



Doctoral Thesis

Gauge Invariance and current algebra in non-relativistic many-body theory

Author(s):

Studer, Urban Matthias

Publication Date:

1992

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000692924> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Gauge Invariance and Current Algebra in Non-Relativistic Many-Body Theory

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZÜRICH

for the degree of
Doctor of Natural Sciences

presented by
URBAN MATTHIAS STUDER
Dipl. Phys. ETH
born August 30, 1962
citizen of Schaffhausen (SH) and Subingen (SO)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. J. Fröhlich, examiner
Prof. Dr. K. Hepp, co-examiner

Abstract

The main purpose of the present work is to provide a better understanding of the quantum Hall effect including, in particular, a systematic analysis of possible spin effects.

We develop a general formalism for describing, in arbitrary (but volume-preserving) moving coordinates, many-body systems of spinning particles coupled to an external electromagnetic field and constrained to move in some geometrically non-trivial background. We find a fundamental $U(1) \times SU(2)$ -gauge invariance of non-relativistic quantum mechanics and provide an identification of the corresponding gauge fields with physical quantities. As applications of the formalism we prove a general quantum mechanical version of the Larmor theorem and discuss some well-known effects in quantum mechanics from the point of view of its $U(1) \times SU(2)$ -gauge invariance.

For general two-dimensional quantum fluids (e.g., quantum Hall fluids), we formulate incompressibility in terms of clustering properties of their connected current Green functions. Assuming incompressibility and exploiting $U(1) \times SU(2)$ -gauge invariance we then calculate those terms (the "scaling limit") of the effective action of two-dimensional, incompressible quantum fluids which determine their physics at large-distance scales and low frequencies. As applications of our results we present, e.g., a simple proof of the Goldstone theorem for spin waves, the linear response theory of two-dimensional, incompressible quantum fluids and sum rules for the associated response coefficients.

For two-dimensional, incompressible quantum fluids, or more generally, for two-dimensional systems exhibiting a strong form of parity - and time-reversal symmetry breaking, a particularly powerful implication of $U(1) \times SU(2)$ -gauge invariance is an intimate connection between the bulk physics of such systems and the circulation of gapless, chiral electric - and spin currents at their edges. These chiral edge currents form $\hat{u}(1)$ - and $\hat{su}(2)$ -current algebras. Combining results of the representation theory of current algebra with some basic physical properties of these systems, we derive the quantization of the response coefficients (the Hall conductivity for the electric - and for the spin current and the magnetic susceptibility).

Many examples are given illustrating the general concepts. In particular, we discuss Hall fluids that are good candidates for observing a quantum Hall effect for the spin current, and we propose an even-denominator quantum Hall effect in a superfluid ${}^3\text{He-A/B}$ interface exhibiting strongly broken parity - and time-reversal invariance.

Kurzfassung

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist, ein tieferes Verständnis des quantisierten Hall-Effektes zu geben, das insbesondere eine systematische Analyse von möglichen Spin-Effekten einschliesst.

Wir entwickeln einen Formalismus, der geeignet ist in beliebigen (aber volumen-erhaltenden) bewegten Koordinaten Vielkörpersysteme zu beschreiben, deren Teilchen Spin besitzen, an ein äusseres, elektromagnetisches Feld gekoppelt sind und sich in einem geometrisch nicht-trivialen Hintergrund bewegen. Wir finden eine fundamentale $U(1) \times SU(2)$ -Eichinvarianz der nicht-relativistischen Quantenmechanik und geben eine physikalische Interpretation der zugehörigen Eichfelder. Als Anwendung des Formalismus beweisen wir eine allgemeine quantenmechanische Version des Larmor-Theorems, und diskutieren einige, bekannte Effekte der nicht-relativistischen Quantenmechanik vom Standpunkt der $U(1) \times SU(2)$ -Eichinvarianz her.

Für zwei-dimensionale Quantenflüssigkeiten (z.B. Quanten-Hall-Systeme) formulieren wir Inkompressibilität mittels "clustering" Eigenschaften der zusammenhängenden Green-Funktionen ihrer Ströme. Unter der Annahme von Inkompressibilität berechnen wir dann mit Hilfe der $U(1) \times SU(2)$ -Eichinvarianz jene Terme (den "Skalenlimes") der effektiven Aktion zwei-dimensionaler, inkompressibler Quantenflüssigkeiten, die deren Physik auf grossen Längenskalen und bei tiefen Frequenzen bestimmen. Anwendungen unserer Resultate umfassen etwa einen einfachen Beweis des Goldstone-Theorems für Spinwellen, die lineare Response-Theorie zwei-dimensionaler, inkompressibler Quantenflüssigkeiten und Summenregeln für die zugehörigen Response-Koeffizienten.

Für zwei-dimensionale, inkompressible Quantenflüssigkeiten oder allgemeiner für zwei-dimensionale Systeme mit starker Paritäts- und Zeitumkehr-Symmetriebrechung impliziert die $U(1) \times SU(2)$ -Eichinvarianz eine enge Beziehung zwischen der Physik im Innern solcher Systeme und der Propagation von chiralen elektrischen und spin-tragenden Strömen an ihren Rändern. Diese chiralen Randströme bilden $\hat{u}(1)$ - und $\hat{su}(2)$ -Stromalgebren. Indem wir Resultate aus der Darstellungstheorie dieser Stromalgebren sowie ein paar elementare, physikalische Eigenschaften dieser Systeme verknüpfen, finden wir eine Herleitung der Quantisierung der Response-Koeffizienten (der Hall-Leitfähigkeit für den elektrischen Strom, bzw. für den Spinstrom sowie der magnetischen Suszeptibilität).

Wir illustrieren die allgemeinen Konzepte an Hand vieler Beispiele. Insbesondere diskutieren wir Systeme, die gute Kandidaten sind für die Beobachtung eines quantisierten Hall-Effektes für den Spinstrom, und identifizieren einen quantisierten Hall-Effekt mit Hall-Konstante von geradem Nenner in einem supraflüssigen ${}^3\text{He}$ -Film, der starke Paritäts- und Zeitumkehr-Symmetriebrechung aufweist.