



Doctoral Thesis

## **Braided tensor categories from an algebraic formulation of conformal field theory**

**Author(s):**

Gabbiani, Fabrizio

**Publication Date:**

1992

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000669587> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

**Braided tensor categories  
from an  
algebraic formulation  
of  
conformal field theory**

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
ZÜRICH

for the degree of  
Doctor of Natural Sciences

presented by  
Fabrizio Gabbiani  
born September 3, 1964  
citizen of Geneva

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. J. Fröhlich, examiner  
Prof. Dr. G. Felder, co-examiner

## ABSTRACT

We study two-dimensional conformal field theories by using methods of algebraic quantum field theory, a subject founded by R. Haag in the late fifties. Our motivation comes from string theory: we expect algebraic quantum field theory to provide a framework for the formulation of string theory which does not appeal to classical models of space-time. This is satisfactory since a quantum theory of gravity should predict the classical structure of space-time rather than involve it in its formulation.

We characterize the vacuum sector of a conformal field theory in simple terms and show that certain irreducible, projective unitary, positive-energy representations of loop groups belonging to the A-D-E series define vacuum sectors of conformal field theories in this sense. The properties of the vacuum sector of a conformal field theory are then analyzed. It is shown that the algebras of local observables which build the conformal net of the theory are hyperfinite type  $III_1$  factors and that they satisfy Haag duality. Furthermore, it is shown that the modular data associated to the conformal net and the vacuum state by Tomita-Takesaki theory always has a geometrical meaning for conformal field theories and we use this fact to characterize the group of local, internal symmetries of the vacuum sector.

We then develop the representation theory of conformal nets by adapting the theory of superselection sectors of Doplicher, Haag and Roberts to the case of chiral conformal field theories. Under a technical assumption, we show that representations of a conformal net having finite statistical dimension are objects of a braided  $C^*$ -tensor category (quantum category). The relation to Jones' theory of index for subfactors is explained. We then sketch the application of our results to the representation theory of loop groups. We make a conjecture which relates the statistical dimension of representations of conformal nets to modular transformations of certain modular functions (characters) associated to the representations. If true, this conjecture would completely

characterize the quantum categories associated to representations of loop groups.

## RESUME

Nous entreprenons l'étude de la théorie des champs conformes dans l'espace à deux dimensions à l'aide de méthodes de la théorie des champs algébriques, sujet fondé par R. Haag à la fin des années cinquante. Notre principale motivation vient de la théorie des cordes: nous pensons que la théorie des champs algébriques fournit un formalisme adéquat pour une formulation de la théorie des cordes qui ne fasse pas référence à un modèle classique de l'espace-temps. Une telle formulation serait satisfaisante puisque l'on espère d'une théorie quantique de la gravité qu'elle prédise la structure classique de l'espace-temps au lieu de l'utiliser dans sa formulation.

Nous caractérisons le secteur du vide d'une théorie conforme de manière simple et montrons que certaines représentations irréductibles projectives unitaires des groupes de lacets appartenant à la série A-D-E définissent des secteurs du vide dans ce sens. Les propriétés du secteur du vide d'une théorie conforme sont ensuite analysées. Il est montré que les algèbres locales qui forment le filet conforme de la théorie sont des facteurs hyperfinis de type  $III_1$  et qu'il satisfont à la propriété de dualité de Haag. De plus, il est montré que la structure modulaire associée au filet conforme et à l'état du vide en appliquant la théorie de Tomita-Takesaki à toujours une interprétation géométrique dans le cas des théories conformes. Nous utilisons ensuite ce fait pour caractériser le groupe des symétries internes locales du secteur du vide.

Nous développons la théorie des représentations de filets conformes en adaptant la théorie des secteurs de superselection de Doplicher, Haag et Roberts au cas chiral conforme. Nous montrons à l'aide d'une seule assomption technique que les représentations d'un filet conforme de dimension statistique finie sont les objets d'une  $C^*$ -catégorie tensorielle tressée (une catégorie quantique). Les relations avec la théorie de l'index de Jones sont expliquées. Nous montrons ensuite les applications possibles de nos résultats à la théorie des représentations des groupes de lacets. Nous formulons une conjecture

qui relie la dimension statistique des représentations d'un filet conforme aux transformations modulaires de certaines fonctions modulaires (caractères) déterminées par ces représentations. Si cette conjecture est vérifiée, la structure des catégories quantiques associées aux représentations des groupes de lacets serait complètement élucidée.