

DISS. ETH Nr. 9683

**Das Sturm-Liouville-Problem
als direktes und inverses
Eigenwertproblem
und seine numerische
Behandlung durch finite
Differenzen**

ABHANDLUNG
Zur Erlangung des Titels
Doktor der Mathematik

der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von
MAGNUS HEINZ PIROVINO
dipl. Math. ETH
geboren am 12. Oktober 1961
von Cazis (GR)

Angenommen auf Antrag von:
Prof. Dr. J.T. Marti, Referent
Prof. Dr. J. Waldvogel, Korreferent

1992

K u r z f a s s u n g

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird das Sturm-Liouville-Problem (SLP) als Eigenwertproblem und seine Inversion als inverses Eigenwertproblem (ISLP) vorgestellt. Wir diskretisieren mit zentralen Differenzen, um das Eigenwertproblem numerisch zu lösen. Wie aus der Literatur bekannt ist, genügt hier eine simple Korrektur der numerischen Eigenwerte, um jene des SLP auf hinreichende Genauigkeit berechnen zu können.

Im zweiten Kapitel wird ein Algorithmus gesucht, der das inverse Problem (ISLP) als Nullstellenproblem numerisch löst. Wie nachgewiesen wird, versagt hier die direkte Anwendung der Newton-Iteration auf das diskretisierte Nullstellenproblem gänzlich. Das Nullstellenproblem in seiner diskretisierten Form wird nach einer einfachen Idee umformuliert: Die Anzahl Freiheitsgrade bei den Daten (Spektrum) soll gleich der Anzahl Freiheitsgrade sein bei der gesuchten Lösung (Potential).

Im dritten Kapitel wird untersucht, inwiefern sich Eigenschaften des SL-Spektrums auf das numerische Spektrum übertragen lassen. Dabei stehen Eigenwerteinschließungen (Counting-Lemma) und Lipschitzstetigkeit des Spektrums bezüglich des Potentials im Vordergrund.

Im vierten Kapitel wird die Konvergenz des in Kapitel 2 vorgeschlagenen inversen Algorithmus bewiesen (zumindest für kleine und glatte Potentiale). Dabei werden auch allgemeinere Konzepte der numerischen Behandlung inverser nichtlinearer Probleme entwickelt.

Ein Kapitel über numerische Berechnungen mit Resultaten und deren Interpretation schließt diese Arbeit ab.

A b s t r a c t

The first chapter of this thesis gives a short introduction to the Sturm-Liouville problem (SLP) considered as a direct eigenvalue problem and to its inversion as an inverse eigenvalue problem (ISLP). We discretize with central differences in order to solve the eigenvalue problem numerically. As it is known from the literature a simple correction technique of the eigenvalues of the discretized problem allows us to compute those of the SLP to a satisfactory accuracy.

In the second chapter we search for an algorithm in order to solve the inverse problem (ISLP) numerically when the latter is considered as a problem of finding zeros of a given spectral function. It is shown that here the direct application of Newton's method fails completely. We modify our spectral function according to a simple idea: the number of degrees of freedom of the given data (the spectrum) shall be equal to the number of degrees of freedom of the solution (the potential) we are looking for.

In the third chapter we investigate the question in how far properties of the SL-spectrum can be transferred to the spectrum of the discretized problem. Here we emphasize estimations of eigenvalues (Counting Lemma) and the Lipschitz continuity of the spectrum with respect to the potential.

In the fourth chapter we prove convergence of the inverse algorithm proposed in Chapter 2, at least for small and smooth potentials. Also more general concepts for the treatment of inverse nonlinear problems are developed.

We complete this paper with a chapter on numerical computations and numerical results together with some interpretations.