Doctoral Thesis

Normalformen für Singularitäten von einparametrigen Flächenscharen

Author(s):
Petris, Jürg Erik Henrik

Publication Date:
1990

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-000586135

Diss. ETH Nr. 9016

Normalformen für Singularitäten von einparametrigen Flächenscharen

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels
DOKTOR DER MATHEMATIK
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
JÜRG ERIK HENRIK PETRIS
dipl. math. ETH Zürich
geboren am 7. Mai 1957
von Goldingen (Kt. St. Gallen)

Angenommen auf Antrag von :
Prof. Dr. Ch. Blatter , Referent
Prof. Dr. H. Knörrer , Korreferent

1990

Zusammenfassung

Einparametrige Flächenscharen lassen sich durch Diagramme (h,f) der Form

$$\mathbf{R}^3 \xleftarrow{\;h\;} \mathbf{R}^3 \xrightarrow{\;f\;} \mathbf{R}$$

beschreiben . Scharflächen sind dabei die Mengen $h(f^{-1}(c))$, wobei c der Scharparameter ist . Wir betrachten Diagramme $(h,f) \in C^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R})$. Generischerweise besitzen solche Diagramme neben den regulären Punkten Singularitäten aus einer Liste von neun verschiedenen Typen . Für diese zehn Fälle hat V. I. Arnol'd 1976 Normalformen angegeben (allerdings ohne Beweis) . In der Folge haben J. P. Dufour und M. J. Dias Carneiro Beweise für Teile dieser Liste geliefert . In der vorliegenden Arbeit sind die noch fehlenden Beweise durchgeführt . Durch die Unterscheidung von Normalformen bezügich starker C^∞-Äquivalenz (wobei für den Scharparameter c nur Translationen zugelassen sind) und gewöhnlicher C^∞-Äquivalenz erhalten wir zwei Listen von Normalformen , nämlich :

h_0 f_0

M_1: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x$;

M_2: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2$,

M_3: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x+z$;

M_4: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto z \pm x^2 \pm y^2 + \varphi(z^2)$, wobei $\varphi(0) = 0$;

M_5: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x + yz$;

M_6: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x + xz \pm y^2 + \alpha z^2 + \varphi(z^2)$, wobei $\alpha \neq 0$ und $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$;

M_7: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto y + z$;

M_8: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto z \pm y^2 + \varphi(x, z^3+xz)$, wobei $\varphi(0,0) = 0$;

M_9: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto y + yz + \alpha z^2 + \varphi(y, z^3+xz)$, wobei $\alpha \neq 0$ und
$\varphi(0,0) = \varphi_{,1}(0,0) = 0$;

M_{10}: $(x,y,z^4+xz^2+yz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto z + \varphi(x,y,z^4+xz^2+yz)$, wobei $\varphi(0,0,0) = 0$.

N_1: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x$;

N_2: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 \pm z^2$;

N_3: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x + z$;

N_4: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto \cancel{x + xz \pm y^2}$; $z + x^2 \pm y^2$

N_5: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x + yz$;

N_6: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto x + xz \pm y^2 + z^2$;

N_7: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto y + z$;

N_8: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\mid (x,y,z) \longmapsto z + y^2 + [27(z^3+xz)^2 + 4x^3]\psi(x, z^3+xz)$;

$+\beta y^2$ $\psi(y,z^3+xz)$

N_9: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!\shortmid\ (x,y,z) \longmapsto y+yz+z^4+(z^3+xz-y^3/4)\cancel{\psi(x,z^3+xz)}$, wobei $\psi(0,0)=0$;

N_{10}: $(x,y,z^4+xz^2+yz) \longleftarrow\!\!\shortmid\ (x,y,z) \longmapsto z+\varphi(x,y,z^4+xz^2+yz)$, wobei $\varphi=0$ auf der Kurve $t \longmapsto (-6t^2,8t^3,3t^4)$.

Unser Resultat kann dann wiefolgt formuliert werden :

Generischerweise gilt für Diagramme $(h,f) \in C^\infty(R^3,R^3\times R)$: In jedem Punkt $p \in R^3$ ist der Diagrammkeim $(h,f)_p$ stark äquivalent (bzw. äquivalent) zu einem Diagrammkeim $(h_0,f_0)_{(0,0,0)}$, wobei (h_0,f_0) ein Diagramm aus der Liste M_1 , ... , M_{10} (bzw. aus der Liste N_1 , ... , N_{10}) ist .

Die Normalformen M_4 , M_6 und M_9 unterscheiden sich von den entsprechenden Normalformen in der Liste von Arnol'd .

Für Diagramme in Normalform geben wir in allen Fällen Äquivalenzbedingungen an , welche wir bis auf einen Fall beweisen .

Abstract

One-parameter families of surfaces can be described by diagrams (h,f) of the form

$$\mathbb{R}^3 \xleftarrow{\;h\;} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\;f\;} \mathbb{R}$$

where the surfaces are given by the sets $h(f^{-1}(c))$ (c being the parameter of the family) . We consider diagrams in the class $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$. Beside the regular points such diagrams generically exhibit singularities of nine different types . In 1976 V. I. Arnold published a list of normal forms for these ten cases , but without proof . In the meantime J.P.Dufour and M.J.Dias Carneiro have verified parts of this list . In the work lying before proof of the remaining cases is given .

The distinction between strong C^∞- equivalence (where only translations are permitted for the family parameter c) and ordinary C^∞- equivalence yields the following two lists of normal forms :

$\qquad\qquad h_0 \qquad\qquad\qquad f_0$

M_1: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x$;

M_2: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2$,

M_3: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + z$;

M_4: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto z \pm x^2 \pm y^2 + \varphi(z^2)$, where $\varphi(0) = 0$;

M_5: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + yz$;

M_6: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + xz \pm y^2 + \alpha z^2 + \varphi(z^2)$, where $\alpha \neq 0$ and $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$;

M_7: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto y + z$;

M_8: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto z \pm y^2 + \varphi(x, z^3+xz)$, where $\varphi(0,0) = 0$;

M_9: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto y + yz + \alpha z^2 + \varphi(y, z^3+xz)$, where $\alpha \neq 0$ and
$\varphi(0,0) = \varphi_{.1}(0,0) = 0$;

M_{10}: $(x,y,z^4+xz^2+yz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto z + \varphi(x,y,z^4+xz^2+yz)$, where $\varphi(0,0,0) = 0$.

N_1: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x$;

N_2: $(x,y,z) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x^2 + y^2 \pm z^2$;

N_3: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + z$;

N_4: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto \cancel{x + xz \pm y^2}$; $z + x^2 \pm y^2$

N_5: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + yz$;

N_6: $(x,y,z^2) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto x + xz \pm y^2 + z^2$;

N_7: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto y + z$;

N_8: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\!| \ (x,y,z) \longmapsto z + y^2 + [27(z^3+xz)^2+4x^3]\psi(x, z^3+xz)$;

N_9: $(x,y,z^3+xz) \longleftarrow\!\shortmid (x,y,z) \longmapsto y+yz+z^4 + \beta y^2 + (z^3+xz-y^3/4)\cancel{\psi(x,z^3+xz)}\,\psi(y,z^3+xz)$, where $\psi(0,0)=0$;

N_{10}: $(x,y,z^4+xz^2+yz) \longleftarrow\!\shortmid (x,y,z) \longmapsto z+\varphi(x,y,z^4+xz^2+yz)$, where $\varphi=0$ on the curve $t \longmapsto (-6t^2,8t^3,3t^4)$.

Our result is briefly phrased the following :

For Diagrams $(h,f) \in C^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3\times\mathbf{R})$ generically in each point $p\in\mathbf{R}^3$ the germ $(h,f)_p$ is strongly equivalent to a germ $(h_0,f_0)_{(0,0,0)}$ of the list M_1 , ... , M_{10} and equivalent to a germ $(h_0,f_0)_{(0,0,0)}$ of the list N_1 , ... , N_{10} .

The normal forms M_4 , M_6 and M_9 differ from the corresponding normal forms given by Arnol'd .

For diagrams in normal form we give conditions of equivalence or strong equivalence respectively .