Diss. ETH No. 9954

Nonpersistence of Breathers for the Perturbed Sine Gordon Equation

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
JOCHEN DENZLER
Dipl. Math. ETH
born 03 April 1963 in D – Mosbach/Baden
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Jürgen Moser, examiner
Prof. Dr. Oscar E. Lanford III, co-examiner

1992

Abstracts

English Abstract

This thesis discusses the persistence of one or many of the breather solutions

$$u = 4 \arctan \frac{m \sin \omega t}{\omega \cosh mx}\,, \qquad \omega = \sqrt{1 - m^2}\,,\ 0 < m < 1$$

to the sine Gordon equation on the real line

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

under perturbation by an analytic function Δ of u alone:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon\Delta(u) + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \Delta(0) = 0\,.$$

Chapter 2 introduces the main methods used and proves the basic result: Essentially, for any perturbation of the specified type, at most finitely many breathers can persist, and this result follows already from the first order equations in ε. Strictly speaking, this is only true with the following modifications:

- There is a two dimensional space of trivial perturbations for which all breathers persist. The perturbed equation with these perturbations is obtained by rescaling of u and (x, t) in the unperturbed one.
- There is another one dimensional space of perturbations for which nonpersistence is a result of the second order in ε of the equation, whereas the first order equations have a solution for all m. This is discussed in chapter 5.
- At most finitely many breathers persist in any interval $\frac{m}{\omega} \in\,]0, \rho]$ that is inside the domain of analyticity of the function $z \longmapsto \Delta(4 \arctan z)$, hence none persist in an appropriate neighbourhood of 0. However, accumulation of persistent breathers at the *boundary* of the domain of analyticity cannot be ruled out by our arguments.

Chapter 4 explains why persistence or non-persistence of single breathers under general perturbations is a question beyond the scope of first order perturbation

theory. Although no definite result on (non-)persistence is proved, perturbations are given explicitly, for which all first order persistence conditions are satisfied. They span an infinite dimensional space for each fixed m. It is assumed that $0 < m < 1/\sqrt{2}$ in this argument.

The key results are consequences of explicit formulas, whose deeper meaning is not yet understood completely. A first approach to replace explicit calculations by more intuitive geometric arguments is described in chapter 3.

Chapters 1 and 6 are of independent interest. Chapter 1 offers an introduction to physical and heuristic arguments that shed light on the contents of the following chapters. It also reviews related work in an attempt to make available essential background information also to mathematicians that do not specialize in dynamical systems. (In spite of this attempt, the review cannot pretend to be complete.) Chapter 6 offers an elementary introduction to some methods used for studying the unperturbed sine Gordon equation.

Deutsche Zusammenfassung

Die vorliegende Dissertation diskutiert die Persistenz einer oder vieler der Breather-Lösungen

$$u = 4 \arctan \frac{m \sin \omega t}{\omega \cosh mx}, \qquad \omega = \sqrt{1-m^2}\,,\ 0 < m < 1$$

der Sinus-Gordon-Gleichung auf der reellen Achse

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

unter Störung durch eine analytische Funktion Δ, die nur von u abhängt:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon\Delta(u) + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \Delta(0) = 0\,.$$

In Kapitel 2 werden die hauptsächlich verwendeten Methoden eingeführt und das grundlegende Resultat bewiesen: Im wesentlichen bleiben unter irgendeiner Störung der angegebenen Art höchstens endlich viele Breather erhalten, und dieses Resultat folgt bereits aus den Gleichungen erster Ordnung in ε. Genaugenommen gilt das eben Gesagte nur mit folgenden Modifikationen:

- Es gibt einen zweidimensionalen Raum von trivialen Störungen, unter denen alle Breather erhalten bleiben. Für sie ist die gestörte Gleichung äquivalent zur ungestörten vermöge Reskalierung von u und (x,t).

- Ferner gibt es einen eindimensionalen Raum von Störungen, unter denen die Nichtpersistenz aus den Gleichungen zweiter Ordung in ε folgt, wohingegen die Gleichungen erster Ordnung für alle m lösbar sind. Dies wird in Kapitel 5 diskutiert.

- In jedem Intervall $\frac{m}{\omega} \in]0, \rho]$, das innerhalb des Analytizitätsgebiets der Funktion $z \mapsto \Delta(4 \arctan z)$ liegt, bleiben höchstens endlich viele Breather erhalten, und somit gar keine in einer geeigneten Umgebung von 0. Aber unsere Argumente können nicht ausschließen, daß Breather erhalten bleiben, deren Werte $\frac{m}{\omega}$ sich am Rand des Analytizitätsgebiets häufen.

In Kapitel 4 wird erläutert, warum das Problem der Persistenz oder Nichtpersistenz einzelner Breather unter allgemeinen Störungen außerhalb der Reichweite von Argumenten erster Ordnung Sörungstheorie liegt. Obwohl keine endgültige Aussage über (Nicht-)Persistenz bewiesen wird, werden explizit Störfunktionen angegeben, die allen Persistenzbedingungen erster Ordnung genügen. Sie spannen für jedes feste m einen unendlichdimensionalen Raum auf. Dabei muß $0 < m < 1/\sqrt{2}$ vorausgesetzt werden.

Die entscheidenden Resultate folgen aus expliziten Formeln, deren tiefere Bedeutung noch nicht vollständig verstanden ist. Ein erster Ansatz mit dem Ziel, explizite Rechnungen durch intuitivere geometrische Argumente zu ersetzen, wird in Kapitel 3 beschrieben.

Die Kapitel 1 und 6 sind von eigenständigem Interesse. Kapitel 1 bietet eine Einführung in physikalische und heuristische Argumente, die den Inhalt der folgenden Kapitel beleuchten. Dort wird auch ein Überblick über verwandte Arbeiten gegeben, als Versuch, wesentliche Hintergrundinformationen auch für diejenigen Mathematiker bereitzustellen, die nicht auf dynamische Systeme spezialisiert sind. (Trotzdem wird nicht behauptet, dieser Überblick sei vollständig.) Kapitel 6 bietet eine elementare Einführung in einige Methoden zur Untersuchung der ungestörten Sinus-Gordon-Gleichung.

Русская аннотация

В диссертации обсуждается устойчивость одного или многих решений «бризер»

$$u = 4 \arctan \frac{m \sin \omega t}{\omega \cosh mx}, \qquad \omega = \sqrt{1 - m^2}\,, \; 0 < m < 1$$

уравнения синус-Гордон на действительной оси

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

при возмущении аналитической функцией единственной переменной u

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon \Delta(u) + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \Delta(0) = 0\,.$$

Во второй главе вводятся главные употребляемые методы и доказывает основной результат, утверждающий, что не более чем конечное число бризеров может сохраняться при любом возмущении данного выше типа, и этот результат следует уже из уравнений первого порядка по ε. Точнее говоря, сказанное справедливо, если добавлены следующие поправки:

- Существует двухмерное пространство тривиальных возмущений, при которых сохраняются все бризеры. При этом, возмущенное уравнение эквивалентно невозмущенному посредством масштабирования переменных u и (x,t).

- Существует и одномерное пространство возмущений, при которых неустойчивость следует из уравнения второго порядка по ε, а уравнение первого порядка разрешимо при всех m. Обсуждение этого эффекта содержится в пятой главе.

- Не более чем конечное число бризеров может сохраняться в любом интервале $\frac{m}{\omega} \in]0,\rho]$ во внутренности области аналитичности функции $z \mapsto \Delta(4\arctan z)$, и поэтому никакие бризеры не сохраняются в подходящей окрестности нуля. Однако, наши аргументы не исключают, что числа $\frac{m}{\omega}$ отвечающие сохраняющимся бризерам накапливаются у границы области аналитичности.

В четвертой главе излагается, почему устойчивость или неустойчивость отдельного бризера нельзя выяснить посредством теории возмущений первого порядка. Хотя не доказан окончательный результат о (не-)устойчивости, зато явно даны функции, которые удовлетворяют всем условиям устойчивости первого порядка. Их линейная оболочка бесконечномерна для любого отдельного m. При этом предпологается, что $0 < m < 1/\sqrt{2}$.

Основные результаты вытекают из явных формул, фундаментальное значение которых еще не вполне понятно. Попытка заменить явные вычизления более интуитивными геометрическими аргументами описывается в третьей главе.

Первая и шестая главы имеют и самосоятельное значение. Первая глава предлагает введение в физические и эвристические аргументы, которые освещают содержание следующих глав. Кроме этого мы даем обзор близких работ, ориентируясь на математиков, не специализирующихся в динамических системах. (Однако, мы не утверждаем, будто этот обзор полон.) Шестая глава предлагает элементарное введение в некоторые методы, употребляемые для изучения невозмущенного уравнения синус-Гордон.

Résumé en français

Dans cette thèse, on discute de la persistance d'une ou plusieurs solutions «breather» («respirateur»)

$$u = 4\arctan\frac{m\sin\omega t}{\omega\cosh mx}, \qquad \omega = \sqrt{1-m^2}\ , \ 0 < m < 1$$

de l'équation sinus-Gordon sur la droite réelle

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0\ ,\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

quand elle est soumise à une perturbation par une fonction analytique Δ qui ne dépend que de u:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon\Delta(u) + O(\varepsilon^2)\,, \qquad \Delta(0) = 0\ .$$

Dans le second chapitre, on donne les méthodes principales et démontre le résultat fondamental: Essentiellement, pour chacune des perturbations données ci-dessus, au maximum un nombre fini de solutions «breather» sont conservées, et ce résultat est une conséquence des équations du premier ordre en ε. Plus précisément, cette assertion n'est correcte qu'avec les modifications suivantes:

- Il existe un espace de dimension deux de perturbations triviales sous lesquelles toutes les solutions «breather» sont conservées. Pour ces perturbations, l'équation perturbée est équivalente à l'équation non perturbée après réscalement des variables u et (x, t).
- De plus, il existe un espace de dimension un de perturbations sous lesquelles les solutions «breather» ne sont pas conservées, en conséquence de l'équation du second ordre en ε, tandis que l'équation du premier ordre a une solution pour chaque m. On discutera de cela dans le cinquième chapitre.
- Au maximum, un nombre fini de solutions «breather» sont conservées dans chaque intervalle $\frac{m}{\omega} \in\ ]0, \rho]$ à l'intérieur du domaine d'analyticité de la fonction $z \mapsto \Delta(4 \arctan z)$, et par conséquent, aucune ne persiste dans un certain voisinage de 0. Mais notre argument n'exclut pas que des solutions «breather» soient conservées pour des valeurs de $\frac{m}{\omega}$ ayant un point d'accumulation sur le bord du domaine d'analyticité de cette fonction.

Dans le quatrième chapitre, on explique pourquoi il est impossible de décider, sur la base de la seule équation du premier ordre en ε, si une solution «breather» est conservée ou non sous une perturbation générale. Bien qu'on ne donne pas de résultat définitif de (non-)persistance, on donnera explicitement pour chaque m des perturbations qui vérifient toutes les conditions de persistance du premier ordre. Leur enveloppe linéaire est de dimension infinie. Dans ces arguments, on suppose que $0 < m < 1/\sqrt{2}$.

Les résultats-clés découlent des formules explicites, dont la signification n'est pas encore entièrement comprise. On essaie de remplacer le calcul explicite par des arguments géométriques plus intuitifs.

Le premier et le sixième chapitres ont une valeur en eux-mêmes. Dans le premier chapitre est présentée une introduction dans des arguments physiques et heuristiques éclairant le contenu des chapitres suivants. De plus, on fait un tour d'horizon des travaux portant sur des questions similaires, donnant ainsi des informations supplémentaires sur ce domaine qui intéresseront également les mathematiciens non spécialisés dans les systèmes dynamiques. (On ne prétend pas que ce tour d'horizon soit complet.) Dans le sixième chapitre, on donne une introduction élémentaire dans quelques méthodes d'étude de l'équation sinus-Gordon non perturbée.