Diss. ETH Nr. 8897

Interaktion mit raumbezogenen Informationssystemen

Vom Konstruieren zum Editieren geometrischer Modelle

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

WERNER KUHN
dipl. Verm. Ing. ETH
geboren am 24. August 1957
von Orpund BE und Zürich

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. A. Carosio, Referent
Prof. Dr. H.P. Frei, Korreferent

1989

In Erinnerung an
Prof. Rudolf Conzett
1922 - 1987

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Interaktion mit raumbezogenen Informationssystemen bei der Erfassung geometrischer Daten. Sie schlägt vor, geometrische Konstruktionsaufgaben durch ein *Editieren geometrischer Modelle*, statt durch computergestütztes geometrisches Konstruieren zu bearbeiten.

Um die Anforderungen an eine interaktive Bearbeitung geometrischer Konstruktionsaufgaben zu klären, werden zuerst praktische Aufgabenstellungen und Lösungsmethoden untersucht. Eine Betrachtung verschiedener Phasen und Sprachen bei Problemlösungen im allgemeinen ergibt dann zwei grundsätzliche *Möglichkeiten der Arbeitsteilung und Kommunikation* zwischen Benützern und System:

- Die Benützer entwickeln und beschreiben Lösungen als Folgen von *Konstruktionsschritten,* die das System ausführt. Dieses computergestützte geometrische Konstruieren wiederspiegelt eine Automatisierung des manuellen Vorgehens.
- Die Benützer beschreiben Aufgabenstellungen durch *geometrische Bedingungen,* die das System auswertet. Die Beschreibungen von Konstruktionsaufgaben stellen geometrische Modelle dar, die jederzeit editiert, d.h. ergänzt und verändert werden können.

Die Mittel zur *Beschreibung geometrischer Modelle* durch Bedingungen werden in drei Stufen entwickelt: Zuerst dient die Differentialgeometrie dazu, die elementaren Eigenschaften und Beziehungen zu finden, mit denen sich allgemeine geometrische Bedingungen ausdrücken lassen. Dann wird mit Hilfe der Prädikatenlogik eine benützernahe Sprache definiert, um Bedingungen in geometrischer Terminologie beschreiben zu können. Schliesslich wird eine Interaktionssprache entworfen, mit der die Benützer geometrische Modelle skizzieren und durch logische Formeln präzisieren können.

Zur *Lösung der Gleichungssysteme*, die sich aus geometrischen Bedingungen ergeben, wird eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgeschlagen. Diese ermöglicht es, unter- und überbestimmte Situationen sowie Unsicherheit in den Bedingungen zu behandeln. Die Skizzen der geometrischen Modelle liefern die erforderlichen Näherungslösungen.

Die Ergebnisse der Arbeit lassen sich in drei Punkten zusammenfassen:

- Ein *konstruktives* und ein *deskriptives Interaktionsmodell* werden als mögliche Vorstellungen über die Interaktion bei der Erfassung geometrischer Daten erörtert. Die dazu verwendeten Konzepte aus der Theorie des Problemlösens können auch zur Untersuchung und Gestaltung von Benützerschnittstellen in anderen Gebieten eingesetzt werden.
- Der *Geometrische Bedingungskalkül* wird als Sprache zur vollständigen formalen Beschreibung ebener geometrischer Modelle definiert. Er bildet die Grundlage für eine deskriptive Interaktion bei der Erfassung geometrischer Daten, kann aber auch zur Darstellung geometrischen Wissens in anderen Anwendungen dienen.
- Der Entwurf eines *Editors für geometrische Modelle* illustriert die praktischen Auswirkungen der Wahl des deskriptiven Interaktionsmodells. Die Realisierbarkeit dieses Entwurfs ist anhand einer teilweisen Implementation gezeigt worden.

Abstract

The thesis treats human-computer interaction during the acquisition of geometric data in spatial information systems. It proposes to design user interfaces for geometric construction tasks as *constraint-based editors for geometric models*, rather than geometric construction systems.

In order to determine the requirements for an interactive treatment of geometric construction tasks, the thesis begins with an analysis of practical tasks and solution methods. An investigation of phases and languages for problem solving reveals two fundamental *possibilities for the allocation of subtasks and the communication* between users and system:

- The users develop and describe solutions as sequences of *construction steps* which the system executes.This computer aided geometric constructing reflects an automation of manual procedures.
- The users describe tasks by *geometric constraints* which the system tries to satisfy. The descriptions of construction tasks represent geometric models which can subsequently be edited.

The means for the *description of geometric models* by constraints are developed in three steps: First, differential geometry is used to determine the elementary properties and relationships sufficient to express general geometric constraints. Then, formal logic serves to define a high-level language for the specification of constraints in geometric terminology. Finally, an interaction language is designed in which users can sketch geometric models and refine these by logic formulas.

A least squares adjustment is proposed to *solve the systems of equations* representing geometric constraints. This allows for treating under- and overconstrained situations as well as uncertainty in constraints. The sketched geometric models provide the necessary approximate solutions.

The results of the thesis can be summarized in three main points:

- A *constructive* and a *descriptive interaction model* are identified as possible conceptualizations of human-computer interaction during geometric data acquisition. The utilized framework from the theory of problem solving can be used to analyze and design user interfaces in other areas.
- The *Geometric Constraint Calculus*, a language for complete formal descriptions of plane geometric models, is defined. It provides the basis for a descriptive interaction in geometric data acquisition and can serve as a high-level language for geometric knowledge representation in other applications.
- The design of an *editor for geometric models* illustrates the practical implications of adopting the descriptive interaction model. The feasibility of the approach has been demonstrated by a partial implementation.

1. Einleitung

Ein Bild hielt uns gefangen. Und heraus konnten wir nicht, denn es lag in unsrer Sprache, und sie schien es uns nur unerbittlich zu wiederholen.

Ludwig Wittgenstein

Wie soll ein Mensch einem Computer geometrisches Wissen mitteilen können? In der vorliegenden Arbeit wird diese Frage für die Interaktion mit raumbezogenen Informationssystemen untersucht. Als Alternative zum computergestützten geometrischen Konstruieren wird ein Editieren geometrischer Modelle vorgeschlagen. Die Arbeit stellt die dazu notwendigen sprachlichen und mathematischen Mittel bereit.

1.1. Umfeld

Als *raumbezogene Informationssysteme* werden in dieser Arbeit computergestützte Systeme bezeichnet, die Information über den Raum erfassen, verarbeiten, speichern und wiedergeben können. Der betrachtete Raum ist der dreidimensionale Lebensraum des Menschen mit tatsächlichen und vorgestellten Objekten, deren geometrische Eigenschaften und Beziehungen interessieren. Es wird hier nicht versucht, zwischen Landinformationssystemen [Conzett 1983, Frank 1983, McLaughlin & Nichols 1987], Geographischen Informationssystemen [Burrough 1986] und weiteren Arten [Parker 1988] zu unterscheiden, da nur deren gemeinsame Eigenschaft verwendet wird, raumbezogene Information in geometrischen Modellen zu verwalten.

Ein *geometrisches Modell* bestehe aus Symbolen [Newell & Simon 1976] oder Zeichen [Eco 1976], die für Objekte des Raums und deren geometrische Eigenschaften und Beziehungen stehen können. Wesentlich ist dabei die Zeichenfunktion von Modellen, nicht die Beschaffenheit der Zeichen. Ein geometrisches Modell kann zum Beispiel aus Holz, graphischen Zeichen auf einem Plan, Netzen von Neuronen oder Magnetisierungen in einem Speichermedium bestehen. Eine Vorstellung von der Topographie einer Landschaft im Kopf eines Betrachters ist somit ebenso ein geometrisches Modell wie eine Darstellung dieser Topographie in einem Plan oder in einer Datenbank. Vorstellungen sind *mentale*, Darstellungen *physische* Modelle [Minsky 1968].

Geometrische Modelle in raumbezogenen Informationssystemen stellen, ähnlich wie in Plänen und Karten, oft *zweidimensionale* Abstraktionen des dreidimensionalen Raums dar. Die vorliegende Arbeit wurde im Hinblick auf Anwendungen in der Vermessung unternommen [Chevallier & Sievers 1986] und beschränkt sich deshalb auf solche "ebenen" geometrischen Modelle. Da nur die geometrischen Aspekte von raumbezogener Information behandelt werden, betreffen anderseits die meisten Überlegungen auch die Interaktion mit Informationssystemen, die geometrische Modelle verwalten, aber nicht im engeren Sinne raumbezogen sind. Dazu gehören insbesondere CAD (Computer Aided Design) Systeme [Jadrnicek 1984], die bei der Erfassung und Bearbeitung geometrischer Daten zu ähnlichen Problemstellungen wie raumbezogene Informationssysteme führen.

Forschung und Entwicklung haben sich eingehend mit Fragen der *Speicherung* und *Verarbeitung* raumbezogener Information beschäftigt: Anforderungen an Datenbanksysteme [Frank 1982, Frank 1985, Bartelme 1988], Vorschläge für Datenstrukturen [Samet 1989a,b] und Methoden für die konsistente Verwaltung raumbezogener Information [Frank 1983, Frank & Kuhn 1986, Herring 1987] sind ausführlich untersucht und beschrieben worden. Die automatische Verarbeitung und Analyse von geometrischen [Preparata & Shamos 1985, Forrest 1987a] und geographischen [NCGIA 1989] Daten bilden bedeutende Forschungs- und Entwicklungszweige.

Die *Erfassung* und die *Wiedergabe* von raumbezogener Information haben bisher weniger Beachtung gefunden. Mit der zunehmenden Bedeutung von raumbezogenen Informationssystemen in Wirtschaft und Verwaltung [Tomlinson 1984, EJPD 1987] erweitert sich jedoch der Kreis der Benützer dieser Systeme rasch. Dadurch kommen immer mehr Leute mit minimalen Informatik-Kenntnissen in die Lage, Daten interaktiv einzugeben, abzufragen [Egenhofer 1989] und zu verändern. Für sie *ist* die Benützerschnittstelle das System und es hängt von deren Qualität ab, ob sie das System akzeptieren und damit erfolgreich arbeiten können. Die Verbesserung der Interaktion wird dadurch zum wichtigsten Ziel der weiteren Entwicklung von raumbezogenen Informationssystemen [Collins et al. 1983].

1.2. Problemstellung

Im Ingenieurwesen erwarten die Benützer von einem raumbezogenen Informationssystem Unterstützung beim Planen, Projektieren und Kartieren von Objekten im Raum. Beispiele für entsprechende Aufgaben in der Vermessung sind etwa der Entwurf von Versorgungsnetzen und Verkehrswegen oder die Erfassung von Daten über Grundstücke und Eigentumsverhältnisse. Die vorliegende Arbeit untersucht die *geometrischen Aspekte* solcher Aufgaben.

Mit dem eingeführten Begriff des geometrischen Modells gelingt es, die betrachteten Aufgaben zu definieren: Die Benützer haben eine Vorstellung über Objekte im Raum und wollen mit dem System eine Darstellung davon erzeugen, d.h. ein mentales geometrisches Modell in ein physisches übertragen. Der gebräuchliche Begriff der *geometrischen Konstruktionsaufgabe* [Breidenbach & Süss 1967]] kann in diesem Sinne erweitert werden: Es geht bei diesen Aufgaben darum, aufgrund gewisser Bedingungen ein geometrisches Modell (als Verallgemeinerung einer geometrischen Figur) zu erzeugen.

Die Benützerschnittstellen der meisten Systeme bieten zur Lösung solcher Aufgaben Operationen an, die den klassischen geometrischen Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal nachgebildet sind. Bei dieser Automatisierung manueller Lösungsmethoden mit dem Ziel eines computergestützten geometrischen Konstruierens bleibt den Benützern die vertraute *Sprache der Grundkonstruktionen* erhalten. Moderne Hard- und Softwareumgebungen erlauben jedoch eine wesentlich umfassendere Unterstützung der Benützer. Diese Arbeit hat zum Ziel, Grundlagen bereitzustellen für eine Interaktion mit raumbezogenen Informationssystemen, bei der die Benützer mit ebenso vertrauten Ausdrucksmitteln *Aufgabenstellungen* statt Lösungswege geometrischer Konstruktionsaufgaben *beschreiben* können.

1.3. Abgrenzung

Die Erfassung und Bearbeitung von Daten in einem raumbezogenen Informationssystem kann die *Konsistenz* des gespeicherten Modells gefährden. Ein konsistentes Modell sei hier dadurch definiert, dass es interpretierbar ist, d.h. dass seinen Symbolen Bedeutungen zugeordnet werden können und dabei keine Widersprüche entstehen.

Die Konsistenz geometrischer Modelle spielt eine wesentliche Rolle in raumbezogenen Informationssystemen [Frank 1983]. Ein erster Aspekt davon ist die konsistente *Verwaltung* der Modelle: Wie können raumbezogene Daten gespeichert werden, so dass die daraus abgeleitete Information widerspruchslos ist? Ein Vorschlag für eine Methode zur konsistenten Verwaltung geometrischer Modelle wurde mit der Zellkomplex-Methode in [Frank & Kuhn 1986, Kuhn 1989] gemacht.

Ein zweiter Aspekt der Konsistenz geometrischer Modelle ist die Gestaltung der *Operationen:* Wie kann verhindert werden, dass beim Erfassen und Bearbeiten von Daten inkonsistente Modelle entstehen? Diese Frage kann nur im Zusammenhang mit den Bedeutungen der Daten behandelt werden. Die Interpretierbarkeit eines bestimmten geometrischen Modells hängt z.B. davon ab, ob dessen Symbole Strassen oder Leitungen darstellen. Die in dieser Arbeit betrachteten Operationen mit geometrischen Daten können somit nur als Ausgangspunkt zu Untersuchungen dieser Frage dienen.

1.4. Lösungsansatz und Überblick

Die Benützerschnittstelle zu einem System zu entwerfen bedeutet, ein *Interaktionsmodell* zu entwerfen [Moran 1981]. Das Interaktionsmodell (alias "konzeptionelles Modell der Interaktion") ist eine bestimmte Vorstellung des Systementwicklers von den Konzepten, auf denen die Interaktion aufbauen soll. Mit der Wahl eines Interaktionsmodells wird bewusst festgelegt, welche Vorstellung sich die Benützer vom System und dessen Funktionen machen sollen. Die Klarheit und Einfachheit des Interaktionsmodells entscheiden darüber, wie einfach das System zu erlernen und zu benützen sein wird.

Das bekannteste Beispiel eines Interaktionsmodells beruht auf der *"Schreibtisch-Metapher"*, die in den Siebzigerjahren bei Xerox für Büroinformationssysteme entwickelt [Smith et al. 1982] und später durch den Macintosh Computer von Apple verbreitet wurde [Apple 1987]. Die Idee dahinter ist, den Benützern die vertraute Büroumgebung zu simulieren. Dazu werden einerseits elektronische Entsprechungen für Dokumente und Ordner auf einem Schreibtisch sowie für einen Abfallkorb geschaffen und anderseits die verschiedenen Handlungen des Einordnens, Kopierens und Wegwerfens von Dokumenten nachgebildet.

Jede Analogie zu einer vertrauten Arbeitsumgebung ist notwendigerweise unvollständig und birgt die Gefahr, dass unerwartete Abweichungen die Benützer verunsichern oder zu Fehlern verleiten. Die Frage, ob ein Interaktionsmodell Analogien ausnützen oder bewusst eine neuartige Arbeitsumgebung vorsehen soll, ist deshalb umstritten [Halasz & Moran 1982]. Diese Arbeit geht jedoch von der Hypothese aus, dass die Frage in manchen Fällen nicht "Analogie ja oder nein?", sondern "Analogie *auf welcher Stufe?*" lauten sollte.

Für die interaktive Bearbeitung geometrischer Konstruktionsaufgaben werden deshalb zwei Interaktionsmodelle entwickelt, die Analogien zu Anwenderkonzepten auf verschiedenen Stufen vorsehen. Das *konstruktive* Interaktionsmodell entspricht der erwähnten Vorstellung vom computergestützten Konstruieren. Es beruht also auf einer Analogie zu den bisherigen Arbeitsmethoden. Demgegenüber verwendet das *deskriptive* Interaktionsmodell eine Analogie zur Art und Weise, in der Konstruktionsaufgaben beschrieben und mitgeteilt werden.

Aufgrund der Analyse einer praktischen geometrischen Konstruktionsaufgabe in Kapitel 2 und anhand von Konzepten aus der Theorie des Problemlösens wird in Kapitel 3 gezeigt, dass das konstruktive Interaktionsmodell wichtigen Anforderungen an die Interaktion mit raumbezogenen Informationssystemen nicht genügt. Aufbauend auf dem deskriptiven Interaktionsmodell wird der allgemeinere Ansatz des *Editierens geometrischer Modelle* vorgeschlagen. Damit lässt sich der Computer zur Erfassung des Wissens im Zusammenhang mit geometrischen Konstruktionsaufgaben statt nur zur Simulation herkömmlicher Konstruktionswerkzeuge einsetzen.

Zum Editieren geometrischer Modelle benötigen die Benützer eine *Sprache,* mit der sie Modelle und deren Veränderungen beschreiben können. Ein Ansatz dafür ergibt sich aus der Überlegung, dass geometrische Konstruktionsaufgaben aus *Bedingungen* aufgebaut sind, die durch Skizzen und in verbaler Form beschrieben werden können [Polya 1949]. Daher wird in dieser Arbeit in drei Schritten eine Sprache zur Beschreibung geometrischer Modelle durch Bedingungen entwickelt: In Anlehnung an [Krasznai 1988] werden in Kapitel 4 die möglichen Bedingungen mit Hilfe der Differentialgeometrie untersucht und die Mittel zu einer analytischen Beschreibung bereitgestellt. In Kapitel 5 wird gezeigt, wie sich Bedingungen mit Hilfe der Prädikatenlogik in geometrischer Terminologie beschreiben lassen. Schliesslich illustriert Kapitel 6 eine Interaktionssprache, in der geometrische Bedingungen durch Skizzen und logische Formeln beschrieben werden können.

Die *Lösung* von geometrischen Konstruktionsaufgaben kann als Parameterschätzung in geometrischen Modellen aufgefasst werden. Sie erfordert ein numerisches Verfahren, mit dem das System die beschriebenen Bedingungen auswerten kann. Ausgehend von der analytischen Beschreibung geometrischer Bedingungen wird dafür in Kapitel 4 eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate [Koch 1987] vorgeschlagen. Dieses Verfahren bietet die notwendige Flexibilität für die Behandlung von unter- und überbestimmten Aufgaben. Die erforderlichen Näherungswerte für die Parameter kann das System der Skizze entnehmen.

2. Geometrische Konstruktionsaufgaben

Ein Beispiel aus der Ingenieurpraxis (2.1.) zeigt den charakteristischen Aufbau von geometrischen Konstruktionsaufgaben aus topologischen und metrischen Bedingungen (2.2.). Die Mittel zur Veranschaulichung und Mitteilung von Konstruktionsaufgaben (2.3.), sowie das Vorgehen bei einer manuellen Lösung (2.4.) werden untersucht. Das Kapitel schliesst mit einer Diskussion der Ergebnisse im Hinblick auf die Möglichkeiten zur Automatisierung (2.5.).

2.1. Ausgangslage

Im Rahmen der Sanierung einer Strasseneinmündung stelle sich folgende Aufgabe (siehe Abbildung 2-1): Bei der Einfahrt von der neu angelegten Hauptstrasse in die Nebenstrasse sind die inneren Fahrbahnränder so miteinander zu verbinden, dass der Fahrstreifen zwischen dieser Verbindung und dem neuen Verkehrsteiler die Einfahrt von Lastwagen ohne Anhänger erlaubt.

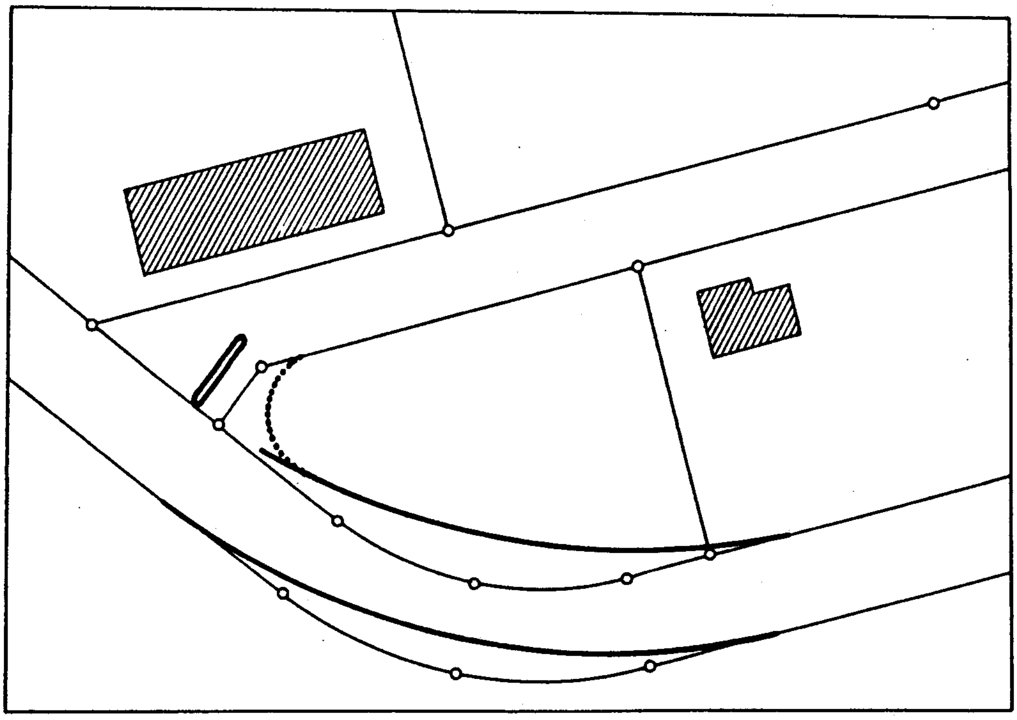

Abbildung 2-1: Skizze zur Ausgangslage einer Konstruktionsaufgabe (alte Situation, neue Hauptstrasse und skizzierter Verbindungsbogen)

Die Beschreibung der Aufgabe illustriert eine typische Ausgangslage für geometrische Konstruktionsaufgaben im Ingenieurwesen:

- Die Aufgabe ist in den *Begriffen des Fachgebiets* formuliert und muss zuerst in geometrische Terminologie übersetzt werden. So sind für die Verbindung der Fahrbahnränder geometrische Elemente bestimmter Typen (Kreis- oder Übergangsbogen) zu wählen und aus der angegebenen Fahrzeugkategorie ist eine minimale Breite des Fahrstreifens zu berechnen.
- Die Beschreibung stützt sich auf eine *Skizze* der Situation, welche die gegenseitige Lage der Konstruktionselemente zeigt und weitere geometrische Information enthält. Die vorliegende Projektskizze zeigt zum Beispiel, dass die Nebenstrasse gerade verläuft und dass die Hauptstrasse die Form eines Kreisbogens hat.
- Die Beschreibung ist *unvollständig*. Technische und gesetzliche Anforderungen sind aus weiteren Informationsquellen (Normen, Vorschriften, Richtlinien) zu entnehmen. Die erforderliche Fahrstreifenbreite lässt sich mit Hilfe einer Strassenbau-Norm aus Schleppkurven von Lastwagen berechnen. Koordinatenverzeichnisse, Handrisse und Feldbücher liefern zusätzlich benötigte Information, z.B. Radien und Koordinaten.
- Die erhältliche Information ist *nicht hinreichend*. Der projektierende Ingenieur muss zusätzliche Anforderungen festlegen oder von der Projektleitung, dem Geometer oder den Behörden Präzisierungen verlangen. Der gesuchte Verbindungsbogen kann z.B. aufgrund kleiner Verkehrsmengen als einfacher Kreisbogen angenommen werden.
- Die Anforderungen sind *widersprüchlich* und es muss ein Optimum gefunden werden. Die Fahrzeuggeometrie und die Fahrdynamik verlangen z.B. einen möglichst grossen Radius des Bogens; anderseits muss aus ökonomischen und ökologischen Gründen die Strassenfläche möglichst klein bleiben.

Die Ausarbeitung einer vollständigen und eindeutigen Aufgabenstellung zu einer geometrischen Konstruktionsaufgabe ist also bereits ein informationsverarbeitender Vorgang. Für das Konstruktionsbeispiel ergebe sich die folgende *Aufgabenstellung*:

Gesucht ist der Kreisbogen, der

- eine Gerade durch zwei Punkte
- eine Parallele in gegebenem Abstand zu einer Geraden durch zwei Punkte
- einen gegebenen Kreisbogen

in dieser Reihenfolge berührt (siehe Abbildung 2-1).

2.2. Inhalt der Aufgabenstellung

In der Aufgabenstellung ist die Rede von gegebenen und gesuchten Stücken und von Beziehungen dazwischen. Gegeben und gesucht sind

- geometrische Elemente (Punkte, Geraden, Kreisbögen)
- Skalare (Koordinaten, Radien, Abstände).

Beziehungen treten auf als

- Inzidenzen (Geraden, die durch Punkte gehen)
- Parallelität von Geraden
- Berührungen von Geraden und Kreisbögen.

Die Aufgabenstellung beschreibt also topologische und metrische Eigenschaften und Beziehungen der zu konstruierenden Situation. Sie stellt damit *geometrische Bedingungen* auf, welche die gegebenen und gesuchten Elemente erfüllen sollen. Die Bedingungen beschreiben das Ziel der Aufgabe und unterscheiden deshalb nicht zwischen gegebenen und gesuchten Stücken.

Topologische Bedingungen betreffen

- die Existenz von Elementen ("der Punkt", "die Gerade")
- deren Dimension ("Punkt": 0-dimensional; "Gerade", "Kreis": 1-dimensional)
- Inzidenzen von Kurven und Punkten ("durch", "berührt").

Metrische Bedingungen betreffen

- die Form von Elementen ("Gerade", "Kreis")
- deren Grösse (Radius)
- deren absolute und relative Lage (Koordinaten, Abstände, "berührt")
- Anordnungen von Punkten auf Kurven ("in dieser Reihenfolge").

Eine Aufgabe ist bestimmt, wenn soviele Bedingungen gegeben sind, als zur Bestimmung der gesuchten Elemente notwendig sind. Sie kann dann eine oder mehrere Lösungen haben und ist je nachdem *eindeutig* oder *mehrdeutig*. Sind weniger Bedingungen als nötig gegeben, so ist die Aufgabe *unterbestimmt* und hat unendlich viele Lösungen. Wenn mehr Bedingungen als hinreichend gegeben sind, ist die Aufgabe *überbestimmt* und nicht lösbar, ohne Bedingungen zu verletzen.

Geometrische Bedingungen gelten nicht immer streng, da das Wissen über geometrische Eigenschaften und Beziehungen normalerweise mit *Unsicherheit* behaftet ist [Robinson & Frank 1985, Bédard 1986]. Diese Unsicherheit hat verschiedene Ursachen: Beobachtungen sind mit unvermeidlichen Messfehlern behaftet, Entwurfsanforderungen sind oft widersprüchlich oder ungenau [Schenk 1986] und berechnete Grössen beruhen ihrerseits auf unsicherer Information.

2.3. Form der Aufgabenstellung

Eine Aufgabenstellung allein in Worten wäre weder eindeutig noch anschaulich. Die Parallele im Konstruktionsbeispiel kann z.B. auf zwei Seiten der Geraden gezeichnet werden und für den gesuchten Kreisbogen gibt es mehrere Lösungen. Die graphische Darstellung der Ausgangslage mit der skizzierten Lösung enthält Information, die für die Vollständigkeit und Eindeutigkeit der Aufgabenstellung wesentlich ist. Sie illustriert nicht nur die Aufgabenstellung, sondern bildet einen unentbehrlichen Bestandteil davon. Die Aufgabenstellung hat also die Form einer *Skizze* der gesuchten Lösung mit zusätzlichen *Angaben* über die Eigenschaften der Lösung.

Ingenieure sind sich gewohnt, Ideen und Entwürfe in Skizzen zu entwickeln und mitzuteilen. Sie können darin die wichtigsten Züge eines Projekts festhalten, ohne ihre Intuition und Kreativität durch den Engpass einer geometrisch korrekten Darstellung zu behindern. Widersprüchliche Eigenschaften können in Skizzen nebeneinander bestehen, ohne dass durch den Zwang zu einer exakten und widerspruchsfreien Zeichnung möglicherweise richtige oder zweckmässige Information weggelassen wird.

Skizzieren bedeutet abstrahieren: Gewisse Eigenschaften einer Situation werden unterdrückt und andere bleiben erhalten. Die Skizze abstrahiert hauptsächlich von den *metrischen* Eigenschaften. Formen sind zwar erkennbar, aber Geraden sind nicht wirklich gerade und Kreisbogen haben keine konstante Krümmung; Distanzen sind massstäblich nicht richtig, Flächeninhalte sind es noch weniger; Distanzverhältnisse stimmen nur annähernd; Rechtwinkligkeit ist nur ungefähr gewahrt und allgemeine Winkel sind verzerrt.

Die *topologischen* Eigenschaften bleiben dagegen beim Skizzieren erhalten, z.B. Dimensionen (aus Kurven werden keine Punkte) oder Inzidenzen (Schnittpunkte von Kurven bleiben erhalten). In diesem Sinne kann die Aussage, eine Konstruktionsaufgabe sei mit einer Skizze schon halb gelöst, wörtlich verstanden werden: meistens enthält die Skizze einer Aufgabenstellung topologisch betrachtet bereits die korrekte Lösung der Aufgabe und metrisch eine Näherungslösung. Die Skizze definiert somit die topologischen Bedingungen einer Aufgabenstellung. Die metrischen Bedingungen ergeben sich zum Teil ebenfalls aus der Skizze und zum Teil aus den zusätzlichen Angaben.

2.4. Manuelle Lösung

Zur manuellen Lösung von geometrischen Konstruktionsaufgaben können entweder Zeichengeräte (Zirkel, Lineal, Equerre usw.) verwendet oder Gleichungen aufgestellt und gelöst werden. Je nachdem spricht man von einer graphischen (2.4.1.) oder numerischen (2.4.2.) Lösung.

2.4.1. Graphische Lösungsmethode

Kennzeichnend für die graphische Lösungsmethode ist, dass sie einen *Konstruktionsplan* verlangt. Dieser enthält eine Folge von Konstruktionsschritten, die von der gegebenen zur gesuchten Situation führt. Die Art der Konstruktionsschritte hängt davon ab, welche Instrumente für die Lösung zur Verfügung stehen. Im klassischen Fall von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal sind alle Konstruktionspläne aus vier elementaren ("euklidischen") Konstruktionsschritten aufgebaut [Courant & Robbins 1967]:

- Zwei Punkte durch eine Gerade verbinden
- Zwei Geraden schneiden
- Einen Kreis mit einem gegebenen Radius um einen Punkt schlagen
- Einen Kreis mit einem anderen Kreis oder mit einer Geraden schneiden.

Zirkel und Lineal sind die einfachsten Zeicheninstrumente, aber es gibt keinen praktischen Grund, nicht auch andere Instrumente - und damit andere Konstruktionsschritte - für eine graphische Lösung zuzulassen, z.B. Massstab, Transporteur, Equerre usw. Je vielfältiger die Zeicheninstrumente sind, desto weniger Schritte sind für einen Konstruktionsplan nötig.

Um bei gegebenen Zeicheninstrumenten einen Konstruktionsplan zu entwickeln, wird die Aufgabe in *Teilaufgaben* unterteilt [Polya 1949]. Die Skizze der Aufgabenstellung spielt dabei eine wesentliche Rolle für die Entwicklung von Lösungsideen: Sie veranschaulicht die Aufgabe, erinnert den Konstrukteur an bereits gelöste Aufgaben und richtet seine Gedanken auf das Ziel der Konstruktionsaufgabe aus.

Die Suche nach *geometrischen Örtern*, d.h. nach Geraden oder Kreisen, auf denen ein gesuchter Punkt liegen muss, ist ein Grundmuster des Vorgehens bei der Unterteilung in Teilaufgaben. Wenn für einen Punkt zwei geometrische Örter bekannt sind, lässt er sich als deren Schnittpunkt konstruieren. Im Konstruktionsbeispiel ist offensichtlich die Winkelhalbierende der beiden gegebenen Tangenten ein erster geometrischer Ort für den gesuchten Kreismittelpunkt. Ein weiterer geometrischer Ort lässt sich nicht direkt angeben.

Zum Auffinden geometrischer Örter hilft es, eine Aufgabe auf *verwandte Aufgaben* zurückzuführen. Der vorliegende Fall lässt sich auf die Konstruktion eines Kreises zurückführen, der zwei Geraden berührt und durch einen Punkt geht. Dieser Kreis ist konzentrisch zum gesuchten. Wenn es in der Aufgabe also einen Kreis gäbe, der durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises führte und Parallelen im Abstand des gegebenen Radius zu den Tangenten berührte, so wäre der gesuchte Kreis konzentrisch dazu. Diese Teilaufgabe lässt sich ihrerseits darauf zurückführen, einen beliebigen Kreis an die Parallelen zu den zwei Tangenten zu legen. Eine Ähnlichkeitsabbildung mit dem Parallelenschnittpunkt als Zentrum liefert den konzentrischen Hilfskreis und damit den Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Insgesamt ergibt sich damit der folgende Konstruktionsplan:

1. Parallelen zu den zwei Tangenten im Abstand des gegebenen Radius'
2. Winkelhalbierende der Tangenten
3. Hilfskreis um beliebigen Punkt auf der Winkelhalbierenden, der die Parallelen berührt
4. Gerade durch Parallelenschnittpunkt und gegebenen Kreismittelpunkt
5. Schnittpunkt dieser Geraden mit dem Hilfskreis
6. Gerade durch diesen Schnittpunkt und den Hilfskreismittelpunkt
7. Parallele zu dieser Geraden durch den gegebenen Kreismittelpunkt
8. Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Winkelhalbierenden
9. Der gesuchte Kreis hat diesen Schnittpunkt als Mittelpunkt.

Nachdem der Konstruktionsplan ausgeführt ist, muss sich der Konstrukteur davon überzeugen, dass die gefundene Lösung *korrekt* ist, d.h. dass sie die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt. Theoretisch bildet der Konstruktionsplan selbst den konstruktiven Beweis für die Korrektheit. Praktisch werden in der konstruierten Figur die Bedingungen, z.B. die Berührungsbedingungen, visuell überprüft und allenfalls gewisse Kontrollmasse gemessen.

2.4.2. Numerische Lösungsmethode

Während beinahe zwei Jahrtausenden war die graphische Lösungsmethode die einzige Möglichkeit zur Behandlung von geometrischen Konstruktionsaufgaben. Erst René Descartes erkannte im 17. Jahrhundert, dass sich jede geometrische Konstruktionsaufgabe auf ein algebraisches Problem zurückführen lässt, indem die Bedingungen der Aufgabenstellung durch *Gleichungen* ausgedrückt werden. Daraus entstand die analytische Geometrie und mit ihr eine neue, numerische Methode zur Lösung geometrischer Aufgaben.

Dem Entwickeln eines Konstruktionsplans bei der graphischen Lösungsmethode entspricht das Aufstellen von Gleichungen bei der numerischen Methode. Dazu sind die Bedingungen der Aufgabenstellung in die Sprache der Algebra zu übersetzen. Eine Skizze dient dabei wiederum zur Veranschaulichung der gegebenen und gesuchten Stücke und ihrer Beziehungen.

Die Wahl der Parameter in den Gleichungen beeinflusst die Einfachheit der Lösung. Eine geschickte Parametrisierung erspart nachfolgende Substitutionen in den Gleichungen. Im Beispiel werde ein lokales kartesisches Koordinatensystem eingeführt, mit einer der Geraden und dem Lot durch den gegebenen Kreismittelpunkt als Achsen. Gegeben sind der Ort a des bekannten Kreismittelpunkts auf der einen Achse, der Abschnitt b der zweiten Geraden auf der anderen Achse und der Winkel α zwischen den Geraden. Gesucht sind die Mittelpunktskoordinaten t und r des neuen Kreises.

Ausgehend von den Bedingungen der Aufgabenstellung sind nun Gleichungen in diesen Grössen aufzustellen. Die Wahl der Unbekannten t und r sorgt bereits für die Einhaltung einer Tangentenbedingung. Die Berührung der anderen Geraden mit dem gesuchten Kreis lässt sich durch den Achsenabschnitt b und den Zwischenwinkel der Geraden ausdrücken:

$$t - b = r \tan \alpha/2$$

Schliesslich ergibt die Berührung der zwei Kreise ein rechtwinkliges Dreieck und liefert somit die Gleichung

$$(R - r)^2 = (a - r)^2 + t^2$$

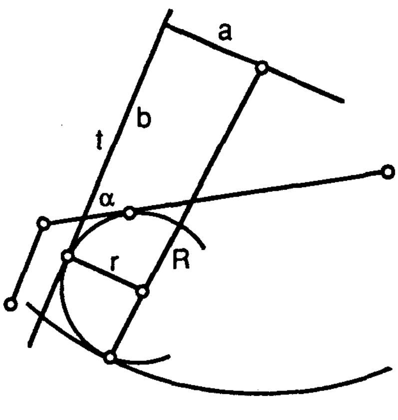

Abbildung 2-2: Parametrisierung der Konstruktionsaufgabe

Die Auflösung der zwei Gleichungen nach den Unbekannten r und t ist problemlos und wird hier nicht durchgeführt. Wie bei der graphischen, schliesst sich auch bei der numerischen Lösungsmethode eine Beurteilung der gefundenen Lösung an. Hier gilt es insbesondere auch, bei Mehrfachlösungen den gewünschten Fall auszuwählen.

2.5. Zusammenfassung und Diskussion

Die Ausgangslage einer geometrischen Konstruktionsaufgabe entspricht in der Praxis selten jener eines Schulbeispiels. Eine Aufgabenstellung in geometrischer Terminologie ist vielmehr das Ergebnis einer gezielten Sammlung und Verarbeitung von Information aus verschiedenen Quellen.

Topologische und metrische Bedingungen bilden den Inhalt von Aufgabenstellungen. Sie sind Aussagen über geometrische Eigenschaften und Beziehungen von gegebenen und gesuchten Stücken, ausgedrückt in Form einer *Skizze* mit Zusatzangaben. Die Skizze bildet dadurch einen unentbehrlichen Bestandteil der Beschreibung einer Konstruktionsaufgabe. Sie spielt eine entscheidende Rolle für das Verständnis der Aufgabe und ist *das* Hilfsmittel für die Entwicklung einer Lösung, bei der graphischen wie bei der numerischen Methode.

Die intellektuelle Arbeit beim Lösen einer Konstruktionsaufgabe besteht bei der graphischen Methode im Ausarbeiten des Konstruktionsplans und bei der numerischen Methode im Aufstellen der Gleichungen. In beiden Fällen bilden die Bedingungen der Aufgabenstellung den Ausgangspunkt. Die Schwierigkeit, einen Konstruktionsplan auszuarbeiten, ist dabei vergleichbar mit jener, genügend unabhängige Gleichungen zu finden. Subjektive Unterschiede ergeben sich durch das Ausmass der Erfahrung mit dem einen oder anderen Vorgehen.

Wenn sich beim Entwickeln eines Konstruktionsplans oder beim Aufstellen von Gleichungen herausstellt, dass zuwenig Bedingungen vorliegen, die Aufgabe also *unterbestimmt* ist, so muss entweder zusätzliche Information beschafft oder es müssen ad hoc Entscheide getroffen werden, um eine Lösung zu erhalten. Bei *überbestimmten* Aufgaben müssen widersprüchliche Bedingungen nach ihrer Wichtigkeit abgestuft und zum Teil weggelassen werden.

Die graphische Lösungsmethode führt nur zum Ziel, wenn die verwendeten Bedingungen die Aufgabe eindeutig bestimmen. Die numerische Methode bietet demgegenüber die Möglichkeit, Bedingungen auch dann zu berücksichtigen, wenn sie zu inkonsistenten Gleichungssystemen führen. Dazu ist ein Optimierungsproblem mit einer Zielfunktion und den Konstruktionsbedingungen als Nebenbedingungen zu lösen. Widersprüchliche Bedingungen können dabei natürlich nicht exakt erfüllt werden. Ihr

Einfluss lässt sich aber durch Gewichte steuern. Eine solche Erweiterung der numerischen Lösungsmethode dient in dieser Arbeit (siehe Kapitel 4) als mathematische Grundlage für die Interaktion bei der computergestützten Bearbeitung geometrischer Konstruktionsaufgaben.

In der Praxis bilden genau bestimmte Aufgaben die Ausnahme und unterbestimmte Aufgaben mit mehreren korrekten Lösungen oder überbestimmte Aufgaben mit mehreren Teillösungen die Regel. Ein Konstrukteur sollte eine Lösung aus verschiedenen *Varianten* auswählen können. Aus praktischen Gründen beschränkt sich aber die Auswahl - unabhängig von der verwendeten Lösungsmethode - meist auf wenige Varianten. Eine Computer-Unterstützung für Konstruktionsprozesse sollte neben der Entlastung des Konstrukteurs von routinemässiger Zeichenarbeit vor allem in dieser Hinsicht Verbesserungen bringen [Greenberg 1984].

Das Konzept der Bedingungen ('constraints') spielt eine wesentliche Rolle in *Entwurfsaufgaben*. Ein zu entwerfendes Objekt muss "funktionieren", d.h. gewisse Anforderungen erfüllen, die sich durch Bedingungen ausdrücken lassen. Entwurfsprozesse beginnen daher mit einer Spezifikation des Objekts durch Bedingungen [Simon 1981, Fischer und Böcker 1983]. Geometrische Konstruktionsaufgaben können als Entwurfsaufgaben in diesem Sinne aufgefasst werden: Der Konstrukteur entwirft geometrische Modelle, indem er Objekte durch Bedingungen spezifiziert. Dabei ist es unwesentlich, ob die Objekte nur in seiner Vorstellung oder auch in der Wirklichkeit bestehen. Konstruktionsaufgaben, bei denen eine wirkliche Situation geometrisch dargestellt (kartiert) werden soll und solche, bei denen eine gewünschte Situation entworfen (projektiert) wird, unterscheiden sich somit nicht grundsätzlich.

3. Interaktionsmodelle für geometrische Konstruktionsaufgaben

Die Bearbeitung von Konstruktionsaufgaben ist ein Problemlösungsvorgang. Zur Gestaltung der Interaktion für eine Computer-Unterstützung können deshalb Erkenntnisse aus der Theorie des Problemlösens [Polya 1949, Newell & Simon 1972] verwendet werden. Dieses Kapitel stellt entsprechende Begriffe bereit (3.1.) um damit zwei gegensätzliche Interaktionsmodelle zu untersuchen: ein konstruktives (3.2.) und ein deskriptives (3.3.).

3.1. Phasen und Sprachen des Problemlösens

Eine Gliederung von Problemlösungsvorgängen in Phasen (3.1.1.) und eine Unterscheidung verschiedener Sprachen beim Problemlösen (3.1.2.) liefern den Rahmen für die Diskussion der Möglichkeiten computergestützten Problemlösens (3.1.3.).

3.1.1. Problemlösungs-Phasen

Ein *Problem* besteht darin, unter Beachtung gewisser *Bedingungen* aus etwas Gegebenem etwas Gesuchtes zu finden. Das Gegebene bildet einen *Anfangszustand*, das Gesuchte einen *Endzustand*. Die Bedingungen beschreiben diese Zustände und deren Zusammenhang.

Eine *Problemlösung* führt den Anfangszustand in den Endzustand über. Normalerweise sind dabei mehrere *Zwischenzustände* zu durchlaufen. Im Gegensatz zu den Anfangs- und Endzuständen ist jedoch über die Zwischenzustände vorerst nichts bekannt. Ein Beispiel für ein Problem und seine Lösung über Zwischenzustände ist die Konstruktionsaufgabe aus Kapitel 2 mit ihrer graphischen Lösung.

Eine *Problemlösungsmethode* stellt eine Menge von Operationen bereit, um Zustände in andere überzuführen. In einem bestimmten Zustand stehen meistens mehrere Operationen zur Auswahl, mit denen verschiedene Folgezustände erreicht werden können. Die Menge der möglichen Zustände und Operationen bilden zusammen den sogenannten *Problemraum* [Newell & Simon 1972]. Im Fall einer geometrischen Konstruktionsaufgabe, die mit Zirkel und Lineal zu lösen ist, besteht der Problemraum aus den euklidischen

Grundkonstruktionen und den Figuren, die sich damit aus dem Anfangszustand ableiten lassen.

Ein Problem zu lösen bedeutet, einen Weg im Problemraum zu suchen. Dabei kann sowohl *vorwärts* (vom Anfangszustand aus) als auch *rückwärts* (vom Endzustand aus) gesucht werden. Die Methodik des Problemlösens empfiehlt, rückwärts zu arbeiten, d.h. ein Problem als gelöst zu betrachten: "A wise man begins in the end, a fool ends in the beginning" [Polya 1981]. Das Ergebnis der Suche ist ein *Lösungsplan*, der durch eine endliche Folge von Operationen einen Lösungsweg vom Anfangszustand zum Endzustand beschreibt.

Zur Einschränkung des Suchaufwands in einem Problemraum gibt es verschiedene Strategien. Die wichtigste von ihnen vermindert die Anzahl und die Länge der möglichen Wege durch die Bildung von *Teilzielen.* Jedes Teilziel entspricht einem Zwischenzustand, der vom vorangehenden Teilziel aus zu erreichen ist. Dazu ist wiederum ein Teil-Lösungsplan nötig, der seinerseits aus einer Folge von Teilzielen besteht. Auf einer gewissen Stufe dieser hierarchischen Unterteilung sind die Teilziele mit den Operationen der Lösungsmethode direkt erreichbar. Die Entwicklung von Konstruktionsplänen für geometrische Konstruktionsaufgaben ist typisch für dieses Ziel/Plan-Vorgehen mit Teilzielbildung. Die Unterteilung in Teilziele bricht dabei ab, wenn ein Teilziel durch eine der Grundoperationen erreicht werden kann.

Für das Vorgehen beim Lösen von Problemen ergeben sich somit die folgenden *vier Phasen* [Polya 1949]:

1. Verstehen und Beschreiben des Problems
2. Ausarbeiten eines Plans
3. Ausführen des Plans
4. Beurteilen der Lösung.

3.1.2. Problemlösungs-Sprachen

Um Probleme und Problemlösungen zu beschreiben, sind verschiedene Sprachen notwendig: Für die Formulierung und Veranschaulichung eines Problems, für die Planung und Ausführung einer Lösung sowie zur Mitteilung an Menschen oder Maschinen.

Beschreibungen von Problemen und Problemlösungen durch solche Sprachen sind typischerweise sowohl *Zustands-* als auch *Prozessbeschreibungen* [Simon 1981]. Meist liegt eine Zustandsbeschreibung des Ziels vor, welche die Eigenschaften und Beziehungen von dem beschreibt, *was* erreicht werden soll. Benötigt wird eine Prozessbeschreibung der Lösung, die erklärt, *wie* das Ziel zu erreichen ist.

Beispiele: Zustandsbeschreibung: "Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Punkt gleichen Abstand haben."

Prozessbeschreibung: "Ein Kreis entsteht, wenn der eine Schenkel eines Zirkels festgehalten und der andere rotiert wird, bis er wieder den Ausgangspunkt erreicht."

Nach [Goldin 1982] lassen sich *drei Arten von Sprachen* unterscheiden, die im Verlauf einer (mathematischen) Problemlösung verwendet werden:

- Problembeschreibungssprachen, in denen ein Problem formuliert wird;
- Planungssprachen, in denen Lösungspläne und Strategien beschrieben werden;
- Notationen, in denen Lösungen angegeben werden.

Problembeschreibungssprachen umfassen natürliche Sprachen, mathematische Formeln, Diagramme, Skizzen, Pläne usw. Mit ihnen wird das "Was", nicht das "Wie" einer Problemlösung beschrieben. Sie kommen deshalb meist ohne Mittel für Prozessbeschreibungen aus.

Beispiele: Die Skizze und die verbalen Angaben in der Aufgabenstellung von 2.1. sind Zustandsbeschreibungen in Problembeschreibungssprachen.

Mit *Planungssprachen* wird die Suche nach einem Weg im Problemraum beschrieben. Sie müssen daher Zustands- und Prozessbeschreibungen erlauben. Planungssprachen sind normalerweise weniger formalisiert als Problembeschreibungssprachen und Notationen. In Kapitel 2 enthalten die Planungsphasen graphische (Skizzen) und verbale ("wenn es einen Kreis gäbe ..., so wäre der gesuchte Kreis ...") Beschreibungen von Zuständen und Prozessen.

Notationen dienen zur Beschreibung von Lösungsplänen. Mit ihnen wird das "Wie" einer Problemlösung, d.h. eine Prozessbeschreibung, formuliert. Sie sind meist stark strukturierte, formale Sprachen, die an bestimmte Lösungsmethoden gebunden sind.

Beispiel: Die euklidischen Grundkonstruktionen und die Sprache der Algebra, in der Gleichungen aufgestellt und gelöst werden, sind Notationen für geometrische Konstruktionsaufgaben. Sie legen die erlaubten, d.h. korrekt gebildeten, Figuren oder Gleichungen und die zulässigen Symbolmanipulationen abschliessend fest.

3.1.3. Computergestütztes Problemlösen

Bei jeder Automatisierung von Problemlösungsvorgängen ist eine *Arbeitsteilung* zwischen Benützer und System festzulegen. Die vier Problemlösungsphasen ergeben dafür zwei sinnvolle Möglichkeiten:

- Der Benützer beschreibt einen Lösungsplan und das System führt ihn aus.
- Der Benützer beschreibt das Problem und das System sucht eine Lösung.

In beiden Fällen benötigen Benützer und System eine Sprache, um über Probleme oder Problemlösungen kommunizieren zu können.

Im ersten Fall wird die Entwicklung der Lösungspläne, also die eigentliche Lösung von Problemen, dem Benützer überlassen. Das System erledigt nur die Ausführungsphase. Es kann den Benützer in der Planungs- und Beurteilungsphase nicht direkt unterstützen, da es die Problemstellung nicht kennt. Die Kommunikation baut auf einer Notation auf.

Häufig bietet sich eine bestehende *Notation* in einem Fachgebiet als Grundlage zur Automatisierung an. Notationen gehorchen formalen Regeln und drängen sich dadurch zur automatischen Verarbeitung geradezu auf. Da sie aus der Anwendung hervorgehen und den Fachleuten vertraut sind, versprechen sie zudem eine "benützerfreundliche" Interaktion mit dem System. Sie sind aber an bestimmte Lösungsmethoden (z.B. die graphische Konstruktionsmethode) gebunden, die ihrerseits von den herkömmlichen Mitteln zur Problemlösung (z.B. Zirkel und Lineal) geprägt sind. Eine Automatisierung, die auf einer bestehenden Notation aufbaut, birgt daher die Gefahr, neben der Vertrautheit herkömmlicher Methoden auch deren Beschränkungen zu übernehmen.

Die zweite Möglichkeit zur Arbeitsteilung verlangt vom Benützer nur eine Problembeschreibung und überlässt dem System die drei übrigen Phasen. Dies erlaubt eine bedeutend umfassendere Unterstützung. Der Benützer muss sich nicht mehr mit dem "Wie" einer Problemlösung abgeben, sondern kann sich auf das "Was" konzentrieren. Die Voraussetzungen dafür sind allerdings, dass eine automatische Problemlösung überhaupt möglich und erwünscht ist, und dass eine Problembeschreibungssprache als Grundlage für die Interaktion vorliegt oder entworfen werden kann.

Im Gegensatz zu den Notationen sind die *Problembeschreibungssprachen* in vielen Fachgebieten wenig bis gar nicht formalisiert. Verbale und Graphische Mittel, die zur Problembeschreibung und -veranschaulichung verwendet werden, bilden jedoch meist eine reichhaltige Quelle für den Entwurf von formalen Problembeschreibungssprachen. Jede Automatisierung sollte deshalb damit beginnen, die Kommunikationsformen zu studieren und zu formalisieren, mit denen Fachleute des betreffenden Gebiets Probleme beschreiben.

Die Aufteilung der Arbeit zwischen Benützer und System und der Entscheid für eine Problembeschreibungssprache oder eine Notation sind die wesentlichen Aufgaben bei der

Wahl eines Interaktionsmodells. Entsprechend den zwei genannten Möglichkeiten der Arbeitsteilung lassen sich für geometrische Konstruktionsaufgaben zwei Interaktionsmodelle unterscheiden, die im Folgenden untersucht werden.

3.2. Konstruktives Interaktionsmodell

Mit dem Begriff "konstruktives Interaktionsmodell" wird hier eine Vorstellung über die Interaktion (siehe 1.4.) bezeichnet, die sich auf eine Analogie zur graphischen Konstruktionsmethode stützt.

3.2.1. Idee

Die Entwickler von Benützerschnittstellen für die interaktive Erfassung geometrischer Daten gehen normalerweise davon aus, dass die potentiellen Benützer Erfahrung im Konstruieren mit Zirkel, Lineal und ähnlichen Zeicheninstrumenten besitzen. Sie nützen dieses Anwenderwissen für die Interaktionsgestaltung aus, indem sie mit elektronischen Mitteln *manuelle Konstruktionswerkzeuge simulieren.* Die Kommunikation zwischen Benützer und System wird damit auf einer erweiterten Notation der graphischen Konstruktionsmethode aufgebaut.

Ein System mit dem konstruktiven Interaktionsmodell bietet eine mehr oder weniger umfangreiche Sammlung von *Grundkonstruktionen* an. Daraus kann der Benützer Befehle und Befehlsfolgen auswählen, um Konstruktionsaufgaben zu lösen. Das Befehlsangebot kann dabei die Form eines Menüs oder einer Befehlssprache haben. Abbildung 3-1 zeigt ein (fiktives) Beispiel für ein Menü.

Bei der Simulation der manuellen Konstruktionsinstrumente lassen sich gewisse Beschränkungen dieser Instrumente durch die erweiterten Möglichkeiten des Computers vermeiden. So können etwa für häufig vorkommende Konstruktionen, wie Parallelverschiebungen, Winkelhalbierungen oder verschiedene Tangentenkonstruktionen, eigene Befehle vorgesehen werden.

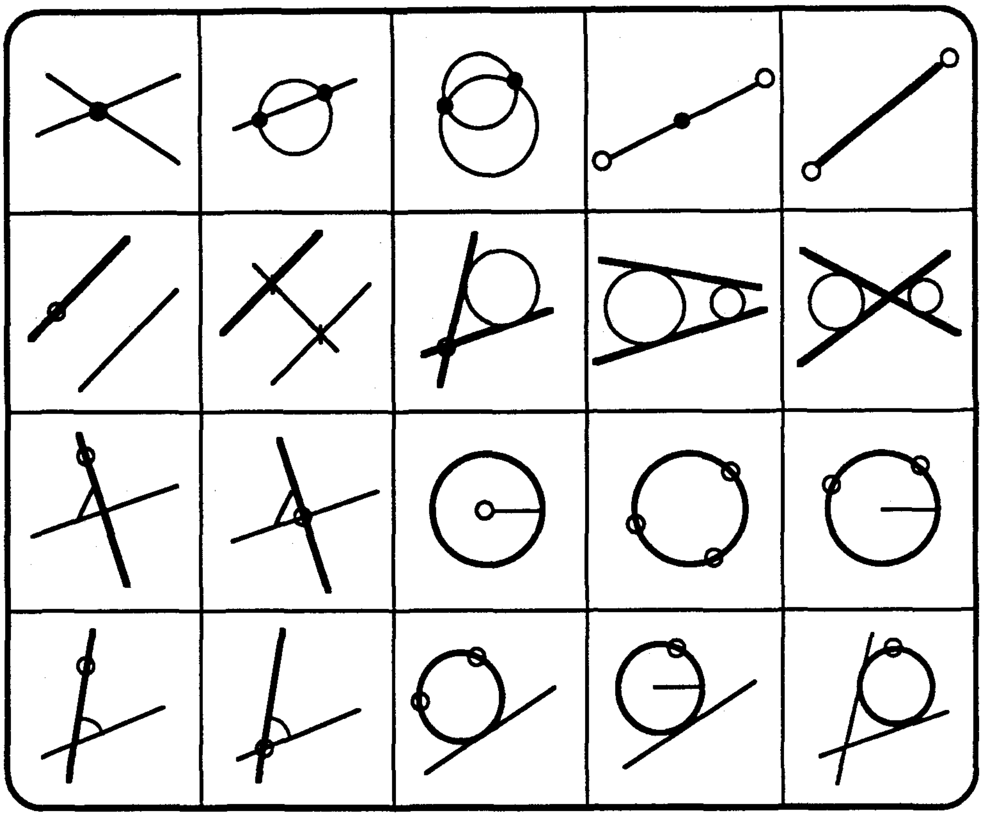

Abbildung 3-1: Typisches Menü eines konstruktiven Systems

3.2.2. Arbeitsteilung zwischen Benützer und System

Das konstruktive Interaktionsmodell überlässt drei der vier Problemlösungsphasen bei geometrischen Konstruktionsaufgaben dem Benützer. Dieser muss sich die Aufgabe veranschaulichen, einen Konstruktionsplan entwickeln, dem System den Plan mitteilen und sich von der Korrektheit der Lösung überzeugen. Der Aufbau der Interaktion auf der graphischen Notation führt also zu einer Arbeitsteilung, bei welcher der Benützer die Konstruktionsaufgaben löst und dabei vom System in unterschiedlichem Masse unterstützt werden kann:

1. Phase: Verstehen und Beschreiben einer Konstruktionsaufgabe
Eine *graphische Darstellung* der Ausgangslage durch das System kann die Problemveranschaulichung unterstützen. Der Benützer ersieht daraus die bestehenden geometrischen Elemente und kann allenfalls deren Eigenschaften und Beziehungen abfragen. Die gesuchten geometrischen Elemente lassen sich aber nicht veranschaulichen, da ein Element erst darstellbar ist, wenn seine Form, Grösse und Lage bestimmt sind. Zu deren Veranschaulichung muss der Benützer deshalb eine separate Skizze anfertigen.

Das konstruktive Interaktionsmodell sieht *keine Problembeschreibungssprache* vor, mit welcher Konstruktionsaufgaben als Aufgaben beschrieben werden könnten. Der Benützer kann somit die Bedingungen der Aufgabenstellung nicht als solche beschreiben, sondern muss sie ausserhalb des Systems in Konstruktionsbefehle umsetzen.

2. Phase: Ausarbeiten eines Konstruktionsplans

Das konstruktive Interaktionsmodell verlangt vom Benützer, Konstruktionsaufgaben am System *vorwärts* zu bearbeiten. Ein Rückwärtsarbeiten zur Planung von Konstruktionsschritten wird nicht unterstützt. Immerhin kann die Planung erleichtert werden durch die Möglichkeit, von einem Zustand aus *versuchsweise* verschiedene Folgen von Konstruktionsschritten auszuführen.

Die Anzahl der für die Lösung einer Aufgabe *erforderlichen Operationen* lässt sich durch ein breites Angebot an Grundkonstruktionen verkleinern. Je umfassender dieses Angebot ist, umso kürzer werden die Lösungswege und kurze Lösungswege sind einfacher zu planen als lange. Im Idealfall besteht für die Lösung einer Aufgabe ein eigener Befehl, womit eine Planung entfällt. Selbst bei einem umfassenden Befehlsangebot kommen aber häufig Aufgaben vor, die eine Planung erfordern.

Beispiel: Zwei Punkte einer Trassierungslinie sind durch ein Geradenstück gegebener Länge und einen Kreisbogen mit gegebenem Radius zu verbinden.

Die Vielfalt möglicher Bestimmungsarten für geometrische Elemente ist derart gross, dass die *Menge von Befehlen* sehr umfangreich werden kann. Dadurch wird ein System unübersichtlich und schwierig zu erlernen und zu benützen. Diesem Nachteil begegnen die Systementwickler durch die Gruppierung von Befehlen, z.B. nach der Art des zu konstruierenden Elements (Punkt, Gerade, Kreis, Spline usw.). Doch solche Befehlsgruppen können ihrerseits umfangreich werden. So enthält etwa das Menü in Abbildung 3-1 zehn verschiedene Befehle zur Definition einer Geraden. Handelsübliche CAD-Systeme bieten teilweise mehrere Dutzend Befehle zur Definition eines Elements an.

Es gibt auch eine entgegengesetzte Möglichkeit, die Planung von Konstruktionsschritten zu erleichtern: Bei einer *sehr kleinen Befehlsmenge* lassen sich alle Folgezustände gemeinsam darstellen, die aus dem jeweiligen Zustand durch Anwendung aller zulässigen Operationen entstehen. Dies entspricht einer Art "graphischen Menüs", das nicht nur die möglichen Befehle, sondern auch deren Ergebnisse darstellt, d.h. einen Ausschnitt aus dem Problemraum einer Aufgabe zeigt. Die Wahl eines Konstruktionsschritts ist damit auf die Auswahl eines Folgezustands zurückgeführt. Eine interessante Realisierung dieses Ansatzes ist die Interaktion mit "Snap-Drag" im System Gargoyle [Bier & Stone 1986].

3. Phase: Ausführen des Konstruktionsplans
In dieser Phase des eigentlichen Konstruierens erlaubt das konstruktive Interaktionsmodell eine *umfassende Unterstützung*. Da die Notation geometrischer Grundkonstruktionen dem Benützer vertraut ist, lässt sich das Befehlsangebot verständlich gestalten. Der Benützer braucht nicht in einer besonderen Computersprache ausgebildet zu werden, wenigstens nicht für die Verwendung von Grundkonstruktionen. Er kann einfach nachvollziehen, was in den einzelnen Schritten geschieht, besonders wenn die jeweiligen Zwischenzustände sofort graphisch dargestellt werden.

4. Phase: Beurteilen der Lösung
Wenn die Bedingungen einer Aufgabenstellung in eine Folge von Konstruktionsschritten umgesetzt werden, ist der *Benützer dafür verantwortlich*, dass sie tatsächlich eingehalten werden. Das System kann die Korrektheit der Lösung nicht beurteilen, da es die Bedingungen nicht kennt. Es kann aber die Abfrage von Kontrollmassen ermöglichen, mit denen der Benützer die Einhaltung von Bedingungen überprüfen kann.

Eine *graphische Darstellung* der Lösung erleichtert die Beurteilung ebenfalls, da sich viele Eigenschaften und Beziehungen (z.B. Berührungen, Rechtwinkligkeit oder Parallelität) durch Anschauung beurteilen lassen. Wenn die Ergebnisse jedes Konstruktionsschritts dargestellt werden, kann der Benützer allfällige Fehler frühzeitig erkennen und korrigieren. Da manche Grundkonstruktionen (z.B. Tangentenkonstruktionen) mehrfache Lösungen haben, muss eine Möglichkeit bestehen, die gewünschte Lösung aus mehreren Varianten auszuwählen. Dies wird durch eine graphische Unterstützung ebenfalls vereinfacht.

3.2.3. Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben

In der Ingenieurpraxis - besonders in der Vermessung - kommen häufig Konstruktionsaufgaben mit Bedingungen über *Bogenlängen* von Kurvenstücken oder *Flächeninhalte* von Gebieten vor.

Beispiele: (a) Die in 3.2.2. erwähnte Trassierungsaufgabe, jedoch mit gegebener Kreisbogenlänge statt gegebenem Radius.
(b) Eine Parzellenteilung mit einer Flächenbedingung.

Da die Notation graphischer Konstruktionen weder die Bogenlänge noch den Flächeninhalt als Konzepte enthält, müssen in Systemen mit dem konstruktiven Interaktionsmodell besondere Befehle dafür vorgesehen werden. Diese können aber wegen der unbegrenzten Kombinationsmöglichkeiten von Bedingungen nur Spezialfälle behandeln.

Ein weiterer Mangel des konstruktiven Interaktionsmodells ist die Unmöglichkeit, *unter- oder überbestimmte Aufgaben* zu behandeln. Bei jedem Konstruktionsschritt muss die richtige Anzahl Bestimmungsstücke für die zu erzeugenden Elemente angegeben werden. Bei einer komplexen Aufgabe ist es jedoch schwierig, überhaupt festzustellen, ob sie bestimmt, unter- oder überbestimmt ist. Das konstruktive Interaktionsmodell unterstützt weder diese Feststellung noch die Behandlung von allfällig unter- oder überbestimmten Aufgaben.

Bei *Überbestimmung* muss der Benützer einen notwendigen und hinreichenden Satz von Bestimmungsstücken auswählen. Lässt er dabei Angaben weg, so verliert er Genauigkeit und Kontrollmöglichkeiten. Andernfalls muss er die Angaben in mehreren Gruppen verarbeiten oder vor der Konstruktion durch eine Datenaufbereitung geeignet reduzieren. Solche Beschränkungen wirken sich oft negativ auf die Erhebung der Daten im Feld aus.

Beispiel: In der klassischen Parzellarvermessung werden bei Detailaufnahmen "Aufnahmeelemente" und "Kontrollmasse" unterschieden. Die Aufnahmeelemente werden ihrerseits in Gruppen eingeteilt, welche die Detailpunkte eindeutig bestimmen.

Im Falle einer *Unterbestimmung* wäre einfacher zu erkennen, wo zusätzliche Angaben notwendig sind, wenn das System die noch bestehenden Freiheitsgrade sichtbar machen könnte. Dies ist aber mit dem konstruktiven Interaktionsmodell nicht möglich, da ein darzustellendes Element keine Freiheitsgrade mehr besitzen darf.

Beispiele: (a) In der Vermessung möchte man eine Absteckung für ein Bauprojekt zuerst skizzenhaft entwerfen können, dann die Feldarbeit durchführen und schliesslich anhand der Messungen den Entwurf bereinigen.

(b) Beim Entwurf von Leitungsnetzen oder Linienführungen sollte der allgemeine Verlauf projektiert werden können bevor detaillierte Dimensionierungen und andere metrische Angaben vorliegen.

Schliesslich kommen in Entwurfsaufgaben manchmal metrische Bedingungen vor, die für eine Masszahl nicht einen bestimmten Wert, sondern eine untere oder obere *Schranke* festlegen. Durch Konstruktionsschritte lassen sich aber nur Gleichheitsbedingungen auswerten, wodurch in solchen Fällen suboptimale Lösungen entstehen können.

Beispiel: In der Aufgabe von Kapitel 2 musste die Minimalbedingung für die Fahrbahnbreite durch einen festen Wert ausgedrückt werden.

3.2.4. Zusammenfassung

Mit dem konstruktiven Interaktionsmodell kann die Lösung elementarer, wohldefinierter und eindeutig bestimmter Konstruktionsaufgaben unterstützt werden. Die automatische Ausführung von Konstruktionsschritten ersetzt die aufwendige manuelle Zeichenarbeit, ohne dass die vertraute Notation der geometrischen Grundkonstruktionen aufgegeben werden muss. Ein konstruktives System dient dem Benützer somit als effizientes, genaues und flexibles *Zeicheninstrument.*

Durch die Anlehnung an die graphische Konstruktionsmethode werden aber gewisse *Beschränkungen* vom manuellen auf das computergestützte Konstruieren übertragen. Bei komplexen, unter- oder überbestimmten Aufgaben sind die Möglichkeiten eines konstruktiven Systems eng begrenzt. Die Analogie zur graphischen Methode ist zudem *unvollständig*: Die Konstruktionsmittel werden simuliert, aber für die Phasen der Problembeschreibung und Planung, insbesondere für das Skizzieren, werden keine Mittel angeboten.

Die Bedingungen der Aufgabenstellung können nicht als solche in die Konstruktion eingehen. Sie werden durch den Benützer oder das System ausgewertet und sind danach nur implizit in den berechneten Ergebnissen vorhanden, z.B. in Form von Koordinaten. Das Ergebnis einer geometrischen Konstruktion erhält dadurch den Charakter einer *"elektronischen Zeichnung"* statt den eines geometrischen Modells. Im Vergleich zu einer herkömmlichen Zeichnung fehlt jedoch die Möglichkeit, gewisse Bedingungen graphisch festzuhalten, etwa durch Symbole für gestreckte oder rechte Winkel.

3.3. Deskriptives Interaktionsmodell

Dem konstruktiven wird hier das deskriptive Interaktionsmodell als Alternative gegenübergestellt. Auch dieses stützt sich auf das herkömmliche Vorgehen beim geometrischen Konstruieren. Die Analogie wird aber nicht in einer Lösungsmethode gesucht, sondern in der Beschreibung von Aufgabenstellungen. Das Interaktionsmodell ist deskriptiv in dem Sinne, dass es die Beschreibung von Konstruktionsaufgaben erlaubt und nicht die graphische oder numerische Lösungsmethode simuliert.

3.3.1. Idee

Ausgangspunkt für die Entwicklung des deskriptiven Interaktionsmodells ist die Erkenntnis, dass Konstruktionsaufgaben mit Hilfe von *Skizzen* und zusätzlichen *Bedingungen* beschrieben werden (siehe 2.2.). Moderne Arbeitsplatzrechner bieten Instrumente an, die Skizzen erfassen und die darin ausgedrückte Information automatisch weiterverarbeiten können. Die Kommunikationsform des Skizzierens, die sich zwischen Menschen entwickelt und bewährt hat, kann damit für die Interaktion von Mensch und Computer eingesetzt werden.

Das Skizzieren dient im deskriptiven Interaktionsmodell dazu, die *topologischen* Bedingungen von Aufgabenstellungen zu beschreiben. Es wird vorausgesetzt, dass bei jeder Aufgabe die topologischen Eigenschaften der Lösung bekannt sind und diese somit skizziert werden kann.

Neben der topologischen Information liefert eine Skizze auch genäherte *metrische* Angaben. Diese werden als metrische Bedingungen mit hoher Unsicherheit aufgefasst. Dadurch kann jede Konstruktionsaufgabe als überbestimmt angesehen werden: Die Skizze stellt eine genäherte Lösung dar (siehe 2.3.), und die explizit angegebenen metrischen Bedingungen sind *Präzisierungen.*

Zur Illustration des deskriptiven Interaktionsmodells zeigt die folgende Abbildung zwei mögliche Menüs für die Angabe von metrischen Bedingungen (siehe Kapitel 6).

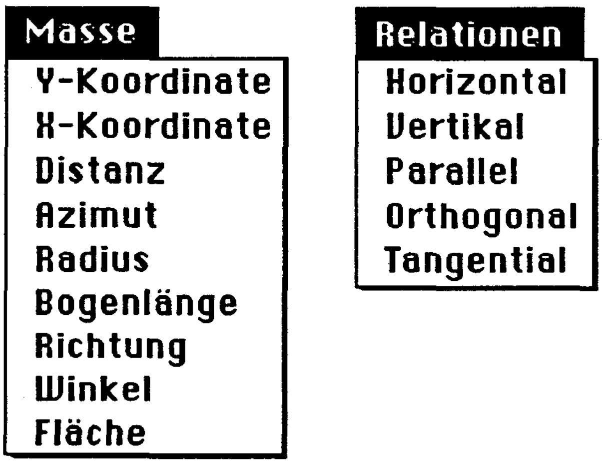

Abbildung 3-2: Menüs für die Angabe von metrischen Bedingungen

3.3.2. Arbeitsteilung zwischen Benützer und System

Beim deskriptiven Interaktionsmodell beschreibt der Benützer die Aufgabenstellung einer Konstruktionsaufgabe und überlässt die Lösung dem System. Für die Interaktion spielt deshalb die Phase der Problembeschreibung die entscheidende Rolle.

1. Phase: Verstehen und Beschreiben einer Konstruktionsaufgabe

Das deskriptive Interaktionsmodell erfordert eine Sprache, mit der geometrische Konstruktionsaufgaben vollständig beschrieben werden können. Diese soll die Bedingungen geometrischer Aufgabenstellungen ausdrücken können und dazu Ausdrucksmittel verwenden, die dem Benützer vertraut sind, insbesondere das Skizzieren. Eine solche *Problembeschreibungssprache* für geometrische Konstruktionsaufgaben wird in den nachfolgenden Kapiteln entworfen.

Geometrische Bedingungen, d.h. Aussagen über geometrische Eigenschaften und Beziehungen, sind das wesentliche Konzept im deskriptiven Interaktionsmodell. Sie erlauben eine *modulare Beschreibung* von Konstruktionsaufgaben, da sie unabhängig voneinander formuliert werden können. Im konstruktiven Interaktionsmodell müssen dagegen die einzelnen Grundkonstruktionen meist mehrere Bedingungen gleichzeitig erfüllen, um eine eindeutige Bestimmung für ein geometrisches Element zu erhalten.

Beispiel: Die drei Tangentenbedingungen der Aufgabenstellung in Kapitel 2 sind voneinander unabhängig. Eine Grundkonstruktion muss sie aber alle zusammen auswerten, um einen Kreis bestimmen zu können. Andere Grundkonstruktionen enthalten die gleichen Bedingungen in anderen Kombinationen.

Die Entkopplung von Geometrie-Beschreibungen durch Bedingungen vermeidet eine kombinatorische Vielfalt der Befehle, wie sie beim konstruktiven Interaktionsmodell auftritt. Es gelingt (siehe Kapitel 4), einen *Satz von elementaren Eigenschaften und Beziehungen* zu finden, mit dem sich alle Bedingungen in ebenen geometrischen Konstruktionsaufgaben formulieren lassen. Zur Illustration seien hier die Eigenschaften und Beziehungen angegeben, die für die zehn Bestimmungsarten von Geraden in Abbildung 3-1 genügen und zu anderen Bestimmungsarten kombiniert werden können:

- Inzident (Gerade durch Punkt)
- Parallel
- Orthogonal
- Tangential
- Abstandsmass
- Winkelmass.

2. und 3. Phase: Planen und Ausführen der Konstruktion

Das deskriptive Interaktionsmodell sieht eine *automatische Problemlösung* durch das System vor. Für den Benützer entfallen somit die Phasen der Planung und Ausführung einer Lösung. Er benötigt weder eine Planungssprache noch eine Notation und kann sich ganz auf das Ziel der Aufgabe und dessen Formulierung in der Problembeschreibungssprache konzentrieren. Wie das System aus einer Skizze und aus explizit angegebenen Bedingungen Gleichungssysteme erzeugt und diese löst, wird in Kapitel 4 gezeigt.

4. Phase: Beurteilen der Lösung

Das *System* sorgt für die Korrektheit der Lösung, d.h. dafür, dass die Bedingungen der Aufgabenstellung eingehalten werden. Wenn der Benützer die Bedingungen so formuliert, dass sie der Aufgabenstellung entsprechen, so darf er eine korrekte Lösung erwarten. Die Verwendung der Skizze als Näherungslösung führt dazu, dass das Lösungsverfahren unter normalen Umständen konvergiert und dass keine Mehrfachlösungen auftreten.

Wie beim konstruktiven Interaktionsmodell kann der Benützer auch hier die Lösung in einer graphischen Darstellung und durch *Abfrage von Kontrollmassen* beurteilen. Bereits während der Beschreibung einer Aufgabe können Eigenschaften und Beziehungen von geometrischen Elementen abgefragt werden, unabhängig davon, ob die Elemente erst skizziert oder bereits genauer bestimmt worden sind.

3.3.3. Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben

Es hängt von der Problembeschreibungssprache ab, welche Konstruktionsaufgaben mit dem deskriptiven Interaktionsmodell lösbar sind. Die auf der Differentialgeometrie und einer Parameterschätzung basierende Lösungsmethode bietet an sich die Möglichkeit, *beliebige* geometrische Modelle in der Ebene zu erzeugen.

Eine Konstruktionsaufgabe kann soweit beschrieben werden, wie es das vorhandene Wissen zulässt. Wenn zusätzliche Bedingungen anfallen, können sie den bisherigen hinzugefügt oder diese können verändert werden. Auch überschüssige und widersprüchliche Information hat in einer solchen Beschreibung Platz. *Unter- und Überbestimmungen* sind somit für das deskriptive Interaktionsmodell keine Spezialfälle, sondern die Regel. Schliesslich bieten auch Bedingungen, die auf Ungleichungen führen, keine Schwierigkeiten für die Interaktion.

3.3.4. Zusammenfassung

Die Analogie zur vertrauten Arbeitsweise des Konstrukteurs wird beim deskriptiven Interaktionsmodell durch eine Simulation der Mittel zur Problem*beschreibung*, nicht zur Problem*lösung*, erreicht. Die Skizze, als Mittel zur topologisch korrekten, gemeinsamen Darstellung von gegebenen und gesuchten Elementen, wird dabei durch eine verbale Beschreibung von metrischen Bedingungen ergänzt. Damit kann der Benützer auch komplexe geometrische Konstruktionsaufgaben vollständig beschreiben, ohne einen Lösungsweg angeben zu müssen. Er ist ganz von der Planung und Ausführung einer Lösung entlastet.

Ein striktes Nacheinander von Problembeschreibung, Lösung und Beurteilung erübrigt sich. Da jede Bedingung eine bereits vorliegende Näherungslösung präzisiert, kann sie vom System sofort ausgewertet und in ihrer Wirkung dargestellt werden. Dadurch wird der Interaktionsstil der *direkten Manipulation* [Hutchins et al. 1986] unterstützt: Der Benützer sieht unmittelbar die Wirkung jeder Bedingung und kann diese allenfalls ändern oder zurückziehen.

Der entscheidende Vorzug des deskriptiven Interaktionsmodells liegt aber darin, dass die Bedingungen der Aufgabenstellung nicht "vergessen" werden, nachdem sie in Koordinaten und andere Parameter umgesetzt sind. Sie bleiben als eigenständige Objekte im System erhalten und können ergänzt, verändert und weiterverwendet werden. Der Benützer kann damit eine explizite Beschreibung seines Wissens über eine Konstruktionsaufgabe - ein geometrisches Modell - erzeugen und editieren. Ein Konstruktionssystem mit dem deskriptiven Interaktionsmodell wird dadurch zum *Editor für geometrische Modelle*.

4. Analytische Beschreibung und Auswertung geometrischer Modelle

Geometrische Modelle lassen sich mit verschiedenen Mitteln beschreiben. In diesem Kapitel werden die Mittel für eine *analytische* Beschreibung und für eine Auswertung zusammengestellt. Die Definition der *logischen* Beschreibungsmittel im folgenden Kapitel wird sich darauf stützen und ihrerseits den Entwurf eines Geometrie-Editors für die *interaktive* Beschreibung geometrischer Modelle vorbereiten.

Für die analytische Beschreibung werden zuerst *Punkte und Kurven* als geometrische Elemente eingeführt. Deren Eigenschaften und Beziehungen lassen sich mit der Differentialgeometrie, insbesondere der Kurventheorie, vollständig erfassen (4.1.). Dann werden *Gleichungen und Ungleichungen* in den differentialgeometrischen Parametern als analytische Form geometrischer Bedingungen definiert (4.2.) und *Varianzen* als Mass für deren Unsicherheit eingeführt (4.3.). Zur Auswertung von geometrischen Bedingungen, d.h. zur Lösung der Systeme von Gleichungen und Ungleichungen, wird eine *Ausgleichung* nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgeschlagen (4.4.).

4.1. Punkte und Kurven als geometrische Elemente

Alle ebenen geometrischen Gebilde bestehen aus Zusammensetzungen von Punkten und Kurven. Die Elemente eines ebenen geometrischen Modells sind somit Punkte (4.1.1.) und Kurven (4.1.2.), die bestimmte Beziehungen zueinander haben (4.1.3.). Sie werden hier mit den Mitteln der Kurventheorie [Kreyszig 1968] definiert.

4.1.1. Punkte

Punkte sind die einfachsten geometrischen Objekte. Die Menge Π aller Punkte $P_1, P_2, \ldots$ bildet die *Ebene* $\Re^2$:

$$P_1, P_2, \ldots \in \Pi = \Re^2$$

Alle Punkte seien Endpunkte von Ortsvektoren $\mathbf{r} = (x,y)$ in einem *kartesischen Koordinatensystem.*

Durch die Funktion

$$d(P_i,P_k) = \sqrt{[(x_k-x_i)^2 + (y_k-y_i)^2]}$$

wird der *Abstand* zweier Punkte $P_i(x_i,y_i)$ und $P_k(x_k,y_k)$ definiert. Diese Abstandsdefinition erfüllt alle Voraussetzungen einer *Metrik,* d.h. sie ist eine Abbildung von Punktepaaren auf die nicht-negativen reellen Zahlen:

$d: \Pi \times \Pi \rightarrow \Re_0^+$ mit den Eigenschaften

$d(P_1,P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

$d(P_1,P_2) = d(P_2,P_1)$: Symmetrie

$d(P_1,P_2) + d(P_2,P_3) \geq d(P_1,P_3)$: Dreiecksungleichung.

Die Einführung einer Metrik macht die Ebene $\Re^2$ zu einer *metrischen Ebene*, in der Längen, Winkel und Flächeninhalte "messbar" sind (siehe 4.1.3.).

Die metrische Ebene wird *topologisiert* durch die Definition von offenen Punktmengen. Eine Punktmenge in der Ebene heisst offen, wenn mit jedem ihrer Punkte eine ε-Umgebung um den Punkt in der Punktmenge enthalten ist. ε-Umgebungen sind offene Kreisscheiben um die Punkte $P \in \Pi$ mit dem Radius $\varepsilon > 0$ und somit selbst offene Punktmengen:

$$U(P,\varepsilon) = \{Q \mid Q \in \Pi, d(P,Q) < \varepsilon\}$$

Eine Abbildung f der Ebene $\Re^2$ auf sich selbst ist *stetig*, wenn es für alle Punkte P zu jeder ε-Umgebung V von $f(P)$ eine ε-Umgebung U von P gibt, die ganz in V abgebildet wird. Stetige Abbildungen, die bijektiv sind und eine stetige Inverse haben, heissen *topologische Abbildungen.* Dafür wird auch der anschaulichere Begriff der elastischen Verformungen verwendet.

Der Begriff der topologischen Abbildung erlaubt, die in Kapitel 2 ohne Definition verwendeten Begriffe der topologischen und metrischen Eigenschaften und Beziehungen zu definieren: Eine geometrische Eigenschaft oder Beziehung heisst *topologisch,* wenn sie bei topologischen Abbildungen erhalten bleibt, andernfalls heisst sie *metrisch.*

4.1.2. Kurven

Zur Beschreibung von Kurven in der Ebene diene die *Parameterdarstellung*. Die Ortsvektoren der Punkte eines ebenen *Kurvenstücks* werden dabei durch eine eineindeutige, hinreichend oft stetig differenzierbare Abbildung

$$c: t \rightarrow \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

eines abgeschlossenen Intervalls

$$t_a \leq t \leq t_b$$

dargestellt.

Die Bildmenge einer solchen Funktion c heisst ebene *Kurve*, wenn es zu jedem ihrer Punkte eine Umgebung in der Bildmenge gibt, deren Punkte als Kurvenstück dargestellt werden können. Alle Kurven seien *einfach*, d.h. ohne mehrfache Punkte. Sie werden *orientiert* durch den Durchlaufsinn, der sich aus zunehmenden Werten im Parameterintervall ergibt.

Die Verwendung der *Bogenlänge* s als Parameter vereinfacht die Darstellung vieler Eigenschaften. Die Bogenlänge heisst auch *natürlicher Parameter* einer Kurve. Die Parameterdarstellung einer Kurve durch die Bogenlänge ist

$$C: s \rightarrow \mathbf{r}(s) = (x(s), y(s)) \quad \text{mit } s_a \leq s \leq s_b$$

Der *Tangentenvektor* in einem Kurvenpunkt ist die erste Ableitung $\mathbf{r}'(s)$ des Ortsvektors nach der Bogenlänge. Er ist ein Einheitsvektor und gibt den *Richtungswinkel* $\varphi(s)$ der Kurve im Kurvenpunkt $\mathbf{r}(s)$ an. Seine Komponenten sind somit

$$x'(s) = \cos\varphi(s)$$

$$y'(s) = \sin\varphi(s)$$

Der *Krümmungsvektor* in einem Kurvenpunkt ist die zweite Ableitung $\mathbf{r}''(s)$ des Ortsvektors nach der Bogenlänge. Er steht orthogonal zum Tangentenvektor, ist im allgemeinen aber kein Einheitsvektor. Seine Komponenten sind

$$x''(s) = -\sin\varphi(s)\, d\varphi(s)/ds$$

$$y''(s) = \cos\varphi(s)\, d\varphi(s)/ds$$

Der Betrag des Krümmungsvektors

$$\kappa(s) = |\mathbf{r}''(s)|$$

ist die *Krümmung* in einem Kurvenpunkt. Für die Krümmung mit Vorzeichen gilt die Differentialgleichung

$$\kappa(s) = d\varphi(s)/ds$$

Parameterdarstellungen hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab. Mit Hilfe der Krümmung ist es möglich, Kurven unabhängig von Koordinaten zu beschreiben. Gemäss dem Hauptsatz der Kurventheorie sind Form und Grösse einer ebenen Kurve eindeutig bestimmt durch die Angabe der ***Krümmungsfunktion*** $\kappa(s)$, wenn $\kappa(s)$ im betrachteten Intervall $s_a \leq s \leq s_b$ stetig ist. Die Gleichung

$$\kappa = \kappa(s)$$

wird als *natürliche Gleichung* der Kurve bezeichnet.

Ohne die praktische Anwendbarkeit der Modellierung einzuschränken, werden im Folgenden nur Kurven betrachtet, für welche die Krümmungsfunktion ein Polynom n-ten Grades ist:

$$\kappa(s) = c_0 + c_1 s + ... + c_n s^n$$

Bei Vorgabe der natürlichen Gleichung einer Kurve lassen sich durch zweimalige Integration der Differentialgleichung

$$\kappa(s) = d\varphi(s)/ds$$

alle Eigenschaften der Kurve sowie ihre Tangenten- und Ortsvektoren bestimmen. Zuerst ergibt sich für den Richtungswinkel der Kurve

$$\varphi(s) = \int \kappa(s)\, ds + \varphi_0$$

und dann, durch Einsetzen in

$$x'(s) = \cos\varphi(s)$$

$$y'(s) = \sin\varphi(s)$$

die Parameterdarstellung

$$x(s) = \int \cos(\int \kappa(s)\, ds + \varphi_0)\, ds + x_0$$

$$y(s) = \int \sin(\int \kappa(s)\, ds + \varphi_0)\, ds + y_0$$

Die Integrationskonstanten x_0, y_0 und φ_0 lagern die Kurve im Koordinatensystem. Sie entsprechen den drei Freiheitsgraden für Bewegungen der Kurve in der Ebene: zwei Translationen und eine Rotation. (x_0, y_0) heisst deshalb *Bezugspunkt* und φ_0 *Bezugsrichtung* der Kurve.

Die meisten geometrischen Objekte von praktischem Interesse für den Ingenieur können durch Kurvenstücke mit *linearen* Krümmungsfunktionen und deren Zusammensetzungen zu kubischen Splines modelliert werden [Farouki & Hinds 1985]. In raumbezogenen Informationssystemen spielen Splines allenfalls eine Rolle für graphische Darstellungen. Für die geometrische Modellierung von Objekten werden jedoch fast ausschliesslich Geraden und Kreise verwendet, gelegentlich auch Klothoiden. Deshalb wird hier auf Splines verzichtet. Eine ausführliche Behandlung von Geraden, Kreisen und Klothoiden findet sich in [Krasznai 1988].

4.1.3. Beziehungen von Punkten und Kurven

Die *topologischen* Beziehungen von geometrischen Elementen ergeben sich, wenn Punkte und Kurven als spezielle Punktmengen in der Ebene aufgefasst werden. Punktmengen, die einen nicht leeren Durchschnitt haben, sind *inzident* [Naas & Schmid 1979]. Für voneinander verschiedene Punkte und Kurven sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Ein Punkt ist mit einer Kurve inzident, wenn er auf dieser liegt.
- Zwei Kurven sind inzident, wenn sie gemeinsame Punkte haben. Jeder gemeinsame Punkt zweier Kurven ist seinerseits inzident mit beiden Kurven.

Die *metrischen* Beziehungen von Punkten und Kurven ergeben sich, wenn die Ebene als eine spezielle Fläche im Raum aufgefasst wird. Bei Vorliegen einer Metrik (siehe 4.1.1.) sind dann Längen, Winkel und Flächeninhalte messbar:

Die *Länge l* des Stücks einer Kurve $\mathbf{r}(s)$ zwischen zwei Kurvenpunkten lässt sich mit den Bogenlängen s_i und s_k der Kurve in diesen Punkten ausdrücken:

$$l = s_k - s_i$$

Der (orientierte) *Winkel* ω zwischen zwei Kurven $\mathbf{r}_i(s)$ und $\mathbf{r}_k(t)$ in einem gemeinsamen Punkt $\mathbf{r}_i(s^*) = \mathbf{r}_k(t^*)$ ist die Differenz der Richtungswinkel der Kurven in diesem Punkt:

$$\omega = \varphi(t^*) - \varphi(s^*)$$

Ein gemeinsamer Punkt zweier Kurven ist ein *Berührungspunkt*, für

$$\omega = 0, \pi$$

andernfalls ist er ein *Schnittpunkt*.

Der *Flächeninhalt* eines einfach zusammenhängenden Bereichs der Ebene, dessen Rand sich aus endlich vielen Kurvenstücken S_i $(i = 1,..,n)$ zusammensetzt, ergibt sich als Summe der Sektorflächen

$$2I = \pm \int [y(s)x'(s) - x(s)y'(s)]ds$$

die diese Kurvenstücke mit dem Ursprung bilden. Das Vorzeichen richtet sich danach, ob der Bereich links oder rechts der Kurvenstücke liegt. Wenn der Rand nur durch Geraden gebildet wird, entsteht daraus als Spezialfall die Gauss'sche Flächenformel in den Koordinaten der Eckpunkte:

$$2F = \pm \sum y_i(x_{i-1} - x_{i+1})$$

Längen oder Flächeninhalte von *zusammengesetzten geometrischen Objekten* können als Linearkombinationen von Längen von Kurvenstücken oder Flächeninhalten von Bereichen dargestellt werden: Diese sind *Inhalte* von Teilmengen des $\Re^2$ (im Sinne der Masstheorie [Halmos 1974]) und somit additiv. Bei disjunkten Teilmengen A und B des $\Re^2$

(Kurvenstücken oder Bereichen) gilt für ein Längen- oder Flächeninhaltsmass μ:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

$$\mu(cA) = c\mu(A)$$

Abstände sind Längen von speziellen Geradenstücken. Der Abstand d zweier Punkte (siehe 4.1.1.) entspricht der Länge des Geradenstücks zwischen diesen Punkten. Der Abstand e_p eines Punktes $P(x,y)$ von einer Kurve $r(s) = (x(s),y(s))$ ist der Abstand des Punkts P von jenem Kurvenpunkt, in dem die Funktion

$$z_p(s) = [x(s) - x]^2 + [y(s) - y]^2$$

ihr Minimum annimmt. Falls der Punkt P mit der Kurve inzident ist, so gibt es eine Bogenlänge s^*, für die

$$z_p(s^*) = 0$$

gilt.

Der Abstand e_c zweier Kurven $r_i(s) = (x_i(s),y_i(s))$ und $r_k(t) = (x_k(t),y_k(t))$ ist der Abstand eines Punkts auf der einen von einem Punkt auf der anderen Kurve, so dass die Funktion

$$z_c(s,t) = [x_i(s) - x_k(t)]^2 + [y_i(s) - y_k(t)]^2$$

ihr Minimum annimmt. Falls die Kurven einen gemeinsamen Punkt haben, so gibt es Bogenlängen s^* und t^*, für die

$$z_c(s^*,t^*) = 0$$

gilt.

Für eine *numerische Bestimmung* von Inzidenzen muss eine anwendungs- und implementationsabhängige Toleranz ε eingeführt werden:

$$z_p(s^*) < \varepsilon$$

$$z_c(s^*,t^*) < \varepsilon$$

Die beschränkte Genauigkeit der metrischen Daten und ihrer Darstellung im Computer führt dabei zu theoretischen und praktischen Schwierigkeiten [Frank & Kuhn 1986]. Bei der Beschreibung geometrischer Modelle durch Bedingungen werden Inzidenzen jedoch *explizit festgelegt:* Wenn ein Punkt auf einer Kurve liegen soll oder zwei Kurven einen gemeinsamen Punkt haben sollen, dann wird dies durch eine topologische Bedingung ausgedrückt. Wenn sich numerisch zusätzliche Inzidenzen ergeben, müssen diese durch eine Bedingung bestätigt werden. Das Problem einer rein numerischen Entscheidung stellt sich deshalb nicht.

4.2. Gleichungen und Ungleichungen als geometrische Bedingungen

Geometrische Bedingungen sind Aussagen über topologische und metrische Eigenschaften und Beziehungen von geometrischen Elementen. Solche Aussagen lassen sich analytisch durch *Gleichungen und Ungleichungen* formulieren. Deren Terme sind Konstanten, Variablen und Funktionsterme sowie Linearkombinationen davon.

Die *Konstanten* sind reelle Zahlen, z.B. Messwerte. Die *Variablen* stehen für die Parameter, mit denen in 4.1. Punkte und Kurven beschrieben wurden. Für jeden Punkt werden zwei Koordinaten (x, y), für jede Kurve die Parameter ihrer Krümmungsfunktion $(c_0, .., c_n; s_a, s_b)$ und ihrer Lage (x_0, y_0, φ_0) und für jeden ausgezeichneten Kurvenpunkt eine Bogenlänge (s) als Variablen eingeführt. Alle diese Parameter sind voneinander unabhängig, d.h. kein Parameter kann durch die anderen ausgedrückt werden.

Die *Funktionsterme* werden aus den Funktionen gebildet, mit denen in 4.1. die metrischen Eigenschaften und Beziehungen von Punkten und Kurven beschrieben wurden:

- Krümmung $\kappa(s)$ in einem Kurvenpunkt
- Richtungswinkel $\varphi(s)$ in einem Kurvenpunkt
- Koordinaten $x(s)$, $y(s)$ eines Kurvenpunkts
- Länge l eines Kurvenstücks zwischen zwei Punkten
- Winkel ω zweier Kurven in einem gemeinsamen Punkt
- Flächeninhalt f eines Bereichs
- Abstand d zweier Punkte
- Abstand e_p eines Punkts von einer Kurve
- Abstand e_c zweier Kurven.

Durch Linearkombinationen von Konstanten, Variablen und Funktionstermen können Gleichungen und Ungleichungen der Form

$$f_i(\mathbf{u}) = 0$$

$$g_j(\mathbf{u}) \leq 0$$

als geometrische Bedingungen aufgestellt werden. Der Vektor $\mathbf{u}$ enthält alle Variablen, zusammengefasst in den Teilvektoren $\mathbf{x}$ (Punktkoordinaten), $\mathbf{k}$ (Kurvenparameter) und $\mathbf{s}$ (Bogenlängen):

$$\mathbf{u}^T = (\mathbf{x}^T, \mathbf{k}^T, \mathbf{s}^T)^T$$

Die reellwertigen Funktionen f_i $(i = 1,..,n)$ und g_j $(j = 1,..,r)$ können in zwei Vektorfunktionen $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g}$ zusammengefasst werden. Die Systeme von Gleichungen und Ungleichungen für geometrische Bedingungen lauten dann

$$f(u) = 0$$

$$g(u) \leq 0$$

Da für jedes geometrische Modell eine genäherte Beschreibung in Form einer Skizze als bekannt vorausgesetzt wird, kann deren Information in das Gleichungssystem einbezogen werden. Für jede Variable u_k ergibt sich aus ihrem Näherungswert u_k^o eine Gleichung

$$u_k - u_k^o = 0$$

Dadurch wird das System $f(u) = 0$ immer *überbestimmt*, ausser im trivialen Fall, wo keine expliziten Bedingungen vorliegen.

4.3. Varianzen als Mass für die Unsicherheit von Bedingungen

Geometrische Bedingungen können mit Unsicherheit behaftet sein. In vielen Fällen weiss man aber nicht nur, dass eine Bedingung unsicher ist, sondern man kann auch ein *Mass der Unsicherheit* oder wenigstens eine Schätzung dafür angeben.

Analytisch bedeutet die Unsicherheit von Bedingungen, dass die Gleichungen und Ungleichungen

$$f(u) = 0$$

$$g(u) \leq 0$$

nicht exakt erfüllt sein müssen, sondern zu Vektoren **v** und **w** von (unbekannten) Abweichungen führen dürfen:

$$f(u) = v$$

$$g(u) \leq w$$

Beispiel: Eine Entwurfsbedingung, welche die Einhaltung einer Distanz von 10 Metern zwischen zwei Punkten verlangt, führt theoretisch auf die Gleichung

$$\sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]} - 10 = 0$$

Wenn die Bedingung nicht streng einzuhalten ist, sondern eine Abweichung v erlaubt, dann erhält die Gleichung die Form

$$\sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2]} - 10 = v$$

Die Beobachtung einer Distanz zwischen zwei Punkten hat naturgemäss eine beschränkte Genauigkeit und führt deshalb zur selben Gleichung. Die Abweichung v wird in der Vermessung als Verbesserung bezeichnet.

Die Abweichungen v und w der einzelnen Funktionswerte von null müssen beschränkt werden können. Das Mittel dafür liefert die Wahrscheinlichkeitstheorie: Die Abweichungen werden als *Zufallsvariablen* betrachtet, womit sie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen, die sich durch Erwartungswert und Varianz charakterisieren lässt. Für eine Zufallsvariable z mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2 gilt, unabhängig von der Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die *Tschebyscheff'sche Ungleichung* [van der Waerden 1957]. Danach ist die Wahrscheinlichkeit, dass z um mehr als einen konstanten Wert a vom Erwartungswert μ abweicht, höchstens σ^2/a^2 :

$$Pr(|z-\mu| \geq a) \leq \sigma^2/a^2$$

Von den Zufallsvariablen v und w wird verlangt, dass ihre Erwartungswerte verschwinden. Für eine Abweichung v (oder w) mit der Varianz σ_v^2 gilt dann

$$Pr(|v| \geq a) \leq \sigma_v^2/a^2$$

Durch Angabe einer *Varianz* zu einer Gleichung oder Ungleichung kann also die Abweichung v oder w beschränkt werden. Je kleiner die tolerierte Abweichung, umso kleiner ist die Varianz zu wählen. Die Varianz ist somit ein Mass für die Unsicherheit einer Bedingung.

Beispiel: Wenn die Abweichung v der erwähnten Distanz mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% nicht grösser als 0.1m sein soll, dann ist die Varianz $\sigma_v^2 = 0.0095m^2$ (bzw. $\sigma = 0.097m$) zu wählen.

Die analytische Beschreibung der Unsicherheit aller Bedingungen in einem Modell kann in Form von sogenannten *Kovarianzmatrizen* $\mathbf{K_v}$ und $\mathbf{K_w}$ für die Vektoren **v** und **w** erfolgen. Diese enthalten in den Diagonalen die Varianzen zu allen Bedingungen. Sie müssen als Diagonalmatrizen angenommen werden, da sich über die Kovarianzen der Abweichungen im allgemeinen keine Angaben machen lassen.

4.4. Auswertung geometrischer Bedingungen

Die Auswertung von geometrischen Bedingungen erfordert ein Verfahren zur Lösung überbestimmter Systeme von Gleichungen und Ungleichungen, das die Unsicherheit der Bedingungen berücksichtigen kann. Diesen Anforderungen genügt eine *Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate*. Zuerst wird der Fall behandelt, wo nur Gleichungen als Bedingungen auftreten (4.4.1.). Der Fall mit Ungleichungen lässt sich darauf zurückführen (4.4.2.). Das Kapitel schliesst mit einigen Bemerkungen zur numerischen Lösung (4.4.3.).

4.4.1. Lösung ohne Ungleichungen

Die Bedingungen in einem geometrischen Modell seien durch das überbestimmte Gleichungssystem $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ analytisch beschrieben. Dieses enthalte n, im allgemeinen nicht lineare, Gleichungen in u Unbekannten ($n>u$). Seine *linearisierte Form* an einer Näherungsstelle $\mathbf{u}^{(o)}$ ist

$$\mathbf{A}\Delta - \mathbf{l} = \mathbf{0}$$

mit den Bezeichnungen

$\mathbf{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{u}$ an der Stelle $\mathbf{u}^{(o)}$: die Koeffizientenmatrix

$\Delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(o)}$: der Vektor mit den verkürzten Parametern

$\mathbf{l} = -\mathbf{f}(\mathbf{u}^{(o)})$: der Vektor mit den Absolutgliedern.

Die u unabhängigen Gleichungen für die Näherungen der Parameter (siehe 4.2.) erlauben die Berechnung der Koeffizienten und Absolutglieder. Sie bewirken ausserdem, dass die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ den vollen Rang u hat.

Durch Einführung eines Vektors $\mathbf{v}$ mit n Zufallsvariablen, welche die Unsicherheit der Bedingungen modellieren (siehe 4.3.), entsteht aus dem überbestimmten ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit n linearen Gleichungen in $u+n$ Unbekannten:

$$\mathbf{A}\Delta - \mathbf{l} = \mathbf{v}$$

Die *Methode der kleinsten Quadrate* [Wolf 1968, Koch 1987] liefert eine einfach zu berechnende und statistisch interpretierbare Lösung dieses Systems. Sie minimiert ein Mass für die Gesamtheit der Abweichungen $\mathbf{v}$, nämlich die durch die euklidische Norm berechnete Länge des Vektors $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \mathbf{v}^T\mathbf{P}\mathbf{v} \rightarrow \text{Min.}$$

Die sogenannte Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$ muss dabei positiv definit sein, damit die Länge von $\mathbf{v}$ nicht negativ werden kann, ist im übrigen aber frei wählbar.

Aus dieser Minimum-Bedingung folgen durch Differentiation die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\Delta = \mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l}$$

und daraus eine Schätzung für die Parameter

$$\hat{\Delta} = \mathbf{Q}_u\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{l} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_u = (\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(o)} + \hat{\Delta}$$

Die Schätzung $\hat{\mathbf{u}}$ ist *eindeutig*, da $\mathbf{A}$ vollen Rang hat und $\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}$ somit regulär ist und eine eindeutige Inverse $\mathbf{Q}_u$ hat. Eine *Iteration* dieser linearen Lösung liefert die Lösung des nichtlinearen Systems. Die Iteration kann abgebrochen werden, sobald die Änderung der Parameter einen Grenzwert unterschreitet [Pope 1974].

Über die *Gewichtsmatrix* $\mathbf{P}$ lässt sich die Unsicherheit der Bedingungen berücksichtigen. Dazu wird $\mathbf{P}$ als Inverse der Kovarianzmatrix $\mathbf{K_v}$ (siehe 4.3.) gewählt. Aus den Normalgleichungen folgt, dass $\mathbf{P}$ nur bis auf einen konstanten Faktor bekannt sein muss. Für die Berücksichtigung der Unsicherheit müssen somit die Varianzen der Bedingungen nur bis auf einen unbekannten Varianzfaktor σ_0^2 angegeben werden:

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2\, \mathbf{K_v}^{-1}$$

Der Varianzfaktor kann aus den berechneten Abweichungen $\hat{\mathbf{v}}$ durch

$$\hat{\sigma}_0^2 = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} / (n-u)$$

geschätzt werden [Vanícek & Krakiwsky 1982]. Damit lässt sich eine Schätzung für die Kovarianzmatrix der Parameter berechnen:

$$\mathbf{K_{\hat{u}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q_u}$$

$\mathbf{K_{\hat{u}}}$ kann zur Beurteilung der gefundenen Lösung verwendet werden. Insbesondere lassen sich daraus *Fehlerellipsen* für Punkte bestimmen. Diese sind zweidimensionale Konfidenzintervalle für die berechneten Koordinatenpaare und zeigen den Grad der Bestimmung einzelner Punkte.

Die Grösse $(n-u)\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2$ hat bei *normalverteilten* Abweichungen $\mathbf{v}$ eine χ^2-Verteilung [Hamilton 1967]. Falls für σ_0^2 ein bestimmter Wert angenommen wurde, z.B. aufgrund von Beobachtungen mit bekannter Varianz, kann diese Annahme somit einem statistischen Test unterzogen werden. Ein negatives Testergebnis bedeutet, dass zwischen den Bedingungen Widersprüche auftreten, die sich bei der angenommenen Normalverteilung durch die angegebenen Varianzen nicht erklären lassen. Als Gründe dafür kommen zu grosse Widersprüche (z.B. infolge systematischer oder grober Fehler in Beobachtungen), zu klein gewählte Varianzen oder nicht normalverteilte Abweichungen in Frage.

Die Annahme normalverteilter Abweichungen ist in gewissen Fällen, z.B. bei Entwurfsbedingungen, fragwürdig. Zweifel an der Normalverteilung der Abweichungen beeinträchtigen aber nur die statistische Beurteilung der Lösung. Die Parameter selbst lassen sich mit der Methode der kleinsten Quadrate immer berechnen und minimieren die Abweichungen unabhängig von deren Verteilung. Die eigentliche Auswertung der Bedingungen ist also von der Annahme der Normalverteilung unabhängig.

4.4.2. Lösung mit Ungleichungen

Das Lösungsverfahren wird nun erweitert auf Fälle, bei denen die Bedingungen nicht nur Gleichungen, sondern auch Ungleichungen erzeugen. Die Grundidee ist, die Ungleichungen $\mathbf{g}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$ in Gleichungen umzuwandeln, und das Problem damit auf das bereits gelöste zurückzuführen. Um die Ungleichungen zu erfüllen, ist dabei ein zusätzlicher Iterationsprozess erforderlich.

Die Behandlung stützt sich auf die in [Lewis & Odell 1971] beschriebene und in [Bossler 1972] auf die Geodäsie angewandte Methode. Der vorliegende Fall ist allerdings in zweierlei Hinsicht speziell:

- Die Gleichungen $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ allein erlauben immer eine eindeutige Lösung. Dadurch erübrigt es sich, verallgemeinerte Inversen zu verwenden.
- Die Ungleichungen sind, wie die Gleichungen, mit Unsicherheit behaftet. Dadurch entsteht eine einheitliche Struktur, nachdem die Ungleichungen zu Gleichungen umgewandelt sind.

Zuerst werden die Ungleichungen $\mathbf{g}(\mathbf{u}) \leq \mathbf{0}$ analog zu den Gleichungen linearisiert:

$$\mathbf{B}\Delta - \mathbf{m} \leq \mathbf{0}$$

mit

$$\mathbf{B} = \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{u} \text{ an der Stelle } \mathbf{u}^{(o)}$$

$$\Delta = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(o)}$$

$$\mathbf{m} = -\mathbf{f}(\mathbf{u}^{(o)})$$

Dann werden die r linearisierten Ungleichungen durch einen Vektor $\mathbf{t}$ mit r zusätzlichen Unbekannten, sogenannten *Schlupfvariablen*, zu Gleichungen umgeformt:

$$\mathbf{B}\Delta + \mathbf{t} - \mathbf{m} = \mathbf{0}\,, \quad t_i \geq 0$$

Die Einführung des Vektors $\mathbf{w}$ mit den Zufallsvariablen für die Unsicherheit der Bedingungen führt zum Gleichungssystem

$$\mathbf{B}\Delta + \mathbf{t} - \mathbf{m} = \mathbf{w}\,, \quad t_i \geq 0$$

Zusammen mit den linearisierten Gleichungen

$$\mathbf{A}\Delta - \mathbf{l} = \mathbf{v}$$

und mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{A}^* = [\mathbf{A} \;\; \mathbf{0}]$$

$$\mathbf{B}^* = [\mathbf{B} \;\; \mathbf{E}]$$

$$\Delta^{*T} = [\Delta^T \; \mathbf{t}^T]^T$$

ergeben sich zwei Systeme gleicher Struktur

$$A^*\Delta^* - l = v$$

$$B^*\Delta^* - m = w$$

Mit den Bezeichnungen

$$C^T = [A^{*T}\ B^{*T}]^T$$

$$h^T = [l^T\ m^T]^T$$

$$z^T = [v^T\ w^T]^T$$

liegt nun dasselbe Problem vor, wie bei der Lösung mit Gleichungen allein,

$$C\Delta^* - h = z$$

wobei hier die Bedingungen für positive Schlupfvariablen hinzukommen:

$$\Delta_i^* \geq 0 \text{ für } i > u$$

Die Lösung beginnt mit der Berechnung von Δ^* ohne Berücksichtigung der Zusatzbedingungen für die Schlupfvariablen:

$$\hat{\Delta}^* = (C^T P^* C)^{-1} C^T P^* h \text{ mit } P^* = \sigma_0^2\ K_z^{-1}$$

Falls diese Schätzung positive Schlupfvariablen ergibt, ist sie offensichtlich die gesuchte Lösung.

Im allgemeinen ist aber ein iteratives Vorgehen nötig, um alle Zusatzbedingungen zu erfüllen. Das folgende Verfahren ist in [Lewis & Odell 1971] erläutert:

1. Schritt: Alle negativen Schlupfvariablen markieren.

2. Schritt: Für eine negative Schlupfvariable nach der andren das $(u+r-1)$-dimensionale System ohne den zugehörigen Parameter lösen.

3. Schritt: Für jeden Lösungsvektor aus Schritt 2, der die linearisierten Ungleichungen nicht erfüllt, eine Komponente nach der andren null setzen und das entsprechende $(u+r-2)$-dimensionale System lösen, falls nicht auch schon mit dem Nullsetzen dieser Komponente allein eine Lösung in Schritt 2 möglich war.

4. Schritt: Schritt 3 wiederholen für Kombinationen von drei nullgesetzten Parametern, von denen mindestens einer keine Lösung in Schritt 2 ergab und von denen nicht eine Teilmenge eine Lösung in Schritt 3 ergab. Ebenso verfährt man mit Kombinationen von vier und mehr Parametern, falls nötig. Es können sich mehrere Lösungen ergeben, die $\hat{z}^T P^* \hat{z}$ minimieren.

Dieses iterative Verfahren für die Behandlung von Ungleichungen bringt einen beträchtlichen Mehraufwand bei der Lösung und ist nur für eine kleine Zahl von Ungleichungen praktisch durchführbar. Die Implementation einer praktikablen Lösung würde weitere Untersuchungen erfordern. Techniken der nichtlinearen Optimierung [Bazaraa & Shetty 1979] wären möglicherweise effizienter, aber ebenfalls auf Iteration angewiesen. Eine vertretbare Vereinfachung ist, Bedingungen mit Ungleichungen vom Benützer durch solche mit Gleichungen ersetzen zu lassen. Dies erfordert ein interaktives Vorgehen nach Versuch und Irrtum, das dem besprochenen automatischen Verfahren jedoch kaum deutlich unterlegen ist. Es hat insbesondere den Vorteil, dass der Benützer eine gezielte Auswahl der Versuche treffen kann.

4.4.3. Numerische Durchführung

Eine automatische *Linearisierung* der Gleichungs- und Ungleichungssysteme während der Auswertung ist nicht nötig: Da die Funktionen f_i und g_i in 4.2. bis auf Linearkombinationen abschliessend aufgezählt sind, können sie bereits in linearisierter Form programmiert werden.

Bei der Berechnung der *Koeffizienten* in $\mathbf{A}$ und $\mathbf{l}$ sind die algebraischen Eigenschaften der verschiedenen geometrischen Parameter zu beachten. Besonders für Operationen mit Winkelmassen ist eine Implementation mittels abstrakter Datentypen [Liskov & Zilles 1977, Conzett 1988] geboten, um Schwierigkeiten mit Spezialfällen zu vermeiden.

Über numerische Verfahren zur Lösung von (Normal-) Gleichungssystemen besteht eine reichhaltige Literatur [Zurmühl 1964, Schwarz et al. 1972]. Ein Vergleich verschiedener Lösungsverfahren für unregelmässig *schwach besetzte Normalgleichungssysteme*, wie sie in unserem Fall auftreten, findet sich in [Steidler 1980]. Er fällt zugunsten direkter Techniken für schwach besetzte Matrizen [Duff & Reid 1976, Stark 1984] gegenüber dem iterativen Verfahren der konjugierten Gradienten [Schwarz 1970] aus. Gemäss einer vorangegangenen Untersuchung [Schek et al. 1977] ist für geodätische Probleme das Gradientenverfahren seinerseits allen anderen iterativen Methoden, z.B. der sukzessiven Überrelaxation, überlegen.

Bei einer *gesamthaften Ausgleichung* aller Bedingungen in einem geometrischen Modell können die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$ und der Vektor $\mathbf{l}$ in die Anteile der gewöhnlichen ($\mathbf{A}'$, $\mathbf{P}'$,$\mathbf{l}'$) und der Näherungs-Bedingungen ($\mathbf{E}$, $\mathbf{P_0}$,$\mathbf{0}$) zerlegt werden. Die Normalgleichungen lassen sich dann mit kleinerem Aufwand erzeugen [Schmid 1977]:

$$(\mathbf{A}'^T\mathbf{P}'\mathbf{A}' + \mathbf{P_0})\,\Delta = \mathbf{A}'^T\mathbf{P}'\mathbf{l}'$$

Verglichen mit gesamthaften Lösungsverfahren ergibt jedoch eine *schrittweise Ausgleichung* einen wesentlich geringeren Rechenaufwand und ermöglicht damit eine verbesserte Interaktion mit dem Benützer. Der gestaffelte Einbezug von Bedingungen drängt sich durch das interaktive Vorgehen bei der Angabe von Bedingungen (siehe

Kapitel 6) geradezu auf. Das Vorgehen bei einer sofortigen Auswertung jeder neuen Bedingung soll deshalb hier für den Fall ohne Ungleichungen gezeigt werden.

Eine allgemeine schrittweise Ausgleichung wird in [Schmid 1977] erläutert. Für das System

$$\mathbf{A}\Delta - \mathbf{l} = \mathbf{v} \text{ (Gewichtsmatrix } \mathbf{P}\text{)},$$

aufgebaut aus einzelnen linearen Gleichungen

$$\mathbf{a}^T\Delta - l = v \text{ (Gewicht p)},$$

lassen sich daraus folgende Formeln für den Schritt k ableiten:

$$\hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_{k-1} + \mathbf{g}_k(l_k - \mathbf{a}_k^T\hat{\Delta}_{k-1})$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{g}_k\mathbf{a}_k^T\,\mathbf{Q}_{k-1}$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{g}_k = \mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k(\pm p_k + \mathbf{a}_k^T\,\mathbf{Q}_{k-1}\mathbf{a}_k)^{-1}$$

Zur Initialisierung können die Näherungen $\mathbf{u}^{(o)}$ verwendet werden. Die Wahl des negativen Vorzeichens für das Gewicht ($-p_k$) erlaubt es, eingeführte Bedingungen später wieder zu *entfernen*. Diese Möglichkeit ist für den interaktiven Betrieb unentbehrlich. Die Iteration erfolgt bei jedem Schritt analog zu jener bei der gesamthaften Ausgleichung.

Die hervorstechende Eigenschaft dieser schrittweisen Lösung ist, dass keine Matrizen zu invertieren sind: Der zu invertierende Klammerausdruck in der Formel für $\mathbf{g}$ ist ein Skalar. Die verbleibenden Matrizen-Operationen sind nur Multiplikationen von Vektoren unter sich und mit Matrizen sowie Additionen von Matrizen. Allfällig auftretende Genauigkeitsverluste können mittels periodischer gesamthafter Ausgleichungen in Schranken gehalten werden.

5. Logische Beschreibung geometrischer Modelle

In diesem Kapitel wird eine Sprache für die logische Beschreibung ebener geometrischer Modelle entworfen: der *Geometrische Bedingungskalkül.* Aufbauend auf der analytischen Beschreibung soll dieser Kalkül die Grundlage schaffen für die im nächsten Kapitel zu entwerfende Interaktionssprache. Diese Zwischenstufe vor dem eigentlichen Interaktionsentwurf ist notwendig, um geometrische Modelle im Geometrie-Editor durch anwendungsnähere Sprachmittel als Gleichungen und Ungleichungen beschreiben zu können.

In einer Beschreibung geometrischer Modelle mit logischen Mitteln sind die geometrischen Elemente Individuen und die geometrischen Bedingungen Aussagen über diese Individuen. Der Geometrische Bedingungskalkül ist eine Sprache, um solche Aussagen zu formulieren. Er ist in die Prädikatenlogik (5.1.) eingebettet und erhält dadurch eine einfache Syntax (5.2.) sowie die Möglichkeit zur Definition von Erweiterungen in der Sprache selbst (5.3.). Als Anwendung (5.4.) wird die Konstruktionsaufgabe aus Kapitel 2 beschrieben.

5.1. Prädikatenlogik

Die Symbole und die Syntax des Geometrischen Bedingungskalküls stammen aus der Prädikatenlogik erster Ordnung mit Identität und Funktoren. Hier wird nur eine kurze Zusammenfassung der verwendeten logischen Konzepte gegeben. Ausführlichere Behandlungen der mathematischen Logik findet man z.B. in [Carnap 1960, Mendelson 1964, Mates 1978]. Eine anschauliche Einführung in die hier verwendete *Klauselform* der Prädikatenlogik und ihre Anwendung auf das computergestützte Problemlösen bietet [Kowalski 1979]. Die Programmiersprache Prolog [Clocksin & Mellish 1981] ist auf dieser Klauselform aufgebaut.

Die Klauselform der Prädikatenlogik bietet
- *Variablen* und *Konstanten* als Symbole für Individuen
- *Funktoren* als Symbole für Funktionen
- *Prädikate* als Symbole für Relationen
- *Junktoren* (Konjunktion "&", Disjunktion "V", Implikation "→") als logische Symbole.

Den Variablen und Konstanten können *Typen* zugeordnet werden, wenn verschiedene Arten von Individuen beschrieben werden sollen. Typen sind ein Mittel, um gewisse sinnlose Aussagen über Individuen zu verhindern, z.B. "Punkt P ist gleich Gerade G". Eine Sprache mit mehreren Typen heisst *mehrsortig*.

Ein *Term* ist eine Konstante, eine Variable oder eine Funktion von Termen. Wenn also

$t_1,\ldots,t_n$

Terme sind, und F das Symbol (der Funktor) für eine n-stellige Funktion, dann ist auch

$F(t_1,\ldots,t_n)$

ein Term.

Wenn $t_1,\ldots,t_n$ Terme sind und P das Symbol (Prädikat) für eine n-stellige Relation, dann ist

$P(t_1,\ldots,t_n)$

eine *atomare Formel* (kurz: *Atom*). Ein Atom sagt aus, dass für die Individuen $t_1,\ldots,t_n$ die Relation mit dem Symbol P gilt. Zweistellige Funktionen und Relationen können zur besseren Lesbarkeit in "infix" Form dargestellt werden.

Atome sind die einfachsten logischen Formeln. Allgemeine Formeln in der Klauselform der Prädikatenlogik heissen *Klauseln*. Wenn $A_1,\ldots,A_m$ und $B_1,\ldots,B_n$ Atome sind, dann ist

$A_1 \,\&\ldots\&\, A_m \rightarrow B_1 \vee\ldots\vee B_n$

eine Klausel. Klauseln verbinden Atome durch die Junktoren "&", "V" und "→", um auszudrücken, dass eine Reihe von Atomen zusammen eine Reihe von alternativen Atomen als Folgerung haben.

Eine spezielle Klasse von Klauseln bilden die *Hornklauseln,* deren Folgerung aus höchstens einem Atom besteht:

$A_1 \,\&\ldots\&\, A_m \rightarrow B$

$A_1 \,\&\ldots\&\, A_m$

Eine Hornklausel

$A_1 \,\&\ldots\&\, A_m$

bei der das Atom B leer ist, wird als *Aussage* bezeichnet. In Aussagen können die Konjunktionszeichen "&" weggelassen werden. $A_1,\ldots,A_m$ wird dann als Sammlung von Atomen (in beliebiger Reihenfolge) betrachtet.

5.2. Geometrischer Bedingungskalkül

Mit den Mitteln der Prädikatenlogik wird nun eine Sprache definiert, in welcher geometrische Modelle logisch beschrieben werden können. Da diese Modelle geometrische Bedingungen als Aussagen enthalten, wird die Sprache als *Geometrischer Bedingungskalkül* bezeichnet. Ein Kalkül ist eine formale Sprache, für die syntaktische Regeln gegeben sind [Carnap 1960]. Eine formale Semantik wird nicht angegeben, da die Bedeutung der verwendeten Symbole aus Kapitel 4 hervorgeht.

5.2.1. Anforderungen und Einschränkungen

Der Geometrische Bedingungskalkül soll die formale Beschreibung geometrischer Modelle auf einer *höheren Stufe* als jener der analytischen Beschreibung durch Gleichungen und Ungleichungen erlauben. Die Sprachmittel des Bedingungskalküls sind deshalb geometrische Grundbegriffe wie Punkte, verschiedene Kurvenformen, Koordinaten, Längen, Winkel, Flächeninhalte usw., anstelle der Polynomkoeffizienten, Bogenlängen usw. bei der analytischen Beschreibung.

Gegenüber der analytischen Beschreibung ist im Bedingungskalkül die Allgemeinheit der *Kurvenformen* beschränkt. Der Entscheid über das Angebot an Kurvenformen hängt vom Anwendungsgebiet ab. In einem raumbezogenen Informationssystem werden Geraden benötigt (in geographischen Anwendungen fast ausschliesslich), häufig auch Kreise (z.B. in der Grundbuchvermessung) und in gewissen Fällen Klothoiden (z.B. in der Trassierung). Kurven höherer Ordnung und Splines spielen hingegen kaum eine Rolle für geometrische Modelle in raumbezogenen Informationssystemen. Der Einfachheit halber seien deshalb die Kurvenformen des Bedingungskalküls auf *Geraden und Kreise* eingeschränkt. Aufgrund der nicht eingeschränkten analytischen Beschreibung kann jedoch ohne weiteres ein Kalkül mit zusätzlichen Kurvenformen definiert werden.

Für die meisten Anwendungen spielt die Orientierung von Geraden und Kreisen keine Rolle. Die Kurven des Bedingungskalküls seien deshalb *nicht orientiert*, im Unterschied zur analytischen Beschreibung. Die Werte von Richtungs- und Winkelmassen liegen damit alle zwischen 0 und π.

5.2.2. Individuen

Die Individuen im Geometrischen Bedingungskalkül stehen für geometrische Elemente und reelle Zahlen. Es wird deshalb eine mehrsortige Sprache mit entsprechenden *Typen* definiert. Alle Individuen haben einen der zwei Typen

Element

Skalar

Elemente haben zwei Untertypen, die ihre Dimension angeben:

Punkt

Kurve

Kurven gliedern sich nach ihrer Form in zwei weitere Untertypen:

Gerade

Kreis

Die Zuordnungen von Typen zu Individuen können als Bedingungen aufgefasst werden. Die Unterscheidung von Punkten und Kurven beschreibt eine topologische Bedingung, die Unterscheidung von Geraden und Kreisen eine metrische.

Als Symbole für Individuen bietet die Prädikatenlogik Variablen und Konstanten an. Im Bedingungskalkül sind *Variablen* durch Zeichenfolgen mit einem Kleinbuchstaben am Anfang und allenfalls nachfolgenden Ziffern dargestellt:

e, e0, e1, ... für Elemente

p, p0, p1, ... für Punkte

c, c0, c1, ... für Kurven

g, g0, g1, ... für Geraden

k, k0, k1, ... für Kreise

s, s0, s1, ... für Skalare.

Konstanten werden durch entsprechende Zeichenfolgen mit einem Grossbuchstaben am Anfang oder durch Zahlen bezeichnet.

5.2.3. Aussagen

Aussagen im Geometrischen Bedingungskalkül beschreiben geometrische Bedingungen, soweit diese nicht schon durch Typen erfasst werden. Sie werden aus Termen und Prädikaten gebildet.

Die *Terme* des Bedingungskalküls können, neben den Konstanten und Variablen für Individuen, auch Funktionsterme sein. Diese vereinfachen die Schreibweise von Bedingungen, indem sie untereinander und mit anderen Termen kombiniert werden können. Eine kleine Anzahl allgemeiner Prädikate (z.B. das Gleichheitszeichen "=") über Funktionstermen ist mächtiger als eine umfangreiche Sammlung spezieller Prädikate über Konstanten und Variablen. So kann eine Bedingung über die Summe zweier Winkel durch

Winkel(C1,C2,P12) + Winkel(C3,C4,P34) = S

statt durch das spezielle Prädikat

Winkelsumme(C1,C2,P12,C3,C4,P34,S)

ausgedrückt werden.

Die Funktionsterme stehen für reelle Zahlen. Die Funktoren (z.B. Winkel, +), mit denen sie erzeugt werden, beschreiben *Masse* und deren *Linearkombinationen.* Masse sind Abbildungen von geometrischen Elementen auf reelle Zahlen. Sie entsprechen den metrischen Eigenschaften und Beziehungen der Grösse und Lage (siehe 4.1.), spezialisiert für Punkte, Geraden und Kreise. Die folgenden zwei Tabellen definieren die Funktoren des Geometrischen Bedingungskalküls.

Mass	**Funktor**	**Term**
x-Koordinate eines Punkts	X	X(p)
y-Koordinate eines Punkts	Y	Y(p)
x-Koordinate des Mittelpunkts (Bezugspunkts) eines Kreises	Xm	Xm(k)
y-Koordinate des Mittelpunkts (Bezugspunkts) eines Kreises	Ym	Ym(k)
Radius eines Kreises	Radius	Radius(k)
Steigung (Bezugsrichtung) einer Geraden	Steigung	Steigung(g)
Richtungswinkel eines Kreises in einem Punkt	Richtung	Richtung(k,p)
Abstand zweier Elemente	Abstand	Abstand(e1,e2)
Länge des Stücks einer Kurve zwischen zwei Punkten	Länge	Länge(c,p1,p2)
Winkel zwischen zwei Kurven in einem gemeinsamen Punkt	Winkel	Winkel(c1,c2,p)
Flächeninhalt des durch (p1,c1,..,pn,cn) begrenzten Gebiets	Fläche	Fläche(p1,c1,..,pn,cn)

Linearkombination	**Funktor**	**Term**
Summe der Terme t1 und t2	+	t1+t2
Differenz der Terme t1 und t2	-	t1-t2
Produkt der Konstanten S mit dem Term t	*	S*t

Als *Prädikate* werden definiert: ein *geometrisches* (für Aussagen über Elemente) und zwei *arithmetische* (für Aussagen über Skalare). Zusätzliche Prädikate können im Bedingungskalkül selbst als Erweiterungen definiert werden (siehe 5.3.1.). Das geometrische Prädikat beschreibt Inzidenzen von Punkten mit Kurven. Arithmetische Prädikate werden für den Vergleich zweier Terme definiert. Sie sind dreistellig, um den metrischen Bedingungen Unsicherheitsmasse zuordnen zu können. Anstelle von Varianzen (σ^2) werden hier Standardabweichungen (σ) verwendet.

Aussage	**Prädikat**	**Atom**
Der Punkt p ist mit der Kurve c inzident	Inzident	Inzident(p,c)
Die Terme t1 und t2 sind gleich, die Standardabweichung ist s	Gleich	Gleich(t1,t2,s)
Der Term t1 ist kleiner als t2, die Standardabweichung ist s	Kleiner	Kleiner(t1,t2,s)

5.3. Erweiterungen

Bei der Beurteilung der Ausdrucksfähigkeit einer formalen Sprache stellen sich zwei wesentliche Fragen:

- Wie *mächtig* ist die Sprache, d.h. was kann mit ihr überhaupt ausgedrückt werden?
- Wie *ausdrucksstark* ist die Sprache, d.h. wie einfach kann etwas ausgedrückt werden?

Erweiterungen haben den Zweck, die Mächtigkeit oder Ausdrucksstärke einer Sprache zu erhöhen.

5.3.1. Erweiterungen im Bedingungskalkül

Die *Ausdrucksstärke* des Geometrischen Bedingungskalküls, d.h. die Einfachheit, mit der sich geometrische Modelle beschreiben lassen, kann den Bedürfnissen angepasst werden. Da der Bedingungskalkül in die Prädikatenlogik eingebettet ist, kann er selbst dazu benützt werden, syntaktische Abkürzungen für komplexe Bedingungen zu definieren.

Durch Hornklauseln können zusätzliche Prädikate definiert werden, welche die Ausdrucksstärke erhöhen. Die Syntax für die Definition eines Prädikats P ist:

P(t1,..,tn) ← A1 & .. & Am

Dabei müssen die Terme t1,..,tn auch in den Atomen A1,..,Am vorkommen. Sie können aber beliebig auf diese verteilt sein.

Beispiele: (a) Ein Prädikat Parallel für zwei Geraden lässt sich mit dem Funktor Steigung und dem Prädikat Gleich definieren:

Parallel(g1,g2,s) ← Gleich(Steigung(g1),Steigung(g2),s)

(b) Ein Prädikat für allgemeine Tangentenbedingungen wird definiert durch:

Tangential(k,c,p,s) ← Inzident(p,k) & Inzident(p,c) & Gleich(Winkel(k,c,p),0,s)

5.3.2. Erweiterte Definitionen des Bedingungskalküls

Alle ebenen geometrischen Modelle, die sich mittels differentialgeometrischer Eigenschaften und Beziehungen von Punkten, Geraden und Kreisen beschreiben lassen, können auch mit dem Bedingungskalkül beschrieben werden. Dies ergibt sich daraus, dass die Funktoren und Prädikate direkt aus der differentialgeometrischen Modellierung in Kapitel 4 abgeleitet sind. Für die Beschreibung von ebenen Gebilden aus Punkten, Geraden und Kreisen hat der Geometrische Bedingungskalkül somit die *Mächtigkeit der Differentialgeometrie*. Wie in 5.2.1. erwähnt, ist es natürlich auch möglich, auf derselben Grundlage einen Kalkül mit zusätzlichen Kurventypen zu definieren.

Ebensogut kann ein erweiterter Kalkül definiert werden, der zusätzliche Funktoren und Prädikate enthält. Zur Illustration werden hier die elementaren Funktoren durch spezielle Masse für Anwendungen in der *Vermessung* ergänzt. Die geometrischen Modelle der Vermessung lassen sich selbstverständlich mittels Differentialgeometrie beschreiben. Um gewisse, häufig vorkommende, Bedingungen im elementaren Bedingungskalkül formulieren zu können, müssen allerdings zusätzliche Punkte und Geraden eingeführt werden. Richtungs- oder Winkelmessungen erfordern z.B. zusätzliche Geraden für die Visuren und die Nullrichtung, da der Bedingungskalkül als Winkelmasse nur Steigungen von Geraden und Winkel zwischen Geraden kennt. Um solche Bedingungen einfacher ausdrücken zu können, werden hier drei Masse definiert, mit denen die üblichen metrischen Grössen der Vermessung direkt ausgedrückt werden können. Sie lassen sich ohne Schwierigkeiten aus der analytischen Beschreibung in Kapitel 4 ableiten.

Mass	**Funktor**	**Term**
Steigung der Geraden durch die Punkte p1 und p2 ("Azimut" bzw. "orientierte Richtung")	Azimut	Azimut(p1,p2)
Winkel zwischen einer Nullrichtung s0 im Punkt p1 und einer Geraden (p1,p2) ("unorientierte Richtung")	PktRichtung	PktRichtung(s0,p1,p2)
Winkel zwischen den Geraden (p,p1) und (p,p2) im Punkt p	PktWinkel	PktWinkel(p1,p,p2)

5.4. Anwendung

Als Beispiel für die logische Beschreibung eines geometrischen Modells im Geometrischen Bedingungskalkül wird hier die Konstruktionsaufgabe aus Kapitel 2 beschrieben. Abbildung 5-1 zeigt die verwendeten Bezeichnungen.

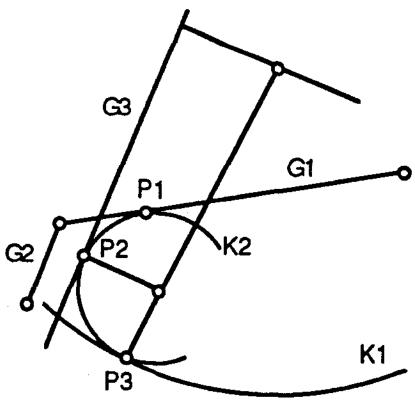

Abbildung 5-1: Bezeichnungen für die Konstruktionsaufgabe aus Kapitel 2

Die Reihenfolge der Bedingungen ist beliebig. Es seien zuerst die topologischen Bedingungen über Inzidenzen von Punkten mit Geraden und Kreisen angegeben:

Inzident(P1,G1)

Inzident(P1,K2)

Inzident(P2,G3)

Inzident(P2,K2)

Inzident(P3,K1)

Inzident(P3,K2)

Es folgen die Tangentenbedingungen. Die Standardabweichung für die Winkel der Tangentenvektoren ist willkürlich als 0.1rad gewählt:

Tangential(K2,G1,P1,0.1)

Tangential(K2,G3,P2,0.1)

Tangential(K2,K1,P3,0.1)

Schliesslich ist noch die im gegebenen Abstand (er betrage 2.7m) zu G2 parallele Gerade G3 festzulegen, mit einer Standardabweichung von z.B. 0.1m:

Parallel(G2,G3,0.1)

Gleich(Abstand(G2,G3),2.7,0.1).

Damit sind alle Bedingungen der Aufgabenstellung beschrieben. Die Bedingungen über die gegebene Situation (Radius von K1, Koordinaten) und die Näherungsbedingungen sind trivial und werden hier nicht aufgeführt.

6. Editieren geometrischer Modelle

Das deskriptive Interaktionsmodell setzt das Editieren von geometrischen Modellen an die Stelle des computergestützten Konstruierens. Es sieht einen Editor vor, mit dem die Benützer geometrische Modelle interaktiv beschreiben und diese Beschreibungen auswerten und verändern können. Aufbauend auf der Formalisierung ebener geometrischer Modelle in den zwei vorangehenden Kapiteln kann nun ein solcher Geometrie-Editor entworfen werden. Dieses Kapitel definiert die konzeptionellen Objekte (6.1.), zeigt eine mögliche Form der Interaktion (6.2.) und stellt einen vereinfachten Prototyp vor (6.3.).

6.1. Konzeptionelle Objekte

Die erste Phase des Entwurfs einer Benützerschnittstelle ist der konzeptionelle Entwurf. Ausgehend vom gewählten Interaktionsmodell sind darin die Konzepte der Anwendung zu definieren, die ein Benützer beherrschen muss [Moran 1981, Foley 1987]. Für den Geometrie-Editor werden hier *sieben Klassen von konzeptionellen Objekten* definiert: Modelle, Bedingungen, Elemente, Funktionen, Relationen, Erweiterungen und Skalare. Die Definitionen dieser Objekte ergeben sich aus den vorangehenden Kapiteln und werden hier nur zusammengefasst.

Geometrische *Modelle* entsprechen dem in Kapitel 1 definierten Begriff: Sie sind symbolische Darstellungen von ebenen geometrischen Abstraktionen wirklicher oder vorgestellter Dinge. Jedes Modell besteht aus einer Menge von Bedingungen, welche die gesamte geometrische Information des Modells enthalten.

Bedingungen sind Aussagen über topologische und metrische Eigenschaften und Beziehungen in einem Modell. Sie lassen sich demnach in topologische und metrische Bedingungen einteilen. Eine Bedingung sagt aus, dass gewisse Objekte in einer Relation zueinander stehen. Die Objekte, auf die sich eine Bedingung bezieht, sind Elemente oder Skalare. Die Relation ist dementsprechend eine geometrische oder arithmetische.

Elemente sind die geometrischen "Bausteine" von Modellen und die primären Objekte von Bedingungen. Jedes Element hat einen Namen, der innerhalb eines Modells eindeutig sein soll. Durch Bedingungen über die topologische Eigenschaft der Dimension werden die Elemente in Punkte und Kurven eingeteilt. Durch Bedingungen über die metrische Eigenschaft der Form von Kurven werden verschiedene Kurvenarten unterschieden. Diese seien beschränkt auf Geraden und Kreise.

Durch *Funktionen* werden Skalare als Objekte von metrischen Bedingungen gebildet. Je nachdem, ob ihre Argumente Elemente oder Skalare sind, gliedern sich die Funktionen in Masse und Operatoren.

Masse sind Abbildungen von Elementen auf Skalare. Sie stehen für metrische Eigenschaften und Beziehungen von Elementen. Jedem Mass ist eine Masseinheit zugeordnet. Die entsprechende Abbildung von Elementen auf einen Skalar hat je nach Masseinheit verschiedene numerische Werte (z.B. Umfang_{km}(Erde) = 40'000, $\text{Umfang}_{mi.}$(Erde) = 25'000).

Operatoren sind Abbildungen von Skalaren auf Skalare. Sie erlauben Linearkombinationen von Skalaren.

Mit *Relationen* werden Bedingungen gebildet. Sie sind Eigenschaften oder Beziehungen von Elementen oder Skalaren. Entsprechend gibt es geometrische und arithmetische Relationen. Geometrische Relationen bilden Bedingungen über Elemente. Sie lassen sich weiter in topologische und metrische Relationen einteilen. Arithmetische Relationen bilden Bedingungen über Skalare.

Mit *Erweiterungen* werden neue Relationen definiert. Dadurch kann der Benützer häufig gebrauchten Kombinationen eigene Bezeichnungen geben. Erweiterungen sind also ein Abstraktionsmittel, um die interaktive Beschreibung von Modellen zu vereinfachen. Sie bestehen unabhängig von Modellen: Eine neu definierte Relation kann in allen Modellen verwendet werden.

Skalare sind Ausdrücke für reelle Zahlen. Sie werden als Objekte von Bedingungen oder in der Definition von Erweiterungen verwendet.

6.2. Interaktionssprache

Interaktion lässt sich als Dialog zwischen Benützer und System in einer Interaktionssprache auffassen [Foley & van Dam 1982, Hartson & Hix 1989]. Die Interaktionssprache eines Geometrie-Editors soll einen Dialog über die oben definierten konzeptionellen Objekte erlauben. Hier wird eine mögliche Form des Dialogs im Interaktionsstil der direkten Manipulation [Hutchins et al. 1986] gezeigt. Als Interaktionsmittel werden ein (monochromer) 'bitmap'-Bildschirm hoher Auflösung sowie ein Zeige- und Zeicheninstrument (z.B. eine Maus) vorausgesetzt. Die Software soll 'windows', 'icons' und Menüs unterstützen.

Das deskriptive Interaktionsmodell sieht vor, dass Bedingungen durch Skizzen und in verbaler Form beschrieben werden können. Mit dem Skizzieren von Elementen werden die topologischen und gewisse metrische Bedingungen angegeben (6.2.1.). Weitere metrische

Bedingungen werden verbal beschrieben (6.2.2.). Diese verbale Beschreibung kann durch die Definition von Erweiterungen vereinfacht werden (6.2.3.). Die Abbildungen in 6.2. dienen zur Veranschaulichung des Interaktionsentwurfs anhand eines Beispiels aus der Vermessung. Sie stammen *nicht* von einem implementierten System (vgl. jedoch 6.3.).

6.2.1. Skizzieren von Elementen

Das System stellt das geometrische Modell in einer *Graphik* dar (Abbildung 6-1). Diese zeigt die Elemente, wie sie durch die bereits beschriebenen Bedingungen bestimmt sind und vermittelt dadurch den Kontext für das Skizzieren: Der Benützer skizziert in der Graphik und kann dabei die dargestellten Elemente (als "Blaukopie") in die Skizze einbeziehen.

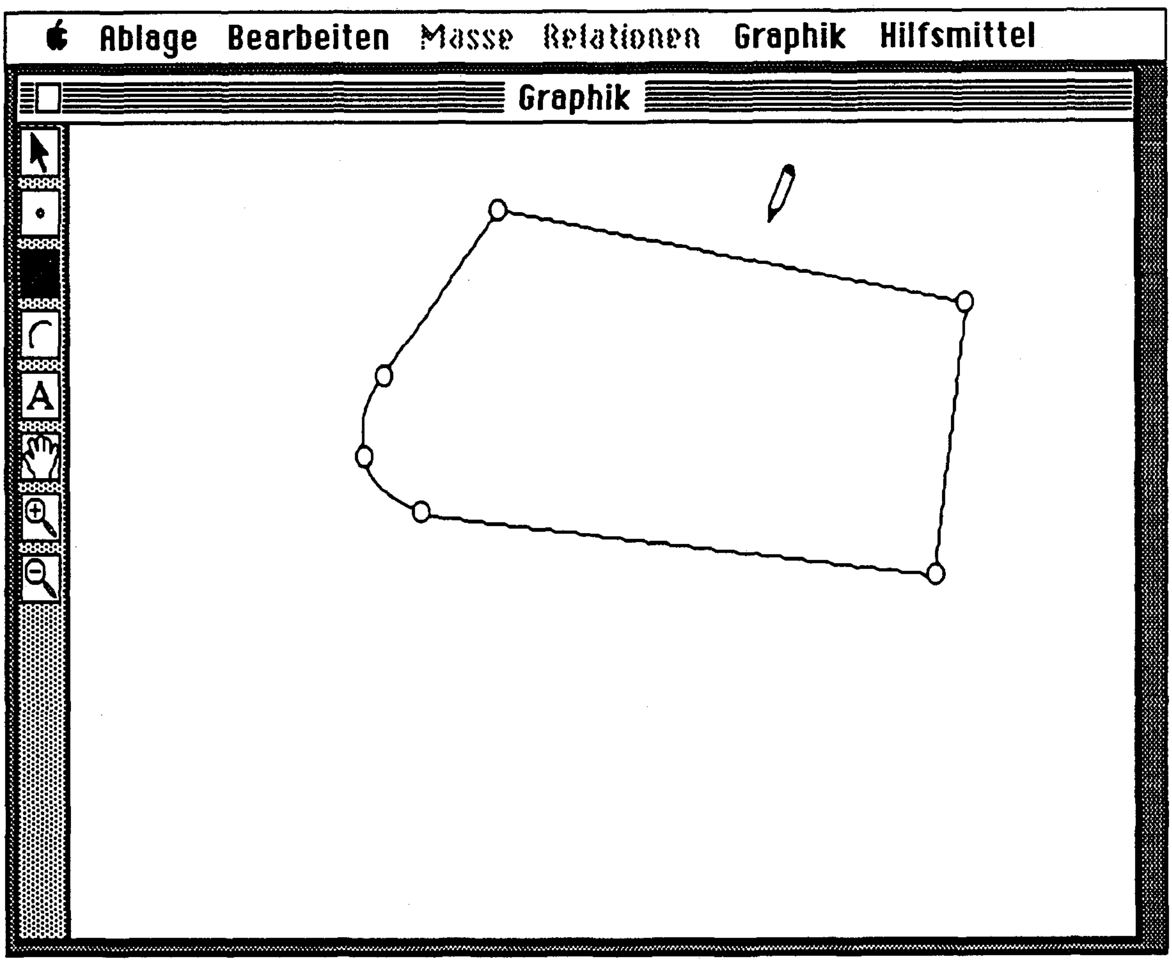

Abbildung 6-1: Modelldarstellung in der Graphik, Skizzierinstrumente

Die Grenze einer zu teilenden Parzelle ist (z.B. aus einer Datenbank) abgefragt und graphisch dargestellt worden. Der Benützer hat das Skizzierinstrument für Geraden ausgewählt und beginnt nun, eine neue Grenzkante zu skizzieren.

Mittels verschiedener *"Skizzierinstrumente"* für Punkte, Geraden und Kreise kann der Benützer die topologischen Bedingungen über die *Existenz* und *Dimension* sowie die metrischen Bedingungen über die *Form* von Elementen gleichzeitig beschreiben. Die Skizzierinstrumente werden vom System als 'icons' am Bildschirm dargestellt. Zum Skizzieren wählt der Benützer ein Instrument aus und gibt anschliessend in der Graphik die Position eines Punkts oder den Verlauf einer Kurve an.

Durch die gegenseitige Lage der Positionen und Verläufe werden die topologischen Bedingungen über *Inzidenzen* beschrieben: Wenn der Benützer mit einer Punktposition auf einen Kurvenverlauf zeigt (oder umgekehrt), interpretiert das System dies als Angabe einer Inzidenz des Punkts mit der Kurve. Jedesmal wenn der Benützer innerhalb eines Kurvenverlaufs auf einen anderen Kurvenverlauf zeigt, interpretiert das System dies als Angabe eines gemeinsamen Punkts der Kurven.

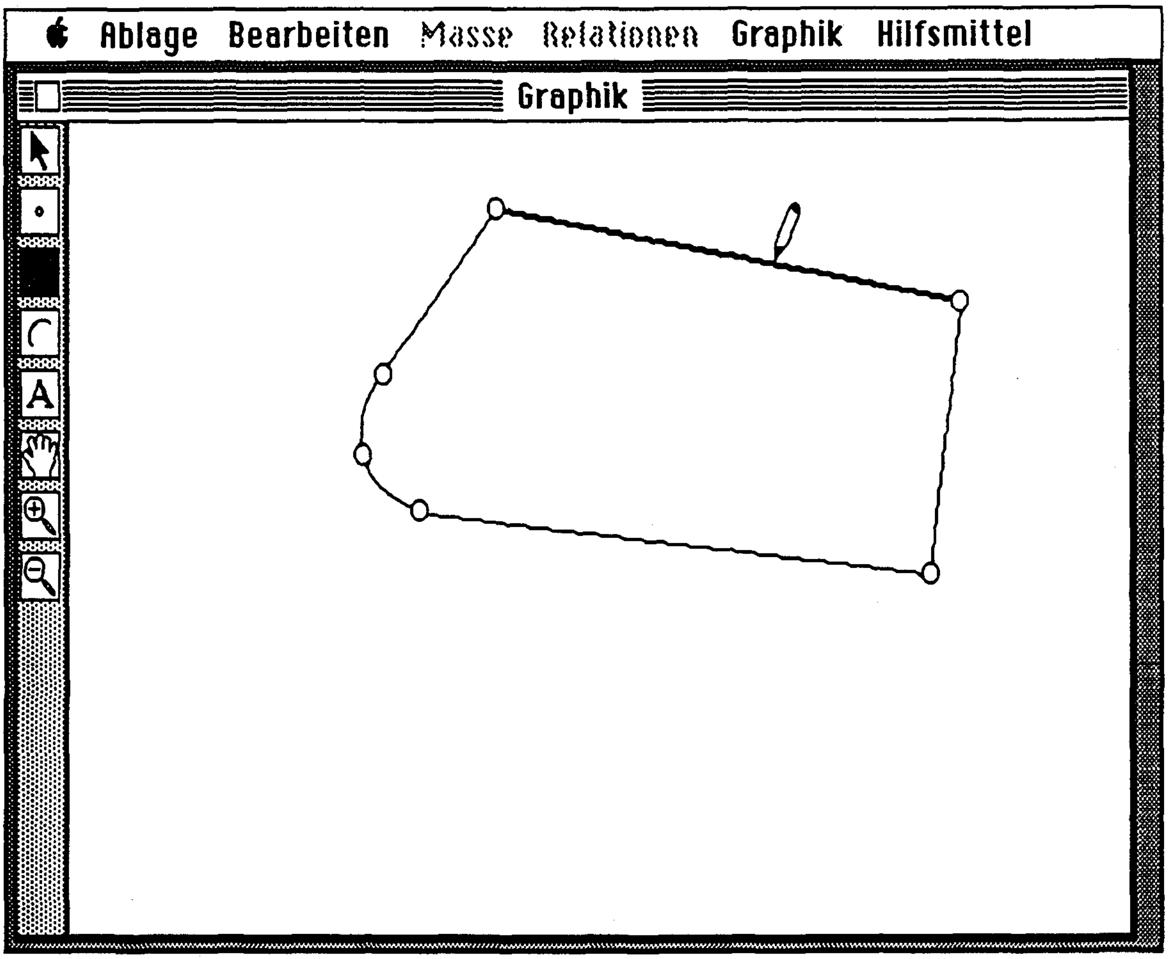

Abbildung 6-2: Skizzieren einer Geraden, Angabe eines gemeinsamen Punkts

Beim Skizzieren des Geradenverlaufs trifft der Benützer auf eine bestehende Grenzkante. Das System zeigt durch deren Hervorhebung an, dass damit ein gemeinsamer Punkt definiert wird.

Schliesslich beschreibt der Benützer mit den skizzierten Punktpositionen und Kurvenverläufen auch Bedingungen über die *Lage* und *Grösse* von Elementen: Positionen enthalten Information über die Lage von Punkten, Verläufe solche über die Lage von Geraden oder Kreisen und über Kreisradien. Da diese Information durch Skizzen beschrieben wird, ordnet das System den entsprechenden Bedingungen hohe Unsicherheit zu.

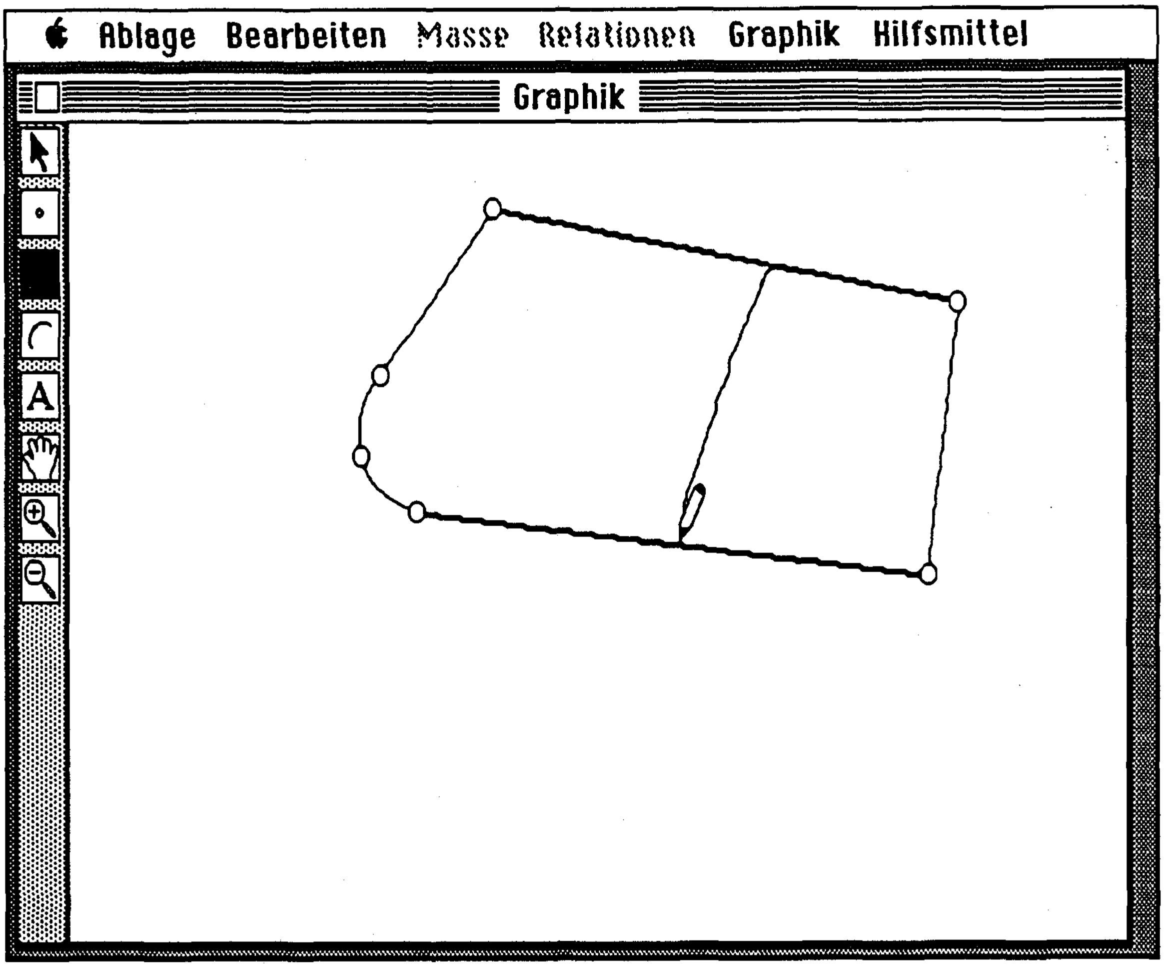

Abbildung 6-3: Skizzierter Verlauf einer Geraden

Das System erhält aus dem Geradenverlauf Information über die genäherte Lage der Geraden und der Schnittpunkte.

Das System antwortet dem Benützer, indem es die beschriebenen Bedingungen seinerseits darstellt: An der für einen Punkt angegebenen Position zeichnet es ein Punktsymbol. Bei Kurven stellt das System während des Skizzierens den Verlauf in der Graphik dar und zeigt die Inzidenzen an. Sobald die Kurve skizziert ist, wertet das System die dadurch beschriebenen Bedingungen aus, ersetzt die Darstellung des Verlaufs durch ein Geraden- oder Kreissymbol und zeichnet Punktsymbole für allfällige gemeinsame Punkte. Der Benützer kann auch festlegen, dass diese "Reinzeichnung" erst auf sein Verlangen erfolgen soll.

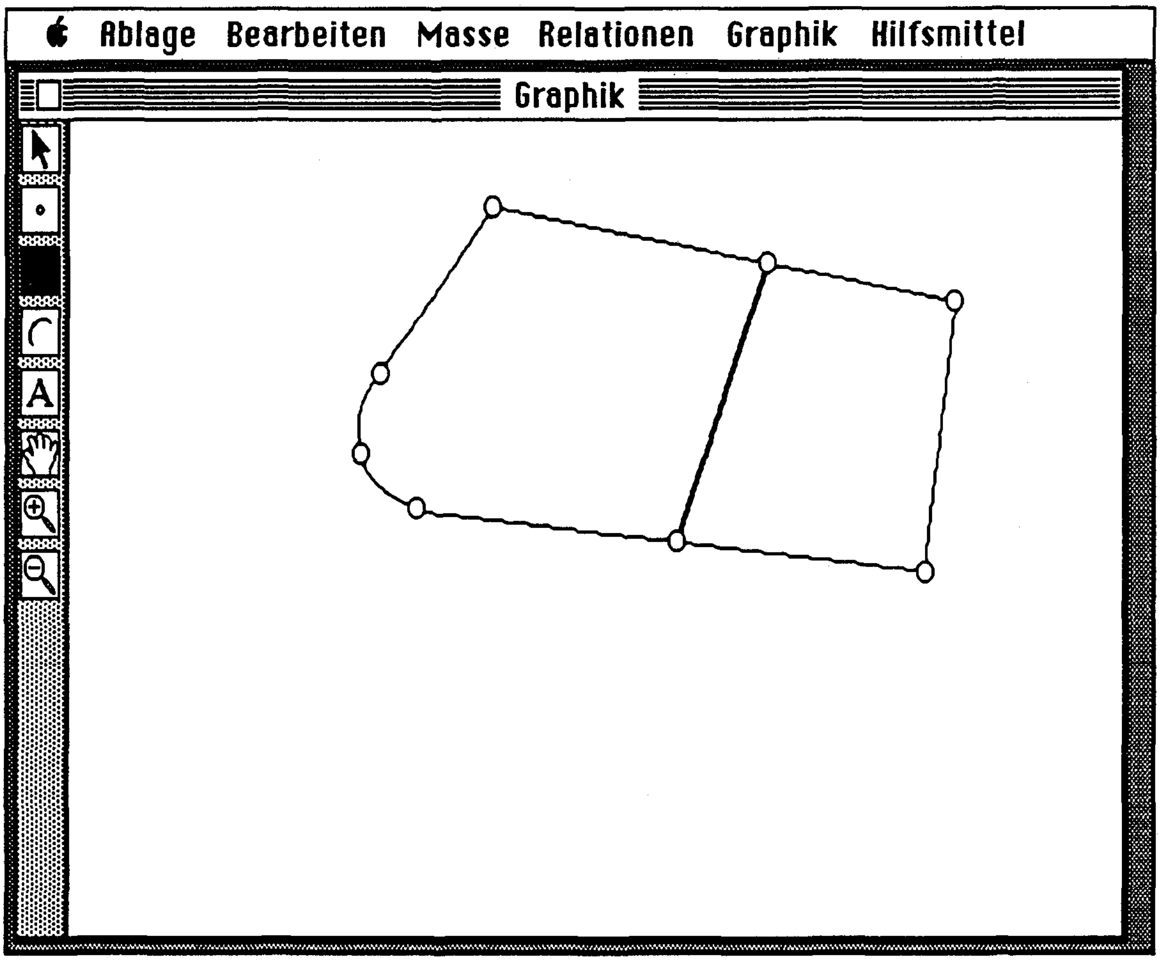

Abbildung 6-4: Gerade nach Auswertung der Skizze

Nach der Auswertung der Skizze stellt das System die neue Grenzkante und die neuen Grenzpunkte dar.

6.2.2. Verbale Angabe von Bedingungen

Nachdem die topologischen Bedingungen vollständig und die metrischen Bedingungen teilweise durch das Skizzieren ausgedrückt werden können, bleiben noch weitere metrische Bedingungen zu beschreiben. Die dafür in 3.3. geforderte Sprache liegt nun mit dem Geometrischen Bedingungskalkül vor. Bedingungen verbal anzugeben bedeutet also, atomare *Formeln im Bedingungskalkül* zu beschreiben.

Die Syntax vereinfacht sich, wenn das System für die Standardabweichungen der Bedingungen Default-Werte setzt, die der Benützer verändern kann. Die dreistelligen arithmetischen Prädikate Gleich und Kleiner des Bedingungskalküls werden dadurch zweistellig und können in 'infix' Form notiert werden.

Beispiel: Die Bedingung 'Gleich(Abstand(P1,P2),10,0.1)'
kann durch 'Abstand(P1,P2) = 10' angegeben werden.

Das System stellt alle verbal angegebenen Bedingungen in einer *Bedingungsliste* dar (Abbildung 6-6). Diese ist eine zweite Sicht des Modells, neben der Graphik. Während die Graphik die Wirkung der Bedingungen auf die Elemente zeigt, enthält die Bedingungsliste verbale Darstellungen der Bedingungen im Geometrischen Bedingungskalkül und dient zum Editieren der Bedingungen. Die Standardabweichungen stehen in einer separaten Kolonne und können dort ebenfalls editiert werden. Anstelle von Standardabweichungen liesse sich z.B. die Angabe von Gewichten vorsehen.

Die Interaktionssprache bietet zwei Möglichkeiten zur Angabe von Bedingungen im Bedingungskalkül:

- Eingabe eines Atoms als Text
  Beispiel: Eintippen von 'Parallel(G1,G2)'
- Auswahl der Objekte (in der Graphik oder in der Bedingungsliste) und der Relation (aus einem Menü)
  Beispiel: Zeigen auf die Geraden G1, G2 in der Graphik und auf das Menüfeld 'Parallel'.

Die Eingabe von Bedingungen als *Text* erfordert keine weiteren Erklärungen. Sie verlangt vom Benützer die Kenntnis des Bedingungskalküls und eignet sich dadurch vor allem für erfahrene Benützer. Die im Folgenden illustrierte Auswahl von Objekten und Relationen durch direkte Manipulation eignet sich für ungeübte Benützer.

Zur Angabe einer *Bedingung über Elemente* wählt der Benützer zuerst in der Graphik die Elemente aus. Dann beschreibt er eine metrische Relation, indem er deren Bezeichnung aus einem Menü wählt oder eintippt.

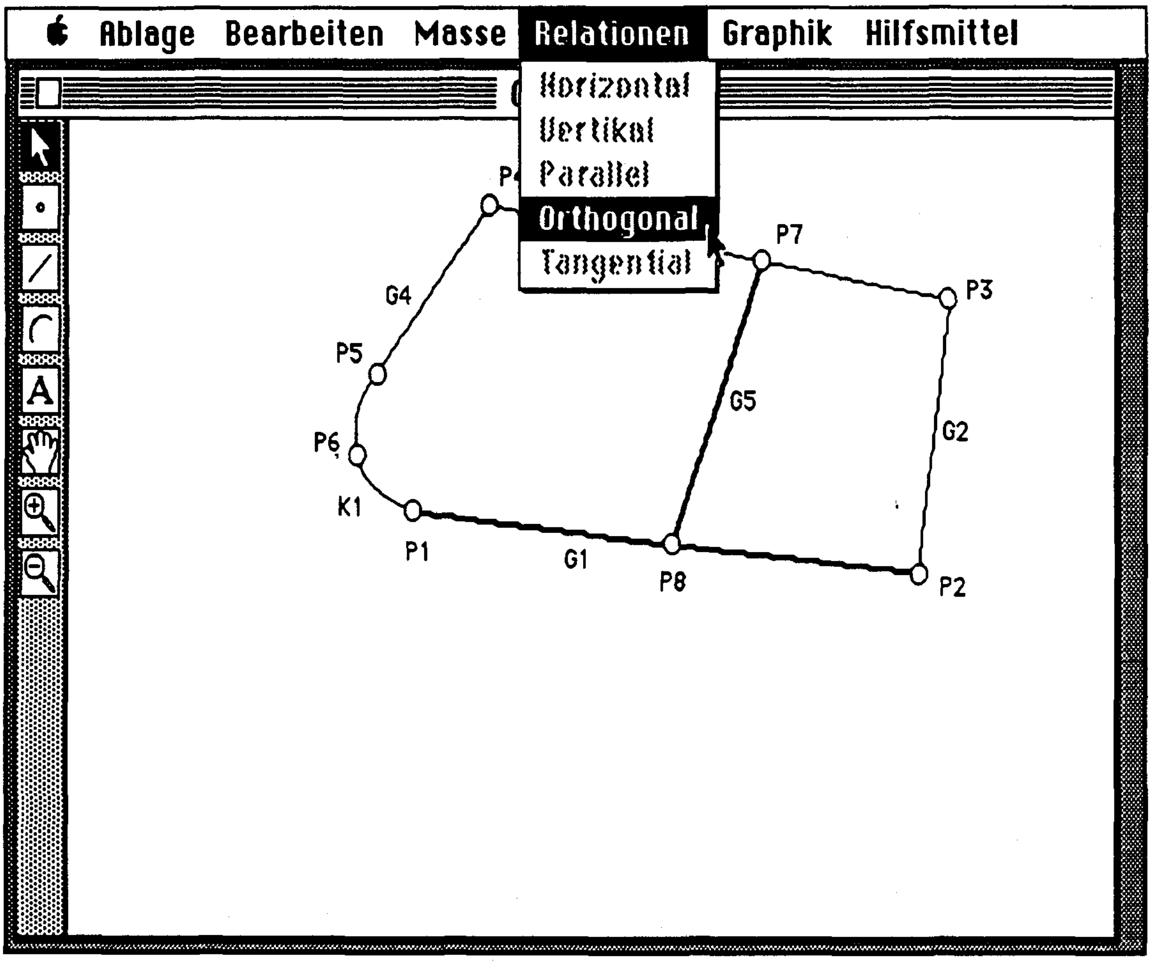

Abbildung 6-5: Angabe einer Bedingung über Elemente

Der Benützer hat zwei Geraden ausgewählt und gibt nun mit dem Menü 'Relationen' die Bedingung an, dass diese orthogonal sein sollen. Das Menü zeigt, dass Orthogonalität die einzige der fünf Relationen ist, die für diese zwei Geraden angegeben werden kann. (Die Namen der Elemente werden vom System vergeben und auf Wunsch bei den Elementen in der Graphik angezeigt. Der Benützer kann diese Darstellungen editieren und damit die Elementnamen ändern.)

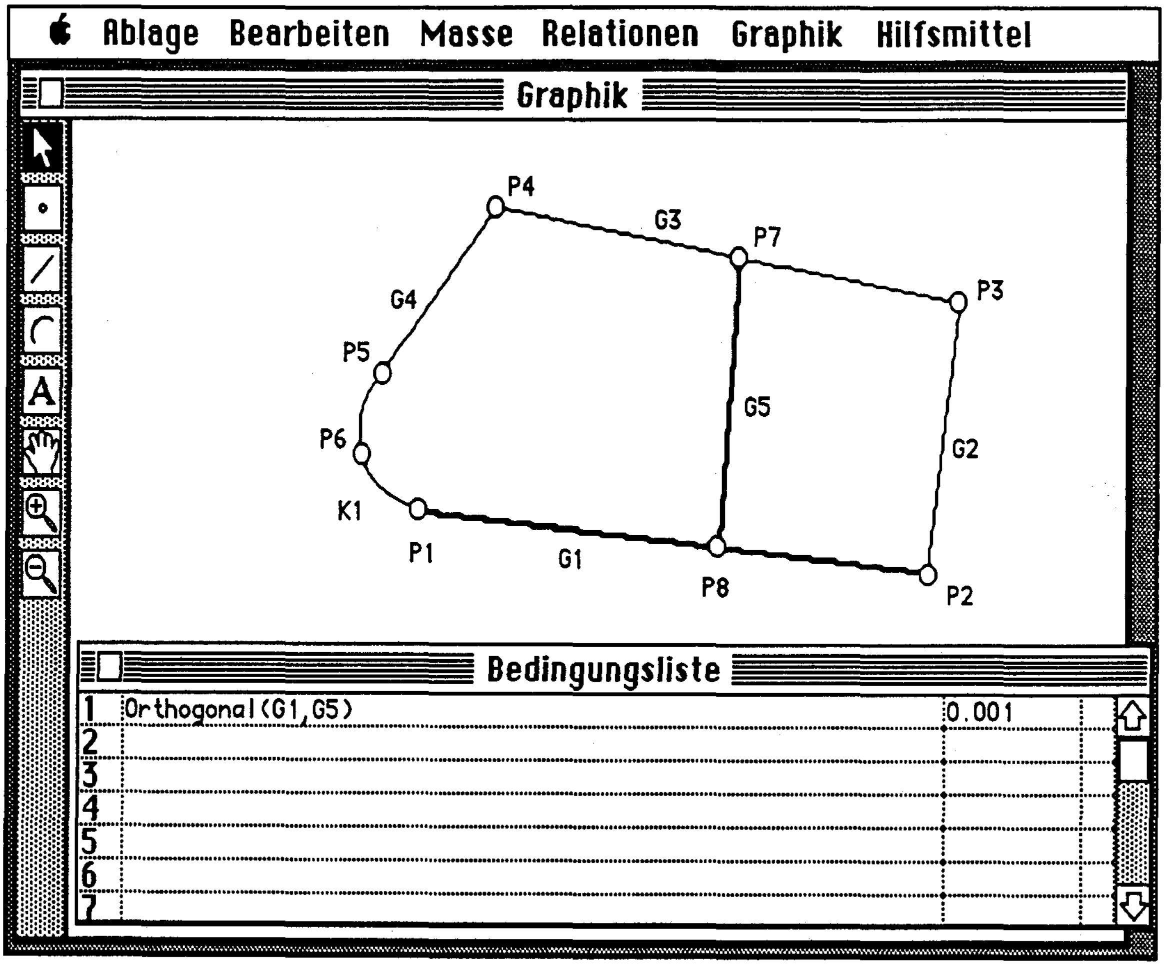

Abbildung 6-6: Auswertung und Darstellung einer Bedingung über Elemente

Die angegebene Orthogonalitätsbedingung wird vom System unmittelbar ausgewertet und in der Bedingungsliste dargestellt (mit einer Default-Standardabweichung). Sie kann dort vom Benützer editiert werden. Die Graphik zeigt den entsprechenden neuen Zustand des Modells.

Zur Beschreibung einer *Bedingung über Skalare* bildet der Benützer zuerst den einen Skalar durch Auswahl von Elementen und Massen.

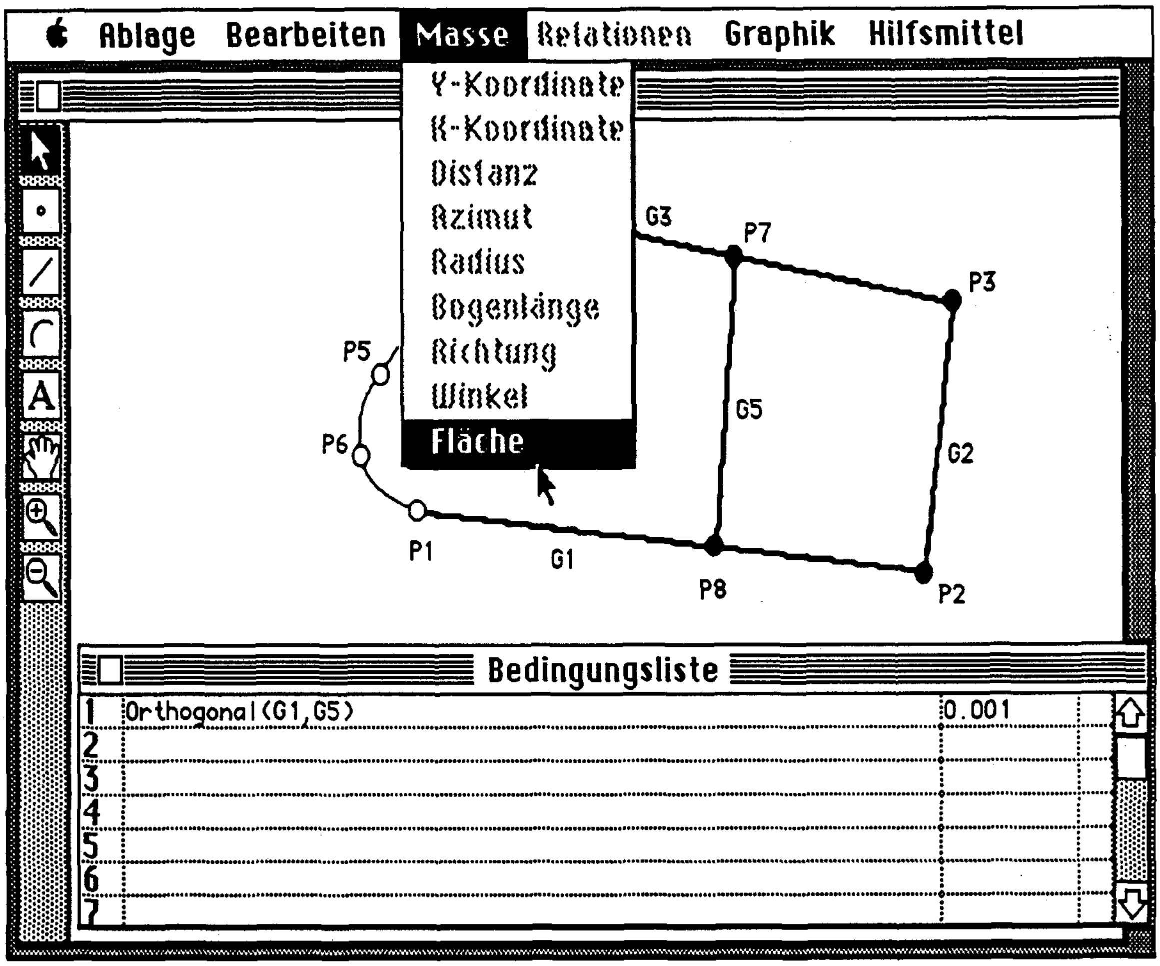

Abbildung 6-7: Angabe eines Skalars

Der Benützer hat die Geraden und Punkte ausgewählt, die den rechten Parzellenabschnitt begrenzen. (Dies kann durch einmaliges "Klicken" innerhalb des Bereichs geschehen). Er bildet nun durch die Wahl einer Funktion im Menü 'Masse' einen Skalar, der den Flächeninhalt dieses Abschnitts bezeichnet.

Das System stellt den Skalar als Term im Bedingungskalkül dar und gibt dazu den aktuellen numerischen Wert an. Die Interaktionssprache dient damit auch zur *Abfrage* von metrischen Eigenschaften und Beziehungen. Das Konzept der Masse ermöglicht es also, die Mittel für die Beschreibung und Analyse von geometrischen Modellen zu vereinheitlichen.

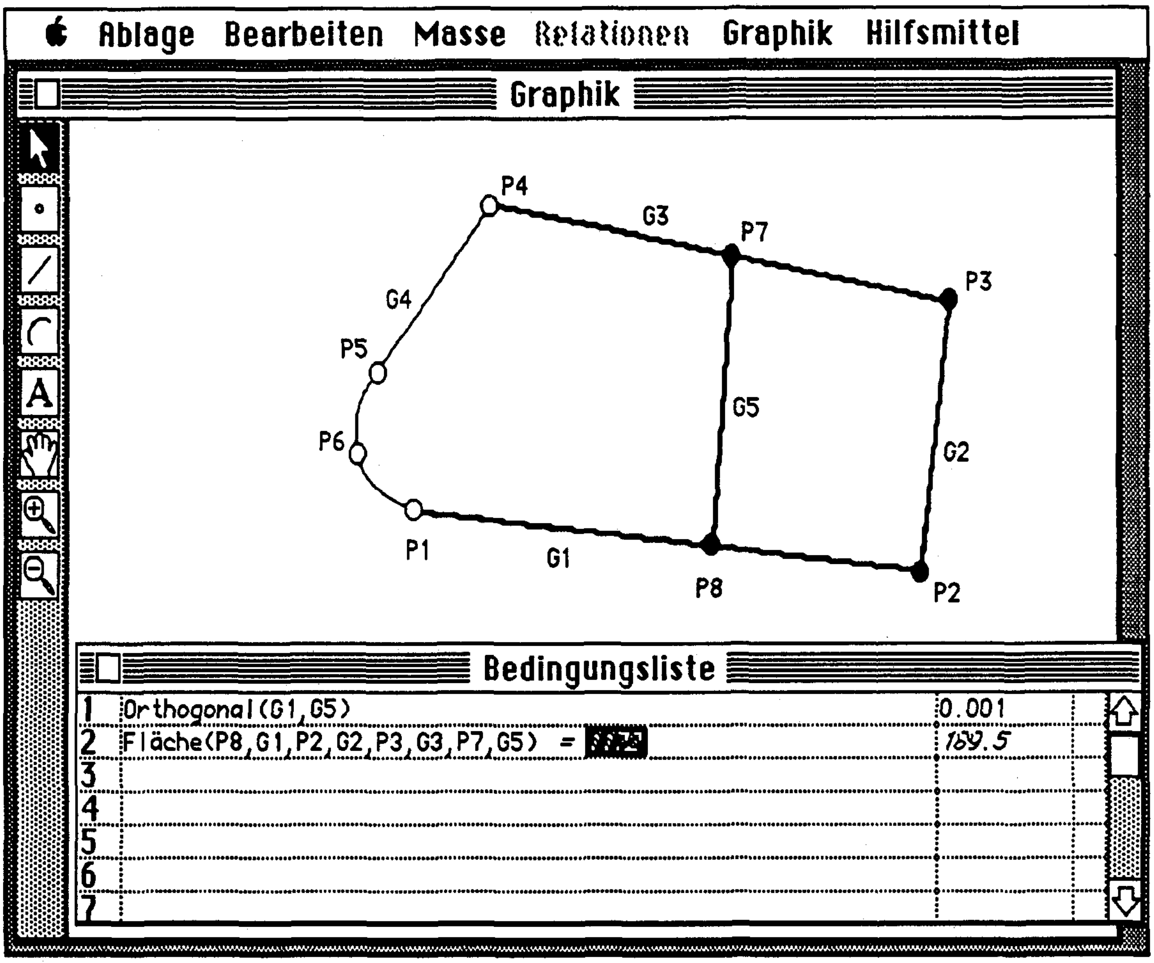

Abbildung 6-8: Anzeige eines Skalars und seines Werts

Das System hat den Skalar sowie dessen numerischen Wert und Standardabweichung in der Bedingungsliste dargestellt. Der Flächeninhalt des rechten Parzellenabschnitts beträgt demnach gegenwärtig 1172m², mit einer Standardabweichung von 189.5m². Diese hohe Unsicherheit entspricht der noch nicht vollständig bestimmten Lage der neuen Grenzkante.

Der Benützer kann nun den zweiten Skalar der Bedingung angeben, entweder wieder mit einem Mass oder durch Überschreiben des, vom System angezeigten, gegenwärtigen numerischen Werts.

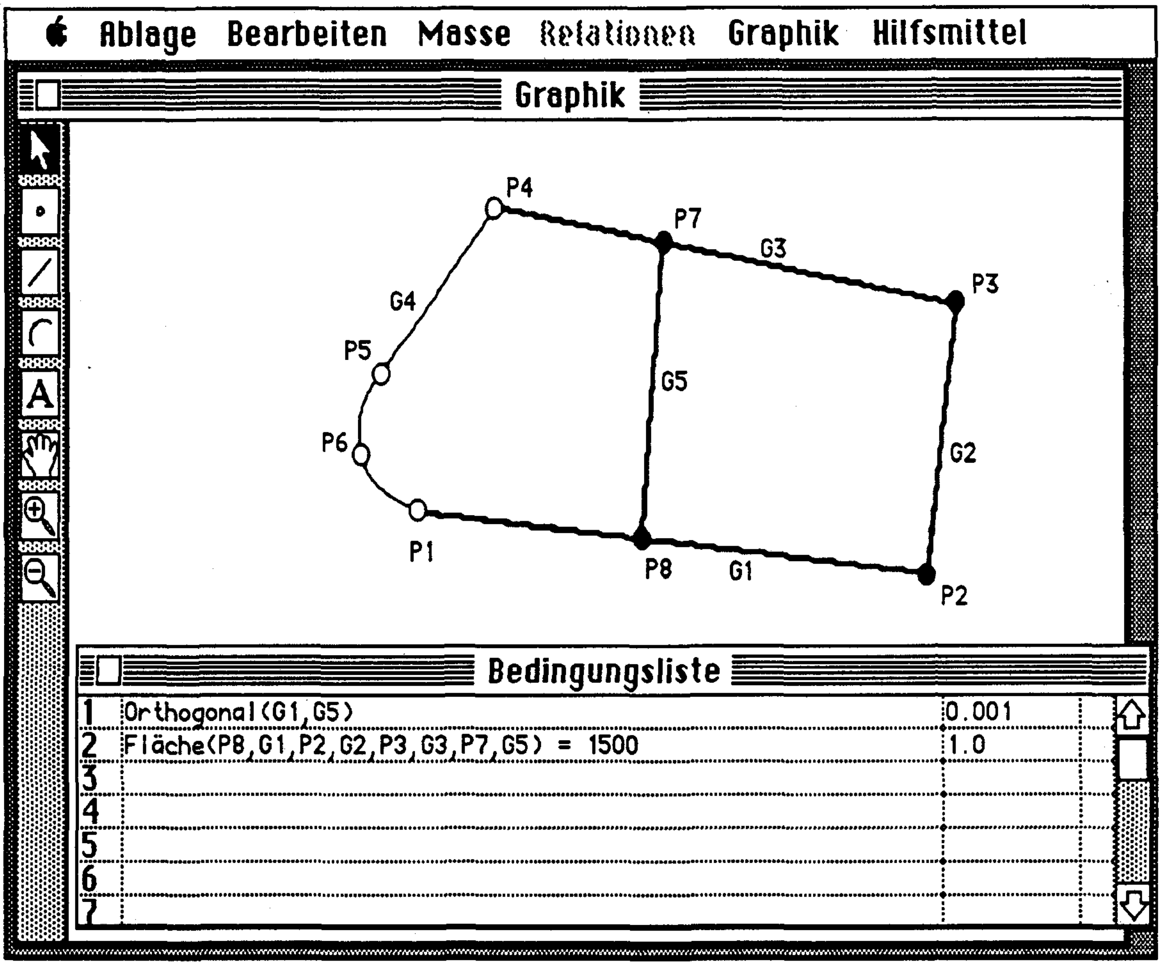

Abbildung 6-9: Angabe und Auswertung einer Bedingung über Skalare

Der Benützer hat den bisherigen Wert des Flächeninhalts mit dem Sollwert von 1500m² überschrieben und damit den zweiten Skalar in der Bedingung definiert. Das System hat die Flächenbedingung ausgewertet und den neuen Modellzustand in der Graphik dargestellt. Damit ist die geometrische Beschreibung der Parzellenteilung vollständig.

6.2.3. Definition von Erweiterungen

Zur Definition von Erweiterungen dienen Hornklauseln im Bedingungskalkül, die der Benützer als Text eingibt. Das System stellt die Erweiterungen in einer *Erweiterungsliste* dar. Die neu definierten Bezeichnungen erscheinen im Menü 'Relationen' und können bei der Angabe von Bedingungen genau wie die vordefinierten Relationen ausgewählt werden.

6.3. Prototyp

HILS (Human Interface to Least Squares) ist ein Programm für ebene geometrische Konstruktionen und Berechnungen im Ingenieurwesen [White 1988b]. Der Benützer kann damit im Interaktionsstil der direkten Manipulation geometrische Elemente skizzieren sowie Bedingungen angeben, auswerten und verändern.

HILS ist im Rahmen einer Master-Arbeit an der University of Maine entstanden [White 1987]. Sein Autor hat es für die vorliegende Arbeit und für den Einsatz im Unterricht zu einem einfachen Geometrie-Editor weiterentwickelt [White 1988a]. Die Implementation erfolgte anfänglich auf einer DEC Vaxstation in precompiliertem Pascal [Egenhofer & Frank 1988] und wurde später auf Apple Macintosh in MPW Pascal [APDA 1987] übertragen. Diese Version wird hier als Prototyp für einen vereinfachten Geometrie-Editor vorgestellt.

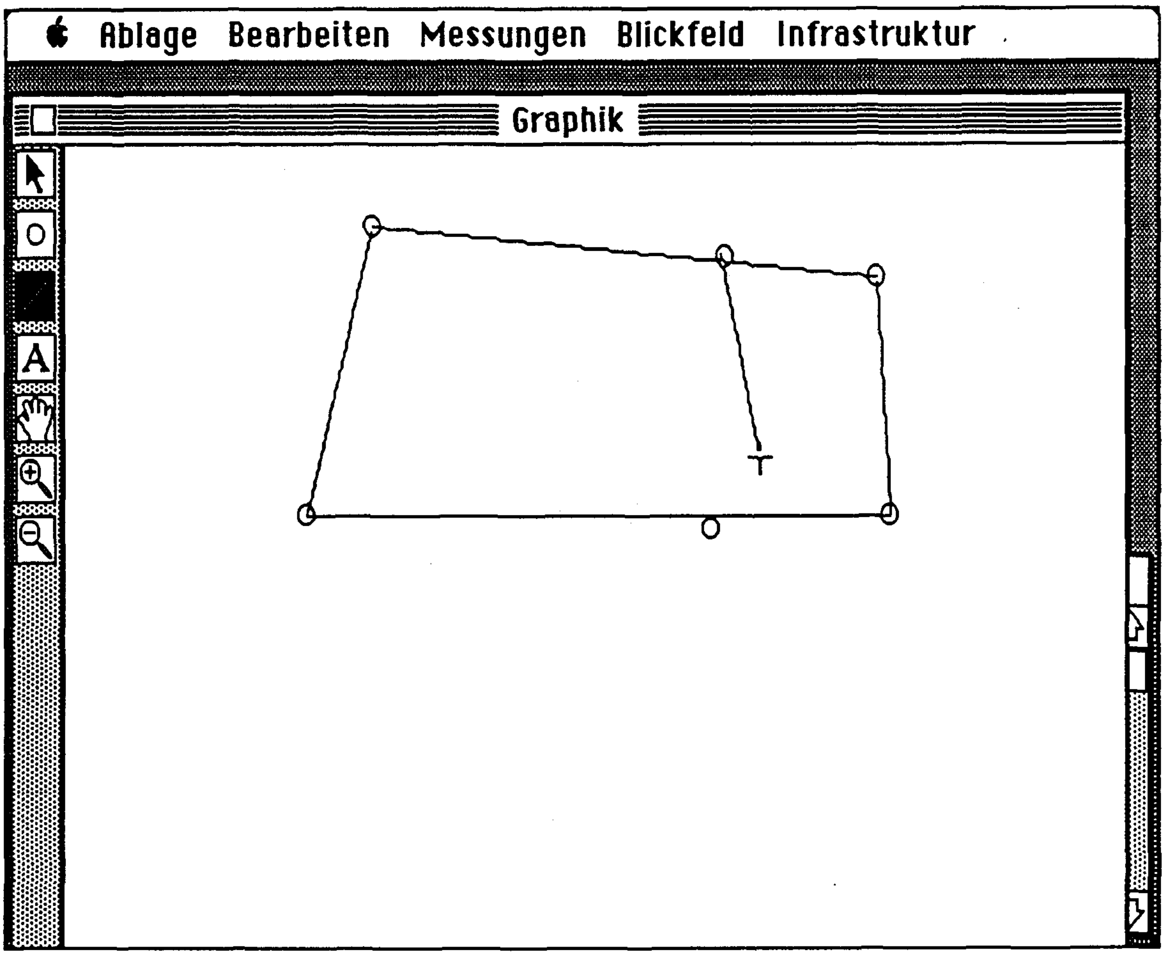

Abbildung 6-10: Skizzieren einer Geraden in HILS

Der Benützer hat zwei neue Grenzpunkte in einer Parzelle ungefähr positioniert und verbindet sie nun durch eine Gerade.

HILS kennt Punkte und Geradenstücke als Elementtypen. Sie sind durch Skizzierinstrumente in der Form von 'icons' am linken Bildschirmrand dargestellt. Der Benützer kann diese Instrumente auswählen und damit Elemente skizzieren. Die Geradenstücke werden dabei als "Gummibandlinien" vom Anfangs- zum Endpunkt gespannt.

Wenn ausser den Endpunkten weitere Punkte mit einem Geradenstück inzident sind, so formuliert dies der Benützer durch eine Abstandsbedingung. Zur Angabe von Bedingungen sind zuerst die betroffenen Elemente zu wählen. Im Menü "Messungen" werden dann die Masse angeboten, die für diese Elemente angegeben werden können.

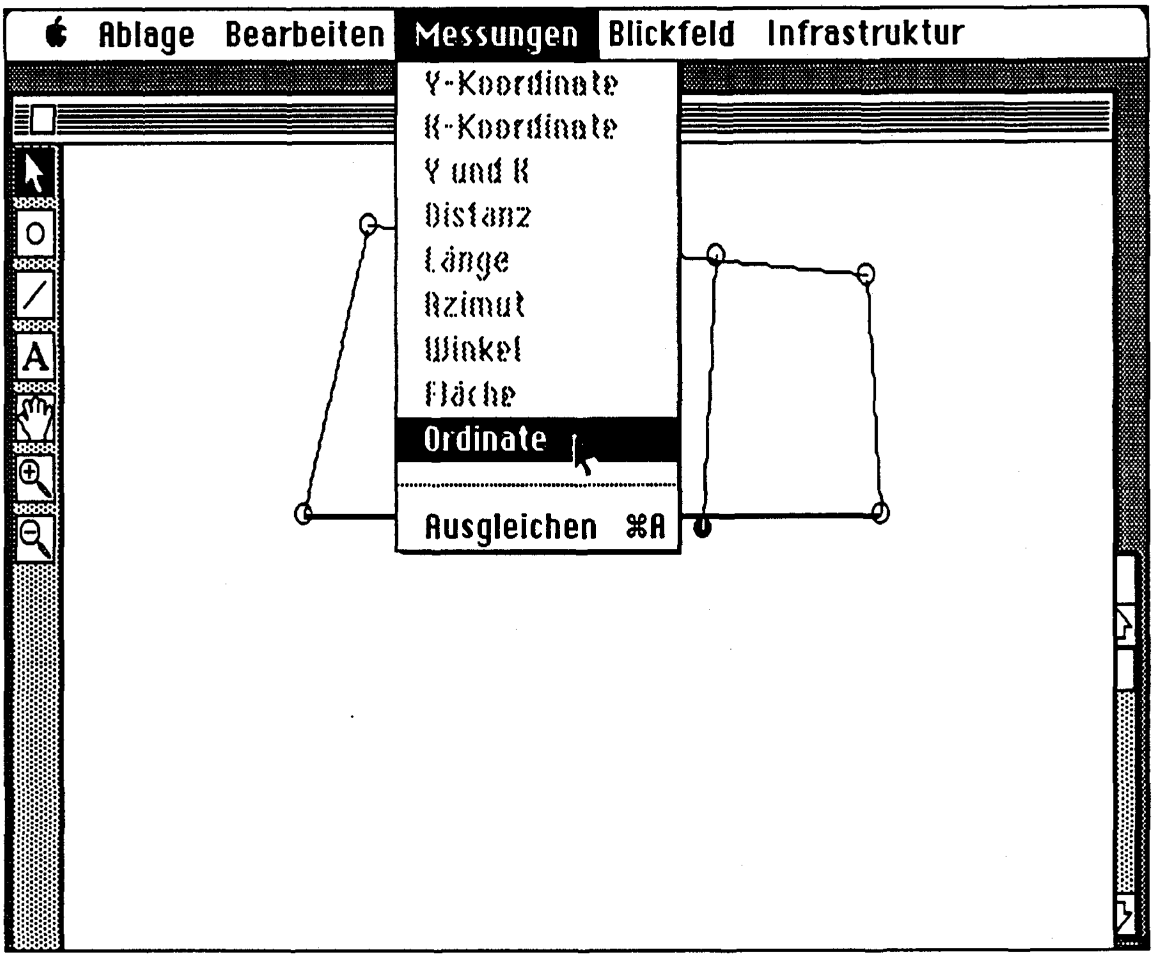

Abbildung 6-11: Wahl des Masses in einer Bedingung

Der Benützer hat eine zu teilende Grenzkante und den darin einzubindenden Punkt ausgewählt. Im Menü 'Messungen' kann er nun eine Bedingung über deren Abstand (die Ordinate des Punkts zur Geraden) anmelden.

Nach der Wahl eines Masses zeigt das Programm in einem Dialogfenster den aktuellen Wert des entsprechenden Skalars und eine Default-Standardabweichung an. Der Benützer kann beides durch die gewünschten Werte überschreiben und damit eine Bedingung angeben.

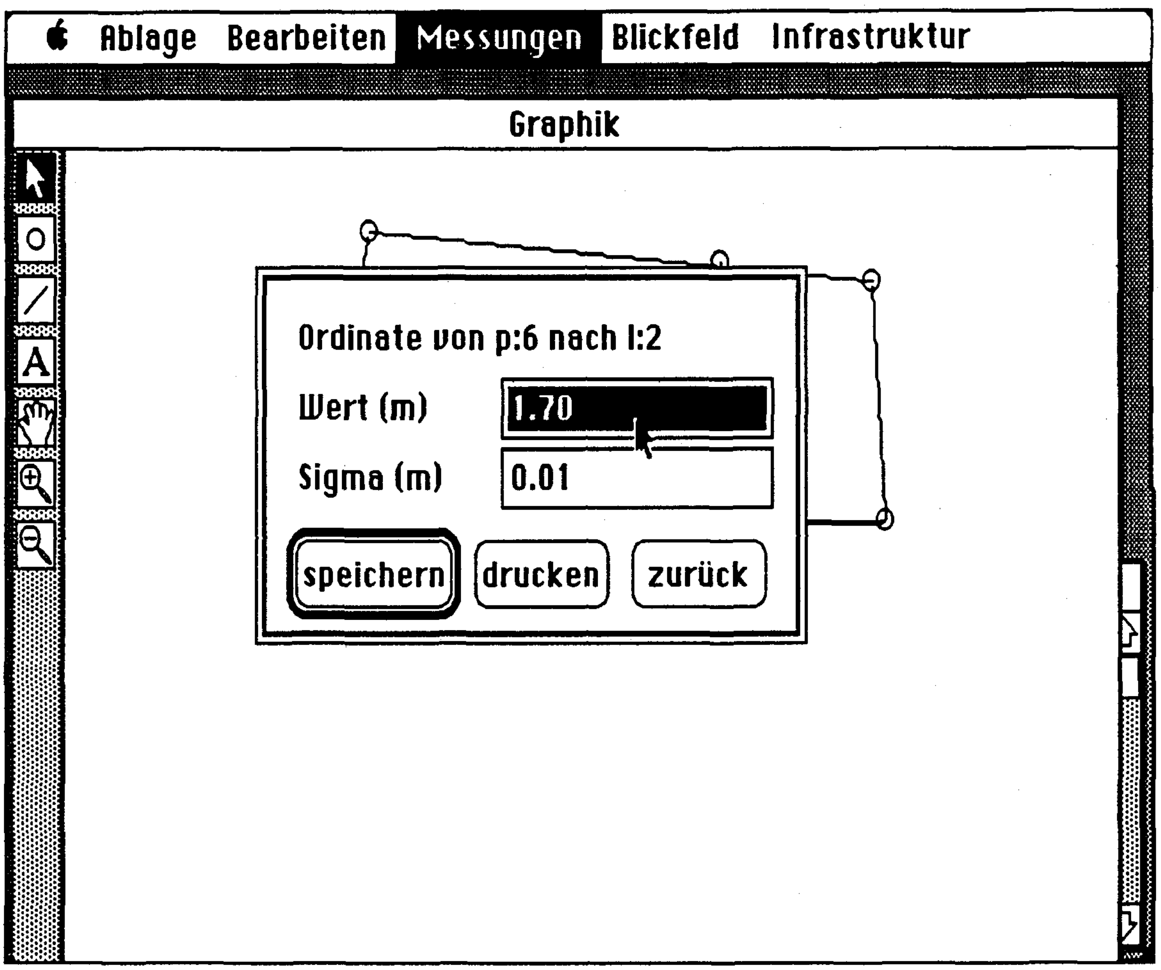

Abbildung 6-12: Angabe der Werte in einer Bedingung

Das System zeigt den aktuellen Wert der Ordinate an. Der Benützer kann es bei dieser Abfrage bewenden lassen oder den Wert und allenfalls die Standardabweichung überschreiben und als Bedingung speichern. Hier wird er den Wert der Ordinate null setzen, um auszudrücken, dass der Punkt auf der Geraden liegen soll.

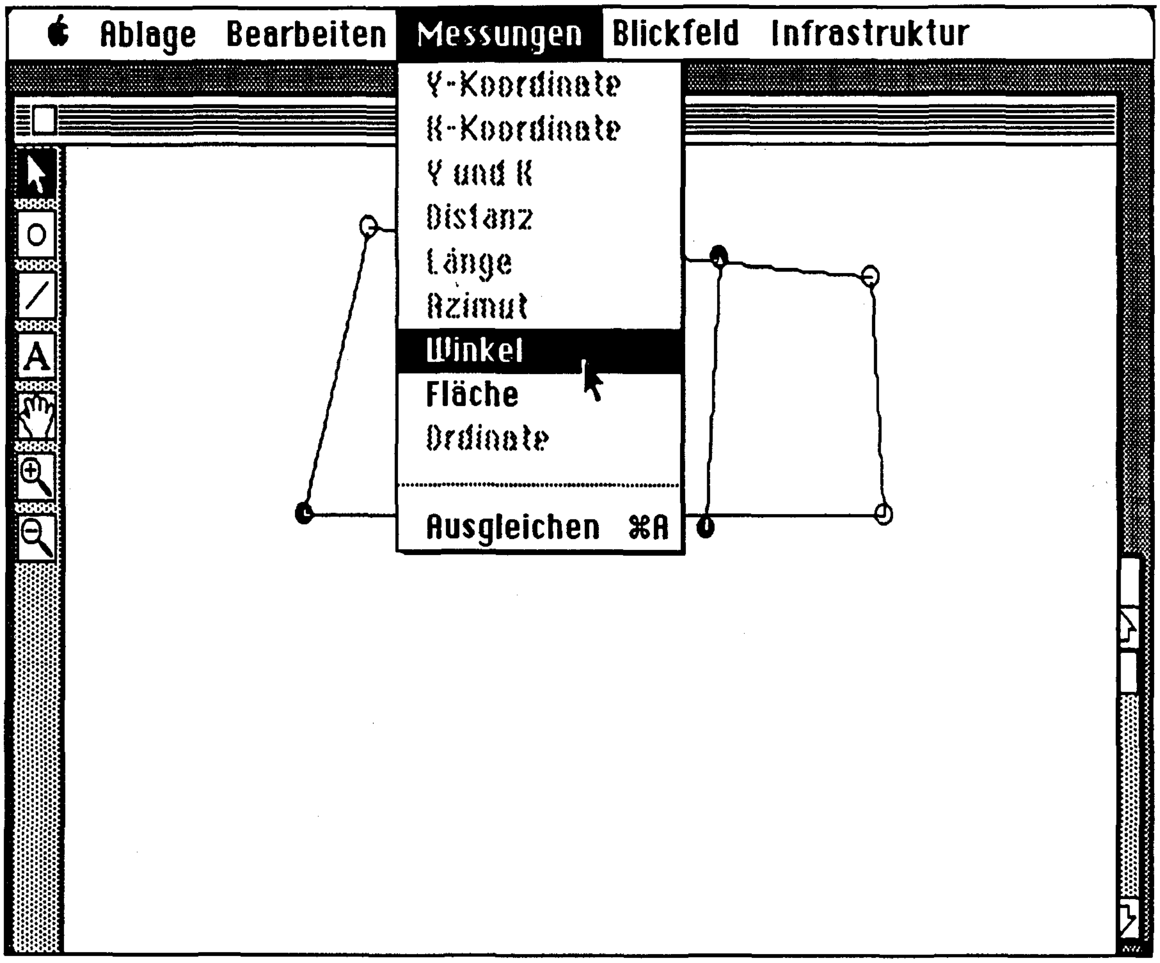

Abbildung 6-13: Angabe einer weiteren Bedingung

Die Winkel- und Flächen-Bedingungen werden in der gleichen Art wie die Ordinatenbedingung angegeben. Sie sind in der gegenwärtigen Version von HILS für Punkte definiert. Der Benützer hat hier drei Grenzpunkte ausgewählt, die einen rechten Winkel bilden sollen.

Komplexere Bedingungen können mit einem reduzierten Bedingungskalkül in der Bedingungsliste (hier: 'Liste der Beobachtungen') als Text formuliert werden. Sie dürfen Linearkombinationen und Gleichsetzungen von Skalaren enthalten.

Die Auswertung der Bedingungen durch eine Ausgleichung erfolgt auf Verlangen. Der Benützer skizziert normalerweise eine Figur, gibt die Bedingungen dazu an und verlangt dann eine Ausgleichung. Er kann aber jederzeit die bereits angegebenen Bedingungen auswerten lassen, um eine verbesserte graphische Darstellung zu erhalten.

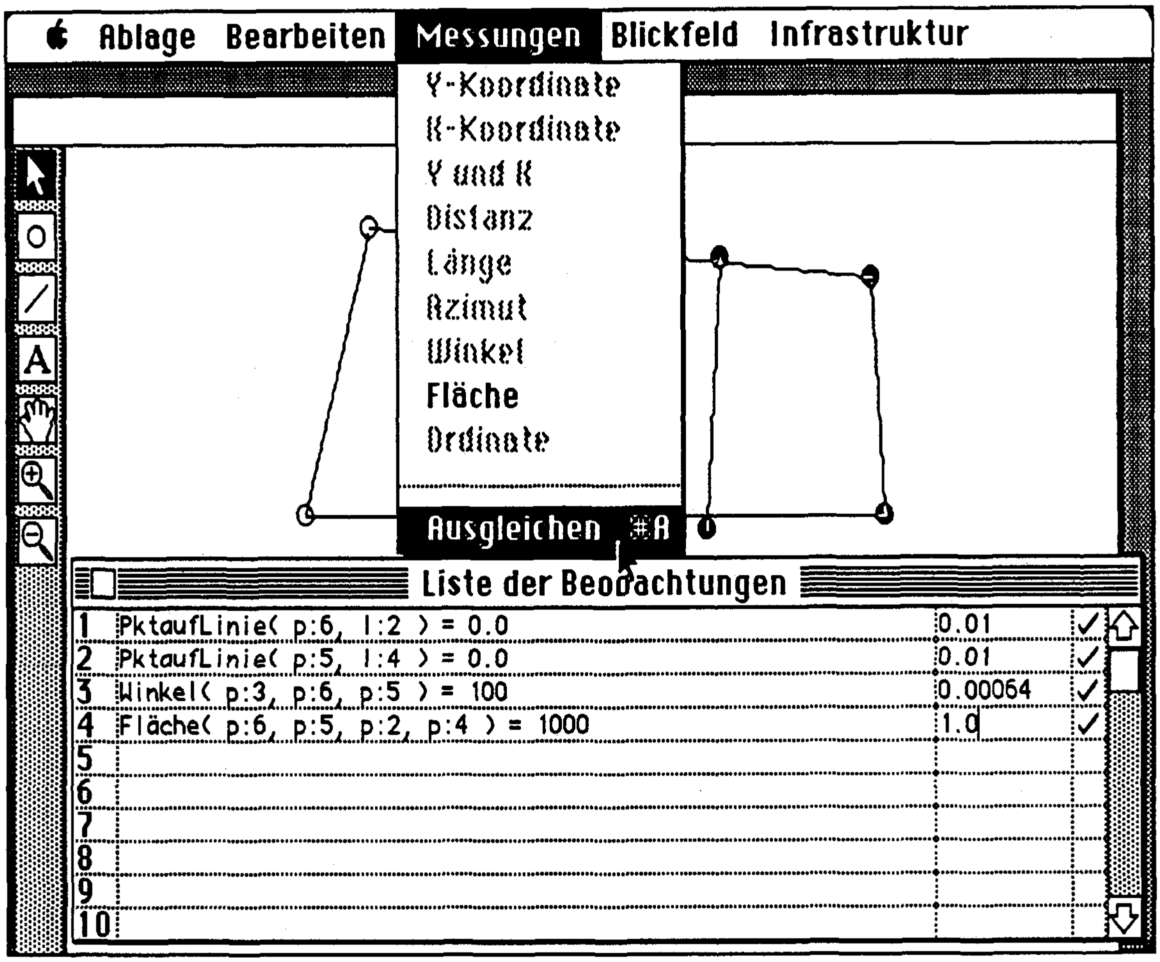

Abbildung 6-14: Auswertung der Bedingungen auf Verlangen

Der Benützer verlangt die Auswertung der angegebenen Bedingungen durch eine Ausgleichung.

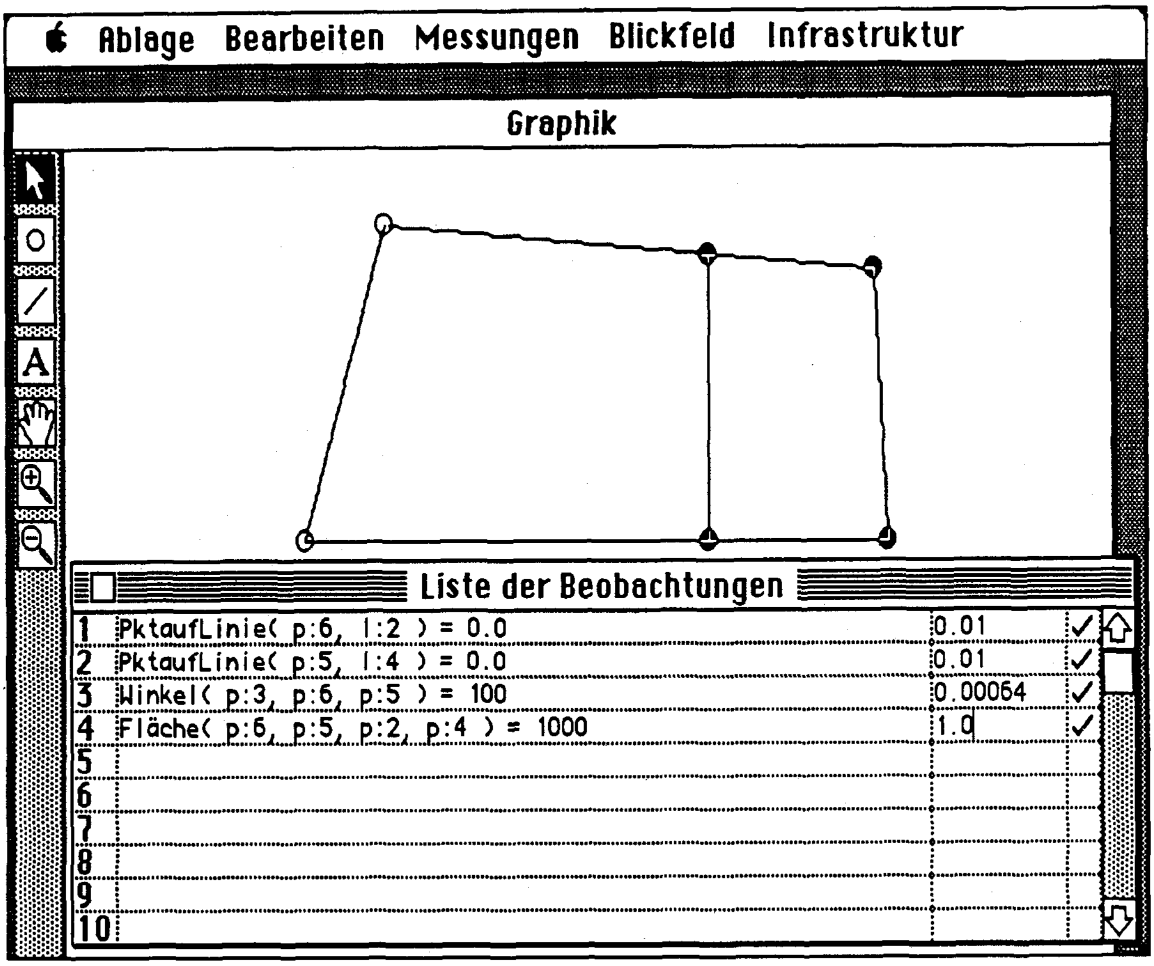

Abbildung 6-15: Modellzustand nach der Auswertung

Das System hat die Bedingungen ausgewertet und stellt den neuen Modellzustand in der Graphik dar.

Zur Beurteilung der Qualität einer Lösung können für die Punkte mittlere Fehlerellipsen, d.h. zweidimensionale Konfidenzintervalle, dargestellt werden. Sie geben Auskunft über die Genauigkeit der Punktbestimmung durch die Bedingungen. Der Benützer kann daraus schliessen, wo allenfalls zusätzliche Bedingungen notwendig sind.

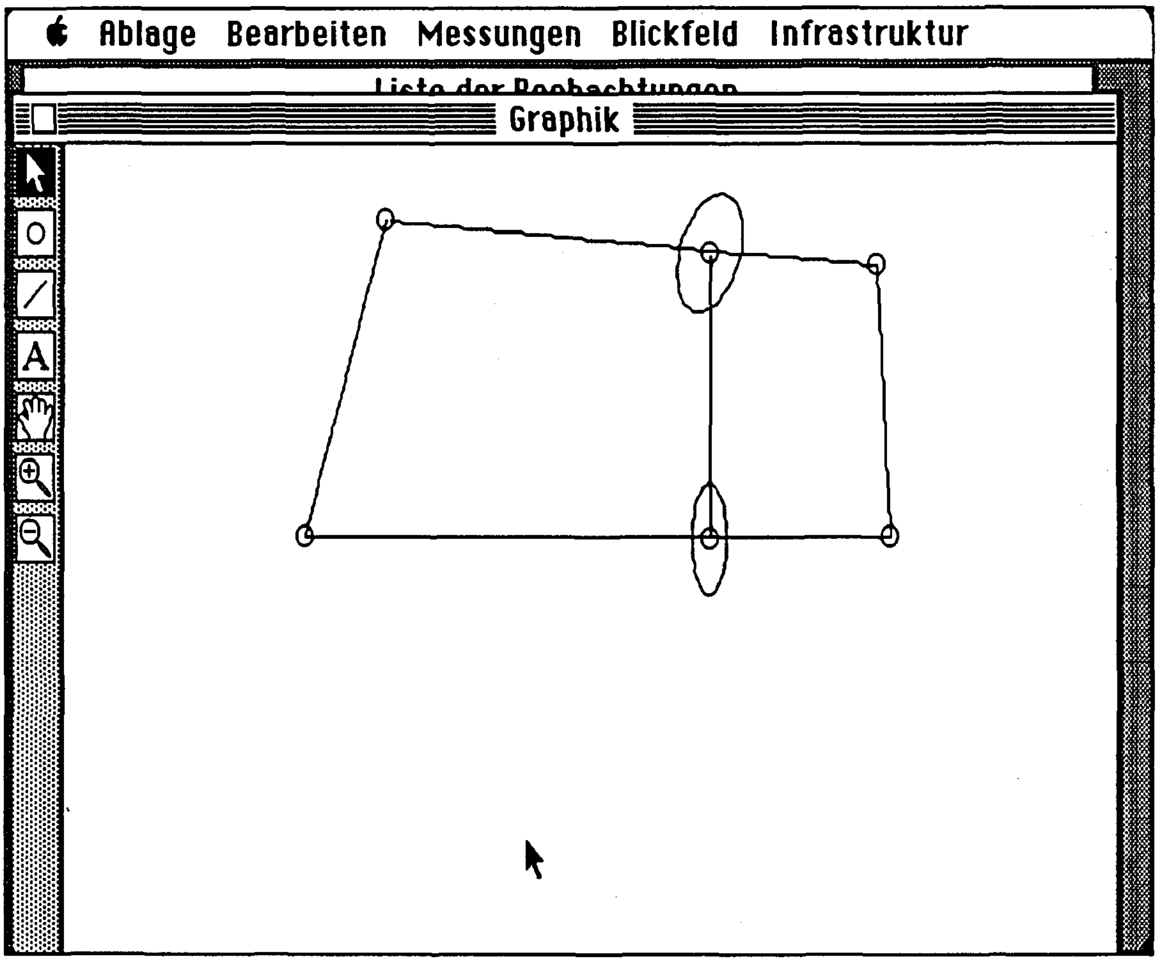

Abbildung 6-16: Fehlerellipsen

Auf Wunsch des Benützers hat das System mittlere Fehlerellipsen für die neuen Grenzpunkte dargestellt.

Ein schriftliches Protokoll einer HILS-Sitzung wird fortlaufend erstellt und kann editiert sowie gedruckt werden. Es enthält die vom Benützer angegebenen Bedingungen sowie detaillierte Ergebnisse von Ausgleichungen und Abfragen. Die Graphik kann auf einen Drucker oder Plotter ausgegeben werden. Durch weitere Programmfunktionen kann der Benützer

- den dargestellten Modellausschnitt vergrössern, verkleinern und verschieben
- geometrische Elemente (um)benennen
- Masseinheiten und Default-Werte für die Darstellung und Auswertung setzen.

7. Rückblick und Ausblick

Abschliessend werden einige verwandte Arbeiten (7.1.), Stärken und Schwächen der vorliegenden Arbeit (7.2.) sowie offene theoretische und praktische Fragen (7.3.) diskutiert.

7.1. Verwandte Arbeiten

Systeme, die geometrische Probleme aufgrund von Bedingungen lösen (*'constraint-based systems'*), sind keine neuen Erfindungen. Eine Pionierleistung auf diesem Gebiet war die Entwicklung von *Sketchpad* durch Ivan Sutherland vor mehr als einem Vierteljahrhundert [Sutherland 1963]. Dieses System war seiner Zeit - vor allem den Möglichkeiten der damaligen Hardware - weit voraus, hat aber seither erstaunlich wenig Nachahmer gefunden. Mit Sketchpad konnten geometrische Figuren am Bildschirm gezeichnet und editiert sowie topologische und metrische Bedingungen dazu angegeben werden. Zur Auswertung der Bedingungen wurde u.a. eine Relaxationsmethode verwendet, welche der hier vorgeschlagenen Ausgleichung nahe verwandt ist und ebenfalls die Bildschirmzeichnung als Näherungslösung verwendet.

Viele Ideen von Sketchpad wurden in *ThingLab* [Borning 1979], einem objekt-orientierten System für Simulationen, wieder aufgegriffen und verallgemeinert. Bedingungen dienen in ThingLab dazu, Beziehungen zwischen Teilen von simulierten Objekten, z.B. geometrischen Figuren oder physikalischen Apparaten, zu beschreiben. Der Benützer kann neue Objekte, zugehörige Bedingungsarten und Algorithmen zu deren Auswertung definieren. Dazu muss er allerdings Programmprozeduren schreiben. ThingLab wurde in Smalltalk [Goldberg & Robson 1980] implementiert und hat mit seiner zu Experimenten einladenden Benützerschnittstelle viel zur Wiederbelebung des Bedingungs-Ansatzes beigetragen. Es ist seinerseits in verschiedenen Richtungen weiterentwickelt worden [Borning & Duisberg 1986, Maloney et al. 1989].

In [Brüderlin 1988] wird der interessante Vorschlag gemacht, eine deskriptive Interaktion mit einer konstruktiven Lösungsmethode zu kombinieren. Der Benützer kann dabei einfache geometrische Bedingungen über Punkte angeben und das System sucht eine Lösung anhand von Prolog-Regeln für Konstruktionsschritte, statt numerisch über Gleichungssysteme. Die Prädikatenlogik wird also nicht nur zur Beschreibung, sondern auch zur Lösung der Aufgaben verwendet. Dem Benützer kann gezeigt werden, wo er weitere Bedingungen eingeben soll und wo allenfalls Widersprüche auftreten. Der Ansatz wurde auch auf dreidimensionale geometrische Modelle erweitert.

Eine Reihe von Systemen wurde mit dem Ziel entwickelt, die interaktive Erstellung von Illustrationen mittels Bedingungen zu erleichtern. Die bekanntesten Vertreter dieser Richtung sind Juno und IDEAL. *Juno* [Nelson 1985] bietet Punkte als einzige geometrische Objekte an. Es können vier elementare Bedingungen über Punktepaare (Strecken) angegeben werden: horizontale und vertikale Ausrichtung, Parallelität und Kongruenz. Diese lassen sich auch zu höheren Bedingungen zusammensetzen, die jedoch keine Skalare (Masse) enthalten können. Die Beschränkung auf wenige elementare Bedingungen ermöglicht es, diese in verbaler und graphischer Form (durch 'icons') anzugeben und zu editieren. Die Auswertung der nicht-linearen Bedingungsgleichungen geschieht durch eine Newton-Raphson Iteration und verwendet Näherungswerte, die der Benützer eintippt oder graphisch angibt.

In *IDEAL* [van Wyk 1982] kann der Benützer Objekte durch Punkte definieren, z.B. Strecken oder Rechtecke, und Bedingungen dazu angeben. Diese können arithmetische Operatoren enthalten, müssen aber immer durch elementare Bedingungen über Punkte ausgedrückt werden. Eine grundlegende Idee in IDEAL ist die Verwendung von komplexen Zahlen, wodurch numerische und geometrische Objekte einheitlich behandelt werden können. Das verwendete Gauss'sche Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme beschränkt die möglichen Bedingungen auf solche, die sich durch lineare Gleichungen ausdrücken lassen.

Als verwandte Arbeit mit dem Ziel einer Anwendung auf Ingenieuraufgaben ist nur ein am M.I.T. entworfenes [Light & Gossard 1982] CAD-System bekannt. Davon wurde inzwischen auch eine kommerzielle Version entwickelt. Der im zitierten Artikel beschriebene Prototyp erlaubt, die Lage von charakteristischen Punkten geometrischer Elemente durch "Dimensionen" (Bedingungen über Abstände, Winkel und Flächeninhalte) festzulegen. Die Auswertung wendet wie in Juno die Newton-Raphson Methode direkt auf die Bedingungsgleichungen an. Unter- und Überbestimmungen können damit zwar automatisch festgestellt und lokalisiert werden, aber es ist nicht wie bei einer Ausgleichung eine Lösung mit minimierten Abweichungen von den Bedingungen möglich.

Im Bereich kommerzieller *raumbezogener Informationssysteme* fliesst das Konzept der Bedingungen aus speziellen Anwendungen zur Bereinigung von digitalisierten Plänen [Schenk 1986] allmählich in allgemeine Editierfunktionen ein. So können die, bei Digitalisierungen vorrangigen, Bedingungen über rechte Winkel, Parallelität und Kollinearität in einigen Systemen durch Bedingungen über Abstände und allgemeine Winkel ergänzt sowie durch eine Ausgleichung ausgewertet werden.

7.2. Stärken und Schwächen dieser Arbeit

Der in dieser Arbeit vorgeschlagene Editor für geometrische Modelle geht durch die Kombination folgender Eigenschaften über bisher bekannte Vorschläge hinaus:

- Geometrische *Bedingungen* werden als primäre Objekte eines geometrischen Modells behandelt. Sie sind auch nach ihrer Auswertung als solche vorhanden und können in benützernaher Form editiert werden.
- Mit dem Konzept der *Masse* lässt sich die Vielfalt der möglichen Bedingungen auf wenige Funktionen und Relationen zurückführen. Die Interaktionssprache wird dadurch mächtig, ohne einen grossen Umfang anzunehmen.
- Die Interaktionssprache basiert auf dem *Geometrischen Bedingungskalkül*, der die differentialgeometrische Beschreibung von Punkten, Geraden und Kreisen in der Ebene vollständig abdeckt. Das Angebot möglicher Bedingungen ist damit mathematisch begründet und nicht auf spezielle Anwendungen beschränkt.
- Der Bedingungskalkül und damit auch die Interaktionssprache erlauben *Erweiterungen* ihrer Ausdrucksstärke. Dadurch kann der Benützer neue Bedingungsarten als arithmetische und logische Kombinationen von Funktionen und Relationen definieren.
- Zur Auswertung geometrischer Bedingungen dient eine *Ausgleichung* nach der Methode der kleinsten Quadrate. Damit können sowohl eindeutig bestimmte, als auch unter- oder überbestimmte Situationen einheitlich behandelt werden. Der Einfluss der einzelnen Bedingungen kann vom Benützer gesteuert werden.
- Durch die Verwendung von *Skizzen* als Grundlage der interaktiven Beschreibung geometrischer Modelle können auch unvollständige Beschreibungen erfasst und ausgewertet werden.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde der *numerischen Lösung* der Normalgleichungen in der Ausgleichung keine besondere Beachtung geschenkt. Es ging vielmehr darum, zuerst die grundsätzliche Eignung der Ausgleichungsmethode für die Unterstützung der Interaktion zu zeigen. Die Lösung der Normalgleichungen durch eine gewöhnliche Matrizeninversion hat sich denn auch als ungenügend herausgestellt. Dem Problem, dass die Auswertung rechenintensiv ist, kann zwar mit einer schrittweisen Ausgleichung begegnet werden. Diese ist jedoch nicht bei allen Aufgaben erwünscht. Eine Optimierung der Algorithmen und Speichertechniken für die gesamthafte Ausgleichung von Bedingungen ist in jedem Fall unerlässlich.

Während bei realistischen Problemstellungen im allgemeinen keine Konvergenzprobleme auftreten, haben die Güte der skizzierten Näherungslösung und die Gewichtung der Bedingungen doch einen deutlichen Einfluss auf das *Konvergenzverhalten*. Besonders die Frage, wie die Gewichtsverhältnisse für verschiedene

Bedingungsarten zu wählen sind, ist noch offen [Schenk 1985]. Die bisherigen improvisierten Annahmen darüber führen in sehr seltenen Fällen zu nicht konvergierenden Lösungen. Ebenfalls noch ungewiss ist der Einfluss, den Bedingungen über Kreise auf die numerische Stabilität der Auswertung haben. Für weitere Kurvenformen ist die Eignung der vorgeschlagenen Ausgleichungsmethode fragwürdig [Krasznai 1988].

7.3. Zukünftige Arbeiten und offene Fragen

Das *praktische* Ziel weiterer Arbeiten ist es, einen Geometrie-Editor in ein raumbezogenes Informationssystem zu integrieren. Dies soll es erlauben, den Datenfluss von einer Erfassung im Feld [Brügger 1988] über die Aufbereitung und interaktive Bearbeitung bis zur Auswertung und Wiedergabe zu gewährleisten. Ein Schritt in diese Richtung ist die Verbindung der hier vorgeschlagenen Interaktion mit der Methode der Zellkomplexe zur konsistenten Verwaltung geometrischer Modelle [Frank & Kuhn 1986]. Dabei sind keine konzeptionellen Schwierigkeiten zu erwarten: Beim Skizzieren geometrischer Modelle liefert der Benützer gerade die Information über topologische Beziehungen, die in Zellkomplexen gespeichert wird. In einem zweiten Schritt ist das Editieren auf geometrische Modelle mit thematischer Information [Steudler 1988] zu erweitern.

Aus *theoretischer* Sicht bleiben noch viele Fragen offen. Sie betreffen hauptsächlich die Interaktion bei der Beschreibung geometrischer Bedingungen. Abschliessend seien einige mögliche Forschungsthemen erwähnt:

- Bei einer Beschränkung auf sehr wenige, elementare Bedingungsarten können geometrische Bedingungen symbolisch in einer graphischen Darstellung eingetragen werden [Nelson 1985]. Für eine umfassende Beschreibung geometrischer Modelle in der hier vorgeschlagenen Art scheinen aber graphische Mittel nicht auszureichen. Dies lassen schon die traditionellen Darstellungsmittel für Bedingungen in Skizzen und Plänen vermuten: Sie gehen selten über Symbole für Abstände, Winkel und Parallelitäten hinaus [SIA 1985]. Versuche, allgemeine Bedingungen in interaktiven Systemen graphisch darzustellen, haben bis heute zu keinen befriedigenden Ergebnissen geführt [Borning 1986]. Die *Darstellung und Manipulation abstrakter Beziehungen* bildet jedoch einen interessanten Forschungsgegenstand [Oberquelle 1981]. Dessen Behandlung kann sich unter anderem auf intuitives und formalisiertes Wissen aus der Kartographie [Bertin 1967] und aus der Theorie graphischer Darstellungen im allgemeinen [Tufte 1983] stützen.
- Der vorgeschlagene Geometrie-Editor setzt voraus, dass die topologische Information zu einem geometrischen Modell bekannt ist und in einer Skizze vollständig dargestellt

werden kann. Für Modelle, bei welchen dies nicht zutrifft, sind allenfalls mehrere versuchsweise Beschreibungen notwendig. Es bleibt zu untersuchen, wie sich Modelle beschreiben lassen, deren *topologische Information unsicher oder unvollständig* ist. In einem ersten Schritt sollten bessere Möglichkeiten zum Editieren topologischer Bedingungen geschaffen werden, so dass sich z.B. über skizzierte Punkte und Kurven nachträglich zusätzliche Inzidenzbedingungen angeben liessen.

- Der Ansatz zur interaktiven Gewichtung der Bedingungen durch Standardabweichungen ist noch zu stark an die Auswertungsmethode gebunden. Die Sprachmittel für Aussagen über die Unsicherheit von Bedingungen könnten in Richtung von allgemeinen *Metabedingungen* weiterentwickelt werden. Dieser vielversprechende Aspekt des Bedingungs-Ansatzes ist bisher allerdings noch kaum untersucht worden [Leler 1988].
- Eine Verallgemeinerung zum Editieren *dreidimensionaler* Modelle scheint grundsätzlich möglich zu sein. Das manuelle Skizzieren räumlicher Modelle in Form verschiedener Perspektiven dient etwa in der Architektur, im Bauwesen oder im Maschinenbau zur Beschreibung von geometrischen Problemen. Welche Interaktionstechniken sich für eine dreidimensionale graphische Eingabe durchsetzen werden, ist im Moment noch nicht klar [Forrest 1987b].
- Unabhängig von diesen Fragen der Interaktionsgestaltung wäre zu prüfen, für welche weiteren Zwecke der Geometrische Bedingungskalkül einsetzbar ist. Eine Anwendung ist überall dort denkbar, wo eine *symbolische Darstellung geometrischer Information* auf hoher Stufe und unabhängig von einer Auswertung erforderlich ist. Dies ist etwa bei beobachtungsbasierten raumbezogenen Informationssystemen [Buyong & Frank 1989] oder beim Datenaustausch zwischen verschiedenen Systemen [Dorfschmid et al. 1988] der Fall.

Literaturverzeichnis

Apple Programmer's and Developer's Association (1987). *Macintosh Programmer's Workshop Pascal.* Cupertino, CA.

Apple Computer Inc. (1987). *Human Interface Guidelines: The Apple Desktop Interface.* Addison-Wesley.

Bartelme, N. (1988). *GIS Technologie: Geoinformationssysteme, Landinformationssysteme und ihre Grundlagen.* Springer-Verlag.

Bazaraa, M.S.& Shetty, C.M. (1979). *Nonlinear Programming - Theory and Algorithms.* John Wiley & Sons.

Bédard, Y. (1986). *A Study of the Nature of Data Using a Communication-Based Conceptual Framework of Land Information Systems.* Ph.D. Thesis, University of Maine.

Bertin, J. (1967). *Sémiologie Graphique.* Gauthier-Villars.

Bier, E.A. & Stone, M.C. (1986). "Snap-Dragging" *Computer Graphics, 20* (4), 233-240.

Borning, A. (1979). *THINGLAB - A Constraint-Oriented Simulation Laboratory.* Ph.D. Thesis, Stanford University.

Borning, A. (1986). "Defining Constraints Graphically" *Proceedings CHI'86*, 137-143.

Borning, A. & Duisberg, R. (1986). "Constraint-Based Tools for Building User Interfaces" *ACM Transactions on Graphics, 5* (4), 345-374.

Bossler, J.D. (1972). *Bayesian Inference in Geodesy.* Ph.D. Thesis, The Ohio State University.

Breidenbach, W. & Süss, W. (1967). "Geometrische Konstruktionen" in: *Grundzüge der Mathematik,* H.Behnke et al. (Eds). Vandenhoeck & Ruprecht.

Brüderlin, B.D. (1988). *Rule-Based Geometric Modelling.* Informatik-Dissertationen Nr.7, ETH Zürich.

Brügger, B. (1988). "Softwarekonzepte für die Datenerfassung im Feld" *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik,* 11/88, 342-344.

Burrough, P.A. (1986). *Principles of Geographical Information Systems for Land Resources Assessment.* Oxford Science Publications, Clarendon Press.

Buyong, T. & Frank, A.U. (1989). "Measurement-Based Multiporpose Cadastre" *Proceedings ACSM/ASPRS Annual Convention.* Baltimore, MD.

Carnap, R. (1960). *Einführung in die Symbolische Logik.* Springer-Verlag.

Chevallier, J.-J. & Sievers, B. (1986). "Forschungsarbeiten im Bereich von LIS an der ETH Lausanne und Zürich", *FIG XVIII Congress*, Bericht 301.2, Toronto.

Clocksin, W.F. & Mellish, C.S. (1981). *Programming in Prolog.* Springer-Verlag.

Collins, S.H., Moon, G.C. & Lehan, T.H. (1983). "Advances in Geographic Information Systems" *Proceedings Auto-Carto Six*, 324-334, Ottawa, Canada.

Conzett, R. (1983). "Landinformationssysteme" *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik,* 5/83, 157-164.

Conzett, R. (1988). "Abstrakte Datentypen-Werkzeuge für den Geodäten" *Festschrift Rudolf Sigl zum 60.Geburtstag.*Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 287.

Courant, R. & Robbins, H. (1967). *Was ist Mathematik ?* Springer-Verlag.

Dorfschmid, J., Messmer, W., Kuhn, W., Schoeneich, H. (1988). *Amtliche Vermessung Schnittstelle (AVS): Rohentwurf für eine Norm.* EJPD, Projektleitung Reform Amtliche Vermessung, Bern.

Duff, I.S., Reid, J.K. (1976). "A Comparison of Some Methods for the Solution of Sparse Overdetermined Systems of Linear Equations" *Journal Inst. Maths. Applications*, *17*, 267-280.

Eco, U. (1976). *A Theory of Semiotics*. Indiana University Press.

Egenhofer, M.J. (1989). *Spatial Query Languages*. Ph.D. Thesis, Department of Surveying Engineering, University of Maine.

Egenhofer, M.J. & Frank, A.U. (1988). "A Precompiler for Modular, Transportable Pascal" ACM SIGPLAN Notices 23(3), 22-32.

EJPD (1987). *Die Zukunft unseres Bodens*. EJPD, Projektleitung Reform Amtliche Vermessung, Bern.

Farouki, R.T. & Hinds, J.K. (1985). "A Hierarchy of Geometric Forms" *IEEE Computer Graphics and Applications*, *5* (5), 51-78.

Fischer, G. & Böcker, H.-D. (1983). "The Nature of Design Processes and How Computer Systems can support them" in: *Integrated Interactive Computing Systems*, P.Degano, E.Sandewall (Eds.), 73-86. North Holland.

Foley, J.D. (1987). "Models and Tools for the Designers of User-Computer Interfaces", *NATO ASI on Theoretical Foundations of Comuter Graphics and CAD*. Il Ciocco, Italy.

Foley, J.D. & van Dam, A. (1982). *Fundamentals of Interactive Computer Graphics*. Addison-Wesley.

Forrest, A.R. (1987a). "Computational Geometry and Software Engineering: Towards a Geometric Computing Environment" in: *Techniques for Computer Graphics*, D.F.Rogers, R.A.Earnshaw (Eds.), 23-37. Springer.

Forrest, A.R. (1987b). "User Interfaces for Three-Dimensional Geometric Modelling" in: *Geoprocessing,* SCGA Jahrestagung, K.Brassel (Ed.), Zürich.

Frank, A.U. (1982). "PANDA - Pascal Netzwerk Datenbankverwaltungssystem", Bericht No. 62, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

Frank, A.U. (1983). *Datenstrukturen für Landinformationssysteme - Semantische, Topologische und Räumliche Beziehungen in Daten der Geo-Wissenschaften.* Dissertation, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, Mitteilungen No. 34, ETH Zürich.

Frank, A.U. (1985). "Anforderungen an Datenbanksysteme zur Verwaltung grosser raumbezogener Datenbestände" Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 1/85.

Frank, A.U. & Kuhn, W. (1986). "Cell Graphs: A Provable Correct Method for the Storage of Geometry" *Proceedings Second International Symposium on Spatial Data Handling.*Seattle, Washington, 411-436.

Goldberg, A. & Robson, D. (1981). "The Smalltalk-80 System" *BYTE, 6* (8).

Goldin, G.A. (1982). "Mathematical Language and Problem Solving" *Visible Language, XVI* (3).

Greenberg, D. (1984). "The Coming Breakthrough of Computers as a true Design Tool" *Architectural Record*, September 1984.

Halasz, F. & Moran T.P. (1982). "Analogy considered harmful" *Proceedings Human Factors in Computer Systems Conference*, Gaithersburg, MD.

Halmos, P.R. (1974). *Measure Theory.* Springer-Verlag.

Hamilton, W.C. (1967). *Statistics in Physical Science.* The Ronald Press Company.

Hartson, H.R. & Hix, D. (1989). "Human-Computer Interface Development: Concepts and Systems" *ACM Computing Surveys, 21* (1), 5-92.

Herring, J.R. (1987). "TIGRIS: Topologically Integrated Geographic Information System" *Proceedings Auto Carto 8*, Baltimore, MD.

Jadrnicek, R. (1984). "Computer Aided Design" *BYTE* (1), 172-209.

Koch, K.-R. (1987). *Parameterschätzung und Hypothesentests.* Ferdinand Dümmler's Verlag.

Kowalski, R. (1979). *Logic for Problem Solving.* Aritificial Intelligence, Series 7. The Computer Science Library, North Holland.

Krasznai, P. (1988). *Die Klotoide in der Horizontalen Trassierungslinie.* Dissertation, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

Kreyszig, E. (1968). *Differentialgeometrie.* Akademische Verlagsgesellschaft.

Kuhn, W. (1989). "Geometrische Modellierung in raumbezogenen Informationssystemen: Die Methode der Zellkomplexe" *Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz*, Folge 64.

Leler, Wm. (1988). *Constraint Programming Languages - Their Specification and Generation.* Addison-Wesley.

Lewis, T.O. & Odell, P.L. (1971). *Estimation in Linear Models.* Prentice Hall.

Light, R. & Gossard, D. (1982). "Modification of geometric models through variational geometry" *computer-aided design, 14* (4), 209-214.

Liskov, B. & Zilles, S. (1977). "An Introduction to Formal Specifications of Data Abstractions" in: *Current Trends in Programming Methodology*, Yeh, R.T. (Ed.), Vol. 1, 1-32.

Maloney, J.H., Borning, A., Freeman-Benson, B. (1989). "Constraint Technology for User-Interface Construction in ThingLab II" *Proceedings OOPSLA'89* (Object Oriented Programming Systems, Languages and Applications), 381-388. New Orleans, Louisiana.

Mates, B. (1978). *Elementare Logik, Prädikatenlogik der ersten Stufe*. Vandenhoeck & Ruprecht.

McLaughlin, J.D. & Nichols, S.E. (1987). "Parcel-Based Land Information Systems" *Surveying and Mapping, 47* (1), 11-29.

Mendelson, E. (1964). *Introduction to Mathematical Logic*. Van Nostrand.

Minsky, M.L. (1968). "Matter, Mind, and Models" in: *Semantic Information Processing*, Minsky, M.L. (Ed.). MIT Press.

Moran, T.P. (1981). "The Command Language Grammar: a representation for the user interface of interactive computer systems" *International Journal of Man-Machine Studies, 15*, 3-50.

Naas, J. & Schmid, H.L. (1979). *Mathematisches Wörterbuch mit Einbeziehung der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag.

NCGIA (1989). "The Research Plan of the National Center for Geographic Information and Analysis" *International Journal of Geographical Information Systems, 3* (2), 117-136.

Nelson, G. (1985). "Juno, a constraint-based graphics system" Proceedings ACM SIGGRAPH'85, *Computer Graphics, 19* (3), 235-243.

Newell, A. & Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. Prentice-Hall.

Newell, A. & Simon, H.A. (1976). "Computer Science as Empirical Inquiry: Symbols and Search" *ACM Communications, 19* (3), 113-126.

Oberquelle, H. (1981). "Communication by graphic set representations" Bericht IFI-HH-B-75/81, Fachbereich Informatik , Universität Hamburg.

Parker, H.D. (1988). "The unique qualities of a geographic information system: a commentary" *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, 54* (11), 1547-1549.

Polya, G. (1949). *Schule des Denkens - Vom Lösen mathematischer Probleme*. A.Francke AG Verlag.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery*. Wiley.

Pope, A.J. (1974). "Two approaches to nonlinear least squares adjustments" *Canadian Surveyor, 28* (5), 663-669.

Preparata, F.P. & Shamos, M.I. (1985). *Computational Geometry - An Introduction.* Springer -Verlag.

Robinson, V.B. & Frank, A.U. (1985). "About Different Kinds of Uncertainty in Collections of Spatial Data" *Proceedings Auto Carto 7*, 440-449. Washington D.C.

Samet, H. (1989a). *The Design and Analysis of Spatial Data Structures.* Addison-Wesley.

Samet, H. (1989b). *Applications of Spatial Data Structures - Computer Graphics, Image Processing, and GIS.* Addison-Wesley.

Schek, H.-J., Steidler, F. & Schauer, U. (1977). "Ausgleichung grosser geodätischer Netze mit Verfahren für schwach besetzte Matrizen" Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Heft 87.

Schenk, T. (1985). "Zur Gewichtsbestimmung von Bedingungsgleichungen" *Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik*, 9/85, 342-344.

Schenk, T. (1986). "Ausgleichung von Rechtwinkelzügen" *Bildmessung und Luftbildwesen, 54* (4).

Schmid, H.H. (1977). "Ein allgemeiner Ausgleichungs-Algorithmus für die numerische Auswertung in der Photogrammetrie" Mitteilungen No. 22, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

Schwarz, H.R. (1970)."Die Methode der konjugierten Gradienten in der Ausgleichungsrechnung" *Zeitschrift für Vermessung, 95,* 130-140.

Schwarz, H.R., Rutishauser, H. & Stiefel, E. (1972). *Numerik symmetrischer Matrizen.* Teubner Verlag.

SIA (1985). "Planbearbeitung im Bauwesen" Empfehlung 400, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein.

Simon, H.A. (1981). *The Sciences of the Artificial.* MIT Press.

Smith, D.C.S., Irby, C., Kimball, R., Verplank, B. & Harslam, E. (1982). "Designing the Star User Interface" *BYTE, 7* (4), 242-282.

Stark, W. (1984). "Untersuchungen zur Lösung und Inversion schwach besetzter grosser geodätischer Normalgleichungen" Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 301.

Steidler, F. (1980). "Darstellung und Vergleiche von Lösungsstrategien für schwach besetzte Normalgleichungssysteme in der Geodäsie und in der Photogrammetrie" Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 261.

Steudler, D. (1988). "Analyse und Implementation des Grunddatensatzes der RAV mit dem raumbezogenen Datenbanksystem PANDA" Bericht Nr. 155, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

Sutherland, I.E. (1963). "SKETCHPAD: A Man-Machine Graphical Communication System" *Proceedings Spring Joint Computer Conference*, 329-346.

Tomlinson, R.F. (1984). "Geographic Information Systems - A New Frontier" Keynote Address, *International Symposium on Spatial Data Handling*, Zürich.

Tufte, E.R. (1983). *The Visual Display of Quantitative Information.* Graphics Press.

van der Waerden, B.L. (1957). *Mathematische Statistik.* Springer-Verlag.

van Wyk, C.J. (1982). "A High-Level Language for Specifying Pictures" *ACM Transactions of Graphics, 1* (2), 163-182.

Vanícek, P. & Krakiwsky, E. (1982). *Geodesy - The Concepts.* North-Holland.

White, R.M. (1987). *HILS - Development of a Human Interfaced Least Squares Adjustment.* Master Thesis, University of Maine. Erschienen als Bericht Nr. 131, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

White, R.M. (1988a). "Applying Direct Manipulation to Geometric Construction Systems" in: *Computer Graphics International'88*, N.Magnenat, D.Thalmann (Eds.), Geneva.

White, R.M. (1988b). "HILS - Human Interface to Least Squares" Bericht No. 152, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH Zürich.

Wolf, H. (1968). *Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Ferdinand Dümmler's Verlag.

Zurmühl, R. (1964). *Matrizen und ihre technischen Anwendungen.*Springer-Verlag.

Dank

Prof. Rudolf Conzett† hat es mir ermöglicht, diese Arbeit zu unternehmen und in einer anregenden und vertrauensvollen Atmosphäre auszuführen. Seine uneingeschränkte Unterstützung und liebevolle Herausforderung bleiben mir ein Vorbild.

Prof. Dr. Alessandro Carosio hat freundlicherweise die Nachfolge von Prof. Conzett als Doktorvater und Referent übernommen und mir für die Fertigstellung der Arbeit grosse Freiheit gewährt. Prof. Dr. Hans-Peter Frei hat sich als Korreferent mit Verständnis für die Schwierigkeiten einer interdisziplinären Arbeit zur Verfügung gestellt.

Prof. Dr. André Frank schlug das Thema der Arbeit vor und gab zahllose wesentliche Impulse zur Durchführung. Als hervorragender Mentor konnte er mich begeistern für das, was Informatik in der Vermessung und darüber hinaus bedeuten kann.

Viele Kollegen am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie haben mich in verschiedenster Weise unterstützt. Besonders wertvoll waren die ungezählten Diskussionen mit Dr. Peter Krasznai, von dem ich auf vielen Gebieten lernen durfte, die stets humorvollen Ermutigungen durch Benoît Studemann sowie die Hilfe von Michael White, die immer schon geleistet war, bevor ich sie mir wünschen konnte.

Zu all dem konnte es aber nur dank der Unterstützung durch meine Mutter und meinen Vater kommen. Ihnen, den erwähnten Personen und den vielen anderen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, danke ich herzlich.

Lebenslauf

24. August 1957	Geboren in Zürich
1964 - 1972	Rudolf Steiner Schule in Zürich
1972 - 1976	Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium in Zürich
1976	Matura Typus C
1976 - 1981	Studium an der ETH Zürich, Abteilung für Vermessung und Kulturtechnik; Praktika im In- und Ausland
April 1982	Diplom als Vermessungs-Ingenieur ETH
Mai 1982 - Juli 1984 und Oktober 1985 - Mai 1989	Assistent bei Professor R. Conzett (ab Oktober 1987 bei Prof. Dr. A. Carosio) am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich
Juli 1984 - Oktober 1985	Visiting Assistant Professor an der University of Maine, USA
seit Juni 1989	Research Associate am National Center for Geographic Information and Analysis (NCGIA), University of Maine.