Bereite die modifizierte Theodorsen–Iteration vor (Kapitel 8.2b). Bestimme dazu
- die Stützstellen auf dem Einheitskreis
  - den Unterrelaxationsfaktor (8.36)
  - die Abminderungsfaktoren (8.39)
  - die Anfangsnäherung (eventuell aus bereits berechneten Daten)
- (8) Führe die Iteration durch. Berechne bei jedem Iterationsschritt nacheinander (Fig. 2–2)
- den Rand der  $\nu$ -ten Näherung,  $\rho_\nu(\vartheta(\varphi))$
  - die Konjugierte von  $K[\ln(\rho_\nu(\vartheta(\varphi)))]$  in drei Schritten:
    - 1) Fourieranalyse von  $\ln(\rho_\nu(\vartheta(\varphi)))$ ,
    - 2) Konjugation (Vertauschen von Real- und Imaginärteil mit Vorzeichenwechsel (8.38)) und Multiplikation mit Abminderungsfaktoren
    - 3) Fouriersynthese von 2)

- $v + 1$ -te Näherung bestimmen (8.35)
- Abbruchkriterium prüfen.

**(B) Verpflanze das zu lösende gemischte Potentialproblem auf den Einheitskreis (Kapitel 2 und 8, insbesondere Fig. 5–6)**

**Modul: ABBILD**

- (9) Berechne die Abbildungsfunktion und den Gradienten von gleichmässig über den Rand des Einheitskreises verteilten Punkte:
- Werte die Theodorsen–Abbildung (8.28) unter Ausnutzung der FFT (8.41) aus (Kapitel 8.2a)
  - Werte dann die Schwarz–Christoffel–Abbildung aus (Kapitel 8.1a)
  - Verknüpfe die Teilabbildungen (Kapitel 8.3a)

**Modul: DRWP**

- (10) Finde die Urbilder der kritischen Punkte ( $\dot{U}$ ), (S), (E), ( $\dot{U}E$ ), (ES) auf dem Einheitskreis, indem
- die inverse Schwarz–Christoffel–Abbildung dieser Punkte berechnet wird (Kapitel 8.1c) und darauf
  - die Iteration (8.45) zur Bestimmung der inversen Theodorsen–Abbildung benutzt wird (Kapitel 8.2c)
- (11) Bereite die Berechnung der Extraktionskoeffizienten vor, indem die Koeffizienten der Reihenentwicklung der Ränderzuordnungsfunktion bestimmt werden (Kapitel 8.1d, 8.2d und 8.3b und c)
- (12) Integriere die von Neumann–Bedingungen  $q_0$  resp.  $Q_0$  entlang dem Rand um  $v_0$  resp.  $V_0$  zu erhalten<sup>1</sup> (1.5).

---

<sup>1</sup> Im der vorliegenden Implementation wird dieser Schritt nicht explizit durchgeführt, da die Randbedingungen direkt aus einer Routine bestimmt werden, die eine exakte Lösung liefert. Damit ist eine exakte Fehlerberechnung der Methode möglich.



**(C) Berechne die Parameter der Lösung: Integrationskonstanten, Extraktions- und Fourierkoeffizienten (Kapitel 3, 4, 10, Fig. 5-7)**

**Modul: SOLP**

- (13) Bestimme die rechte Seite  $B_m$  des Gleichungssystems (4.1) für die Integrationskonstanten:
- Bestimme die Extraktionskoeffizienten  $K_{mlkj}$  und damit  $\dot{J}_m(\varphi)$  gemäss Kapitel 10, wobei nur die gegebenen Randbedingungen, ohne die Integrationskonstanten berücksichtigt werden.
  - Bilde daraus die Differenz  $\ddot{J}_m(\varphi) = J_m(\varphi) - \dot{J}_m(\varphi)$  auf äquidistanten Punkten.
  - Berechne  $\dot{I}_m(0)$ .
  - Berechne den 0-ten Fourierkoeffizienten von  $\ddot{J}_m(\varphi)$ , der im wesentlichen  $\ddot{I}_m(0)$ , entspricht
  - Bilde  $B_m = \ddot{I}_m(0) + \dot{I}_m(0)$ .
- (14) Berechne die Systemmatrize  $A_{mk}$ :
- Benutze eine Gauss-Jacobi-Quadraturformel zur Berechnung jedes Elementes von  $A_{mk}$ , die die Endsingularitäten berücksichtigt.
- (15) Löse das Gleichungssystem für die Integrationskonstanten  $C_k$ :
- Erfinde eine  $n$ -te Gleichung, z.B.  $C_0 = 0$ .
  - Löse das volle, reelle nichtsymmetrische Gleichungssystem  $A_{mk} C_k = B_m$  der Ordnung  $n$ .
- (16) Korrigiere die gegebenen Randbedingungen mit den in (13) bis (15) berechneten Konstanten  $C_k$  (9.62).
- (17) Bestimme damit die Extraktionskoeffizienten der Lösung (Kapitel 10).
- (18) Berechne die Fourierkoeffizienten der Lösung:
- Bilde die Differenz  $\ddot{J}_0(\varphi) = J_0(\varphi) - \dot{J}_0(\varphi)$ .

*Anhang B: Zusammenfassung des Algorithmus 179*

- Die Fourieranalyse von  $\tilde{J}_0(\varphi)$  liefert die gesuchten Koeffizienten, welche vor der Synthese noch leicht modifiziert werden müssen (7.33) und (7.41).

**(D) Werte die Lösung und deren Gradient aus (Kapitel 4, 9, 11, Fig. 5–8)**

**Module: ABBILD, FKR**

- (19) Auswertung an äquidistant auf Kreisen im Einheitskreis verteilten Punkten (Kapitel 11.2a):
- Berechne die konforme Abbildung für diese Punkte. Dazu kann teilweise die FFT benutzt werden
  - Werte die Extraktionsfunktion aus
  - Modifiziere die Fourierkoeffizienten und berechne  $\tilde{I}_0(z)$  mit einer FFT pro Kreis
  - Ergänze die Summe von  $\tilde{I}_0(z)$  und der Extraktionsfunktion mit der kanonischen Lösung

**Modul: FEZ**

- (20) Auswertung an beliebigen (nicht kritischen) Einzelpunkten (Kapitel 11.2b):
- prinzipiell gleiches Vorgehen wie in Schritt (19)
  - statt der FFT müssen die Fourierreihen mit einem Horner-Schema punktweise ausgewertet werden
- (21) Auswertung an kritischen Randpunkten durch die spezifischen Ausdrücke für jeden Typ (Kapitel 11.2c)

Leer - Vide - Empty

## Anhang C

Tabelle der Figuren

---

**Kapitel 1: Übersicht**

- Fig. 1-1: Problemstellung: ebenes gemischtes Potentialproblem auf einfach zusammenhängendem Gebiet.
- Fig. 1-2: Die Verknüpfung der wichtigsten Bausteine der Methode.
- Fig. 1-3 Die zwei Schritte zur Konstruktion der konformen Abbildung.

**Kapitel 2: Konforme Abbildung**

- Fig. 2-1: Verpflanzungsregeln und Bezeichnungen.
- Fig. 2-2: Theodorsen-Abbildung.
- Fig. 2-3: Schwarz-Christoffel-Abbildung.
- Fig. 2-4: Gebiete die nicht abgebildet werden können.

**Kapitel 3: Riemann-Hilbert-Probleme**

- Fig. 3-1: Definitionen des auf den Einheitskreis verpflanzten Problems.
- Fig. 3-2: Kanonische Lösung.

**Kapitel 4: Auswertung der Lösung**

- Fig. 4-1: Quellen der Singularitäten.

**Kapitel 5: Numerische Beispiele**

- Fig. 5-1: Die Verknüpfung der 7 Module der konformen Abbildung.
- Fig. 5-2: Die Verknüpfung der 3 Module zur Lösung des verpflanzten, gemischten Potentialproblem.

- Fig. 5-3: Gebietsdefinition des Beispiels der Figuren und Tabellen 5-4 bis 5-8.
- Fig. 5-4: Beispiel der einzelnen Schritte zur Konstruktion der konformen Abbildung.
- Tab. 5-5: Kenngrößen, Aufwand und Genauigkeit der Berechnungen des Beispiels von Fig. 5-3.
- Fig. 5-6: Beispiel der Verpflanzung der gegebenen Randbedingungen.
- Fig. 5-7: Illustration der Extraktion der Singularitäten
- Fig. 5-8: Lösung und Absolutfehler des Beispiels.
- Tab. 5-9: Kenngrößen, Aufwand und Genauigkeit der Berechnungen des Beispiels der Fig. 5-5 bis 5-7.
- Tab. 5-10: Einflussmatrix einiger Wirkungsfaktoren der konformen Abbildung.
- Tab. 5-11: Beispiel zum Einfluss der Wahl des umschriebenen Polygons auf Aufwand und Genauigkeit der konformen Abbildung.
- Tab. 5-12: Einflussmatrix einiger Wirkungsfaktoren der Lösung des verpflanzten Potentialproblems.
- Fig. 5-13: Beispiel für die beiden nachfolgenden Tabellen 5-13 und 5-14
- Tab. 5-14: Beispiel des Einflusses des Verlaufs der gegebenen Randwerte auf Aufwand und Genauigkeit der Lösung.
- Tab. 5-15: Beispiel des Einflusses der Anzahl bekannten Ableitungen in kritischen Punkten auf Aufwand und Genauigkeit der Lösung.

## **Kapitel 6: Ausblick**

- Fig. 6-1: Die Bausteine der Methode und grundsätzliche Erweiterungsmöglichkeiten.
- Fig. 6-2: Erweiterung der Gebietsklassen.
- Fig. 6-3: Ein Beispiel zum Crowding-Phänomen.
- Fig. 6-4: Erweiterte Symmetrieklassen.
- Fig. 6-5: Bezeichnungen für Probleme der ebenen Elastostatik.
- Fig. 6-6: Bezeichnungen für Kirchhoff-Platten.

**Kapitel 7: Detailspekt Cauchy-Integrale**

- Fig. 7-1: Zur Definition der Cauchyschen Integralformel.
- Fig. 7-2: Zum Hauptwert der Cauchy-Integrale.
- Fig. 7-3: Zur Definition der inneren und äusseren Grenzwerte.
- Fig. 7-4: Die Spiegelung am Einheitskreis.
- Fig. 7-5: Cauchy-Integrale auf dem Einheitskreis.

**Kapitel 8: Detailspekt Konforme Abbildung**

- Fig. 8-1: Aufteilung des Integrationsweges bei der Schwarz-Christoffel-Abbildung.
- Fig. 8-2: Definition der Ränderzuordnungsfunktion.

**Kapitel 9: Detailspekt Riemann-Hilbert-Probleme**

**Kapitel 10: Detailspekt Extraktionsfunktionen**

- Fig. 10-1: Die «richtigen» Zweige.

**Kapitel 11: Detailspekt resultierendes Lösungsverfahren**

Leer - Vide - Empty

## Anhang D

## Referenzen

- 
- Ahlfors, E.V. [1953]. *Complex analysis*. McGraw-Hill.
- Alibadi, M.H., Hall, W.S., Hibbs, T.T. [1987]. Exact singularity cancelling for the potential kernel in the boundary element method. *Com. Appl. Num. Meth.*, **3**, 123–128.
- Bathe, K., Wilson, E.L. [1876]. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice Hall.
- Berrut, J. [1985]. *Integralgleichungen und Fourier-Methoden zur numerischen konformen Abbildung*. Diss. ETH Zürich, Nr. 7754.
- Bjørstad, P., Grosse, E. [1987]. Conformal mapping of circular arc polygons. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **8**, 19–32.
- Brebbia, C.A. [1984]. *The boundary element method for engineers*. Pentech Press.
- Brigham, E.O. [1974]. *The fast Fourier transform*. Prentice-Hall.
- Chan, S.L. [1976]. On the possible application of group representations to some boundary value and eigenvalue problems of certain domains without classical symmetry. *J. Appl. Math Phys.*, **27**, 553–561, 563–572, 840–851
- Daepfen, H. [1988]. *Die Schwarz-Christoffel-Abbildung für zweifach zusammenhängende Gebiete mit Anwendungen*. Diss. ETH Zürich, Nr. 8495.
- De Boor, C. [1978]. *A practical guide to splines*. Springer.
- Galer, D. [1964]. *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Springer.
- Grassmann, E. [1979]. Numerical experiments with a method of successive approximation for conformal mapping. *J. Appl. Math. Phys.* **30**, 873–884.



- Grassmann, E., Hoidn, H. [1982]. Numerical experiments with an osculation method for conformal mapping of doubly connected regions. *J. Appl. Math Phys.*, 33, 640–652.
- Gutknecht, M.H. [1981]. Solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various iterative methods. *Numer. Math.* 36, 405–429.
- Gutknecht, M.H. [1983]. Numerical experiments on solving Theodorsen's integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various iterative methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 4, 1–30.
- Gutknecht, M.H. [1986 a]. The evaluation of the conjugate function of a periodic spline on a uniform mesh. *J. Comp. Appl. Math.*, 16, 181–201.
- Gutknecht, M.H. [1986 b]. Numerical conformal mapping methods based on function conjugation. *J. Comp. Appl. Math.*, 14, 31–77.
- Haas, R. [1985]. A combination of boundary elements with conformal mapping methods. *Proceedings of the 7th Int. Conf. on Boundary Elements*, ed. C.A. Brebbia, G. Maier, Como. Springer.
- Hagemann, L.A., Young, D.M. [1981]. *Applied iterative methods*. Academic Press.
- Henrici, P. [1974]. Power series – integration – conformal mapping – location of zeroes. *Applied and computational complex analysis 1*. John Wiley & Sons.
- Henrici, P. [1977]. Special functions – integral transforms – asymptotics – continued fractions. *Applied and computational complex analysis 2*. John Wiley & Sons.
- Henrici, P. [1986]. Discrete Fourier analysis – Cauchy integrals – construction of conformal maps – univalent functions. *Applied and computational complex analysis 3*. John Wiley & Sons.
- Hersch, J. [1965]. Erweiterte Symmetrieeigenschaften von Lösungen gewisser linearer Rand- und Eigenwertprobleme. *Journal für Mathematik*, 218, 143–158

- Jaswon, M.A., Symm, G.T. [1977]. *Integral equation methods in potential theory and elastostatics*. Academic Press.
- Koppenfels, W., Stallmann, F. [1959]. *Praxis der konformen Abbildung*. Springer.
- Lehman R.S. [1957]. Development of the mapping function at an analytic corner. *Pacific J. Math.*, 7, 1437–1449.
- Leipholz, H. [1974]. *Theory of elasticity*. P. Noordhoff Ltd.
- Muskhelishvili, N.I. [1953]. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. P. Noordhoff Ltd.
- Muskhelishvili, N.I. [1965]. *Singuläre Integralgleichungen*. Akademie Verlag Berlin.
- Piessens, R., de Doncker-Kapenga, E, Ueberhuber, C.W., Kahaner, D.K. [1983]. *Quadpack, a subroutine package for automatic integration*, Springer.
- Schwarz, H.R. [1981]. *Methode der finiten elemente*. Teubner.
- Seewald, W. [1985]. *Die effiziente Lösung der Helmholtzgleichung auf dem Rechteck und der Kreisscheibe*. Diss. ETH Zürich, Nr. 7716.
- Sokolnikoff, I.S. [1956]. *Mathematical Theory of elasticity*. McGraw-Hill.
- Stiefel, E., Fässler, A. [1979] *Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung*. Teubner.
- Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A., Mastin, C.W. [1985]. *Numerical grid generation: foundations and applications*. North-Holland.
- Trefethen, L.N. [1980]. Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1, 82–102.
- Trefethen, L.N. [1982]. *SCPACK version 2 user's guide*. Internal Rep. 24, Inst. Computer Appl. in Sci. and Eng., NASA Langley Res. Center, Hampton, VA.
- Trefethen, L.N., ed. [1986]. *Numerical conformal mapping*. North-Holland
- Treffitz, E. [1926]. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. *Vortragsauszüge 2-ter Int. Kongress f. techn. Mechanik, Zürich*.

- Vester, F. [1983]. *Ballungsgebiete in der Krise*. dtv.
- Wood, R.N. [1971]. Analytic function theory, *Continuum physics*, ed. A.C. Eringen. Academic Press.
- Zienkiewicz, O.C. [1977]. *The finite element method*. McGraw-Hill.

## Anhang E

### Lebenslauf

---

- Personalien:** Roland Haas,  
geboren am 29.1.1957,  
aus Zürich
- Ausbildung:**
- 1964–76      Primar-, Bezirks- und Mittelschule in  
Wettingen und Baden
- 1976–82      Studium an der ETH Zürich an der Abteilung  
für Maschineningenieurwesen mit Abschluss  
als Dipl. Masch. Ing. ETH
- 1979/80      Jahresaufenthalt in Australien inklusive  
Industriepraktikum
- seit 1982      Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter  
am Institut für Mechanik der ETH Zürich.