



Doctoral Thesis

## Spektrale Entscheidungen bei Präfixklassen

**Author(s):**

Ermanni, Luca

**Publication Date:**

1991

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000593217> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

**SPEKTRALE ENTSCHEIDUNGEN BEI PRÄFIXKLASSEN**

ABHANDLUNG

Zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER MATHEMATIK

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

LUCA ERMANNI

dipl. Chem. ETH

geboren am 23. Juni 1956

von Bissone (TI)

Angenommen auf Antrag von:

Prof. Dr. E. Engeler, Referent

Prof. Dr. H. Läuchli, Korreferent



**Zusammenfassung.**  $\Sigma(\varphi; \pi)$ , das  $\pi$ -Spektrum von  $\varphi$ , ist die Menge der Mächtigkeiten der endlichen Modelle von  $\varphi$  mit der Eigenschaft  $\pi$ . Die Frage, ob für eine Menge  $K$  von Sätzen erster Stufe das Problem der Erfüllbarkeit im Endlichen lösbar ist, wird zur Frage verallgemeinert, ob  $K$  bezüglich  $\Theta \pi$  - lösbar ist (d.h. ob es ein Verfahren gibt, welches für jedes  $\varphi \in K$  entscheidet, ob  $\Theta(\Sigma(\varphi; \pi))$  gilt), wobei  $\Theta$  mit einer beliebigen Eigenschaft über der Potenzmenge von  $\mathbf{N}$  identifizierbar ist. Es wird bewiesen, dass für eine beliebige Präfixklasse  $K$  das Problem der Erfüllbarkeit im Endlichen genau dann lösbar ist, wenn  $K$  bezüglich der Eigenschaft unendlich zu sein reduziert - lösbar ist. Dabei ist eine Struktur über einer endlichen Symbolmenge genau dann reduziert, wenn in ihr die Gleichheit durch eine Formel ohne Gleichheit und ohne Funktionszeichen definierbar ist. Mit einer etwas stärkeren Eigenschaft  $\pi$  als die Reduziertheit wird bewiesen, dass die  $\forall\forall\forall$ -Klasse sowohl bezüglich "unendlich" als auch bezüglich "Obermenge eines nichtleeren Endstückes"  $\pi$  - unlösbar ist. Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Eigenschaften  $\pi$  von Strukturen, die stärker als die Nichtstarrheit sind und liefert folgendes Ergebnis : Für jeden Satz erster Stufe kann man entscheiden, ob sein  $\pi$ -Spektrum leer ist, ob es unendlich ist und ob es Obermenge eines nichtleeren Endstückes ist. Als Anwendung der Theoreme, die zu diesem Ergebnis führen, gewinnt man  $\pi$ -spektraltheoretische Charakterisierungen der relationalen bzw. relationalen existentiell-universellen Sätze, die primitiv bzw. stabil erweiterbar sind.

**Abstract.** The  $\pi$ -spectrum,  $\Sigma(\varphi; \pi)$ , of the first-order sentence  $\varphi$ , is the set of the cardinalities of the finite structures satisfying  $\varphi$  and having the property  $\pi$ . Let  $K$  be a set of first-order sentences. The question whether the problem of finite satisfiability is solvable for  $K$  or not is generalized to the question whether  $K$  is  $\pi$ -solvable with respect to  $\Theta$  (i.e. whether there is a procedure that for every  $\varphi \in K$  decides if  $\Theta(\Sigma(\varphi; \pi))$  holds). In this definition any property over the power of  $\mathbf{N}$  can be taken as  $\Theta$ . It is shown that for any prefix class  $K$  the problem of finite satisfiability is solvable for  $K$  iff  $K$  is reduced-solvable with respect to "infinite". By definition a structure over a finite language is reduced iff equality is definable within it by a formula without equality or function signs. A property  $\pi$  somewhat stronger than "reduced" is used to show that already the  $\forall\forall\forall$ -prefix class is  $\pi$ -unsolvable with respect to the property of being infinite and to the property of containing a nonempty final segment. The last part of the work deals with some properties  $\pi$  stronger than "nonrigidity". The result is the following: For every first-order sentence it is possible to decide whether its  $\pi$ -spectrum is empty, whether it is infinite and whether it contains a nonempty final segment. The relational respectively the relational universal-existential sentences which can be extended to primitive respectively stable theories with an infinite model are characterised in terms of  $\pi$ -spectrum by applications of the theorems leading to this result.