Diss. ETH No. 9420

On Equilibrium, Stability and Nonlocality in Elasticity Theory

A dissertation submitted to the
Swiss Federal Institute of Technology Zürich
for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
Miguel Marcelo Sofer
Dipl. Masch. Ing. ETH
born November 1st 1957
citizen of Argentina

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Hans Brauchli, examiner
Prof. Dr. Michael Struwe, co-examiner

1991

Abstract

This dissertation describes an *alternative* theory of conservative non-linear elastodynamics in which the energy criterion of stability holds in a precise sense. The predictions of the theory are arbitrarily close to the predictions of classical elasticity for sufficiently smooth configurations and velocity fields, so that it 'borrows' its experimental verifications. This theory should be understood as a basis for the study and discussion of the foundations of mathematical elasticity theory, its value as a computational model is doubtful. It can be interpreted as either

1. a model of mathematical physics, describing the behaviour of matter, or

2. a mathematical approximation, in the sense that one can approximate discontinuous functions with smooth approximants.

Chapter 1 contains an introduction to the problem of proving the energy criterion of stability in elastodynamics, an informal discussion of the physical basis of the mathematical theory of elasticity and a final section in which the abstract setting of our problem is fixed.

In chapter 2 we define the concept of a potential regular on the Lebesgue space $\mathcal{L}^2$. We show that Hamilton's principle is equivalent for such potentials to a differential equation on $\mathcal{L}^2$, and that the corresponding initial value problem is globally well posed. We then construct a regular functional formally related to the potential of elasticity, and study the existence and (dynamical) stability of equilibria of the corresponding dynamical system.

The potential constructed has an affine operator as a free parameter. In the first section of chapter 3 a special operator is proposed and shown to have the required properties. The next two sections discuss a physical interpretation of the resulting theory as a non-local theory of elasticity. The range of the non-local effects introduced is arbitrarily small.

In chapter 4 the focus changes: we consider the theory developed previously not as a physical theory but as an approximation. We let a parameter describing the range of the non-locality tend to zero and study the resulting limit system. The regularised potentials epi-converge to a potential V^* that coincides on sufficiently smooth configurations with the classical potential of elasticity. Hence, the limiting statical theory is the classical theory of elastostatics on $\mathcal{W}^{1,p}$—at least for sufficiently regular configurations. Fewer results are available on the limiting dynamical theory, but the global existence of trajectories and the energy criterion of stability are shown to remain valid—in a sense—at the limit. Some of the unsolved questions posed by the limit dynamics are discussed rather informally.

The lengthy appendix contains material that would perturb the flow of thought if included in the main text, examples and counter-examples, and also developments that are either not original or are slight generalisations of material previously published by other authors.

The list of references is by no means a complete bibliography on the subject treated, it contains only the works cited in the text. A list of notations and symbols used is provided at the end.

Kurzfassung

Diese Dissertation beschreibt eine *alternative* Theorie der konservativen nichtlinearen Elastodynamik, in welcher das Energiekriterium für Stabilität in einem präzisen Sinne gilt. Die Voraussagen der Theorie sind beliebig nahe an die Voraussagen der klassischen Elastizitätstheorie für genügend glatte Konfigurationen und Geschwindigkeitsfelder, die experimentelle Verifikationen der Theorie werden also übernommen. Diese Theorie soll als eine Basis zum Studium und Diskussion der Grundlagen der mathematischen Elastizitätstheorie verstanden werden; ihren Wert als Rechenmodell ist zweifelhaft. Man kann sie interpretieren

1. als ein Modell der mathematischen Physik, das das Verhalten der Materie beschreibt, oder

2. als eine mathematische Näherung, im Sinne der Näherung unstetiger Funktionen mit glatten Funktionen.

Kapitel 1 beinhaltet eine Einführung in das Problem, das Energiekriterium für Stabilität in der Elastodynamik zu beweisen, eine informelle Diskussion der physikalischen Basis der mathematischen Elastizitätstheorie und eine Sektion, in der der abstrakte Rahmen unseres Problemes festgelegt wird.

In Kapitel 2 definieren wir das Konzept eines regulären Potentials im Lebesgueraum $\mathcal{L}^2$. Wir zeigen, dass das Hamilton'sche Prinzip für solche Potentiale einer Differentialgleichung in $\mathcal{L}^2$ gleichwertig ist und dass das entsprechende Anfangswertproblem global gut gestellt ist. Wir konstruieren ein reguläres Potential, das formell mit dem Potential der Elastizität verwandt ist, und studieren die Existenz und (dynamische) Stabilität der Gleichgewichte des entsprechenden dynamischen Systems.

Das konstruierte Potential hat einen affinen Operator als freien Parameter. In der ersten Sektion von Kapitel 3 wird ein spezieller Operator vorgeschlagen; es wird gezeigt, dass er die verlangten Eigenschaften besitzt. In den zwei nächsten Sektionen wird eine physikalische Interpretation der resultierenden Theorie als eine nichtlokale Theorie der Elastizität diskutiert. Die Reichweite der eingeführten nichtlokalen Effekte ist beliebig klein.

In Kapitel 4 ändern wir den Blickpunkt, die frühere Theorie wird nicht mehr als eine physikalische Theorie sondern als eine Näherung betrachtet. Wir lassen einen Parameter, der die Reichweite der nichtlokalen

Effekte beschreibt, gegen Null streben und studieren das resultierende Grenzsystem. Die regularisierten Potentiale epi-konvergieren gegen ein Potential V^*, das für genügend glatte Konfigurationen mit dem klassischen Potential der Elastizität zusammenfällt. Die statische Grenztheorie ist also die klassische Theorie der Elastostatik auf $\mathcal{W}^{1,p}$—mindestens für genügend reguläre Konfigurationen. Es liegen weniger Resultate für die dynamische Grenztheorie vor; wir zeigen aber, dass die globale Existenz der Trajektorien und das Energiekriterium für Stabilität in einem gewissen Sinne auch in der Grenze gültig bleiben. Einige der ungelösten Fragen, die die Grenzdynamik aufwirft, werden eher informell diskutiert.

Das längere Appendix enthält Material, das im Haupttext den Gedankenfluss stören würde, Beispiele, Gegenbeispiele und auch Entwicklungen, die entweder nicht original oder leichte Verallgemeinerungen von publiziertem Material anderer Autoren sind.

Die Referenzenliste ist auf keinen Fall eine vollständige Bibliographie des betrachteten Themas, sie enthält lediglich die im Text zitierten Arbeiten. Eine Notations- und Symbolenliste wird am Schluss beigelegt.