

# Die statische Berechnung allgemeiner ausgesteifter Faltwerke mit Hilfe Finiter Elemente vom Gleichgewichtstyp

**Working Paper**

**Author(s):**

Bosshard, Walter

**Publication date:**

1971

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747228>

**Rights / license:**

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

**Originally published in:**

Bericht / Institut für Baustatik ETH Zürich 38

**Die statische Berechnung  
allgemeiner ausgesteifter  
Faltwerke mit Hilfe Finiter  
Elemente vom Gleich-  
gewichtstyp**

Walter Bosshard

September 1971  
Bericht Nr. 38

Institut für Baustatik ETH Zürich

**Die statische Berechnung allgemeiner  
ausgesteifter Falwerke mit Hilfe Finiter Elemente  
vom Gleichgewichtstyp**

von

Dr. sc. techn. Walter Bosshard

Institut für Baustatik

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich

September 1971

## VORWORT

Die Tragsysteme des Stahlbaues werden in der Regel mittels einfacher Modelle der Stabstatik untersucht. Zur Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches solcher Näherungsverfahren sowie zur Ueberprüfung ihrer Genauigkeit sind Ergebnisse erforderlich, die mit Idealisierungen höherer Annäherung an der konstruktiven Wirklichkeit gewonnen werden.

Die vorliegende Untersuchung wurde von Herrn W. Bosshard als Dissertation (Referent Prof. Dr. P. Dubas, Korreferent Prof. Dr. W. Schumann) ausgearbeitet. Die verschiedenen Elemente einer Tragkonstruktion sind dabei als Scheiben idealisiert, so dass nur die für das Tragverhalten kaum massgebende Querbiegesteifigkeit vernachlässigt bleibt. Zur Bestimmung der Beanspruchungen der auf verschiedene Arten zusammenwirkenden Einzelscheiben wird die Methode der Finiten Elemente verwendet; der Vorzug wurde Elementen des Gleichgewichtstypes gegeben, bei denen die Fehler der Diskretisierung nicht die örtlichen und gesamten Gleichgewichtsbedingungen betreffen, sondern nur die für die Sicherheitsbetrachtungen weniger wichtigen inneren und äusseren Verträglichkeitsbedingungen.

Die vorliegende Arbeit soll einerseits den sich für die computergerechte Ausarbeitung des Rechenganges interessierenden Spezialisten ansprechen - wobei die Aufteilung des Gesamtsystems in einfacher zu behandelnde Substrukturen besonders zu erwähnen ist - und andererseits wird der praktisch tätige Ingenieur aus den zahlreichen untersuchten Problemen (Rahmenecke, Stützenbereich eines Durchlaufträgers, Torsionsverhalten von Brücken mit unterem Verband, Stahlleichtfahrbahn) wertvolle Rückschlüsse für die Berechnungspraxis ziehen können.

Eidgenössische Technische  
Hochschule - Zürich

Prof. Dr. P. Dubas

Oktober 1971

INHALT

Zusammenfassung	4
Summary	7
Bezeichnungen	9
1 Aufgabenstellung und Wahl der Lösungsmethode	11
1.1 Stufen der Vereinfachung und Idealisierung	12
1.2 Fehler bei grober Diskretisation	15
1.21 Verträgliche Finite Elemente	16
1.22 Hybride Finite Elemente	22
1.23 Finite Elemente vom Gleichgewichtstyp	25
2 Elemente	26
2.1 Diskretisation der Spannungen	28
2.11 Die Verschiebungen	41
2.12 Ueberkontinuität	51
2.2 Technische Einzelheiten zur Bildung der Element- matrizen	53
2.21 Geometrie und Koordinatensysteme	54
2.22 Ableitungen von Funktionen in homogenen Koordinaten	57
2.23 Transformationen in schiefwinkligen Systemen	58
2.24 Koordinatenfunktionen	62
2.25 Bildung der Elementmatrix des Dreieckselements	66
2.26 Transformation der Variablen an Scheibenstücken	68
2.27 Die Kraftverbindungsmatrix des Scheibenstücks	70

2.3	Hilfselemente	76
2.31	Das Scheibenkantenelement	80
2.32	Andere Hilfselemente	83
2.4	Ein Stabelement	83
3	Substrukturen	90
3.11	Die Grundlage	94
3.12	Der Algorithmus	97
3.13	Rechengang und Datenstruktur	99
3.14	Repetitionen	109
3.2	Die Auflösung der linearen Gleichungssysteme	114
3.21	Die Partition der Substrukturmatrizen	117
3.22	Die Elimination in einem Diagonalblock	119
3.23	Bemerkungen zum Blockalgorithmus	123
3.3	BASAR ( <u>B</u> asic <u>S</u> ubstructure <u>A</u> ssembler)	125
4	Anwendungen	129
4.1	Präzisionstests	132
4.2	Bauteile	143
4.3	Torsion eines Balkenbrückenquerschnitts mit unterem Verband	161
4.4	Orthotrope Stahlfahrbahnplatte	181
	Literatur	193
	Lebenslauf	200

## ZUSAMMENFASSUNG

Ein automatisches numerisches Berechnungsverfahren für die statische, linearelastische Berechnung ausgesteifter und ausgefachter Faltwerke mit biegeweichen Scheiben beliebiger polygonaler Form wird entwickelt.

Die Diskretisation des kontinuierlichen Tragwerks stützt sich auf einen Finite-Element Ansatz durch Polynome 5. Grades für die Airy'sche Spannungsfunktion der Einzelscheiben in allgemeinen Dreiecksbereichen. Besondere Hilfselemente dienen der Formulierung der Uebergangsbedingungen bei verzweigten Scheibenkanten. Der Ansatz ist ein vollständiger Gleichgewichtsansatz; alle Diskretisationsfehler betreffen die Verträglichkeit. Die relativ hohe Ordnung des Elementansatzes garantiert darüber hinaus lokale Kontinuität des genäherten Spannungsfeldes in den Knoten des Dreiecksnetzes. Hilfselemente erlauben die Heranziehung dieser Ueberkontinuität in geeigneter Weise auch bei den Anschlussknoten von Stabelementen oder an mehrfachen Scheibenkanten.

Das diskrete System hat Kraftgrößen als Hauptvariable und Verschiebungsgrößen als Hilfsvariable (Lagrange'sche Multiplikatoren). Die Lösung der indefiniten Gleichungssysteme erfolgt stufenweise im Rahmen einer Substrukturtechnik mit beliebig vielen Stufen; der Algorithmus für die Teilelimination auf einer Stufe vermittelt eine **a u t o m a t i s c h e H i l f s - l a g e r u n g** der einzelnen Substrukturen. Diese Massnahme schützt zugleich vor anderen Situationen linearer Fast-Abhängigkeit in den Gleichungssystemen. Die Substrukturtechnik ist besonders geeignet für die Erfassung von Tragwerken mit regelmässiger Repetition von Bauteilen. Das Fehlen eines übergeordneten globalen Koordinatensystems erübrigt Transfor-

mationen an den Substrukturmatrizen gleicher Bauteile in gedrehter räumlicher Lage.

Die Datenstruktur des elektronischen Rechenprogramms erlaubt die Ausnützung aller Repetitionen auch an Tragwerken, die nur teilweise regelmässig sind. Das Rechenprogramm ist auf den schrittweisen Aufbau grosser Tragwerke mit Zwischentests an den Substrukturen von Zwischenstufen ausgerichtet. Die automatisch ermittelten Hilfslager der Substrukturen werden vom Programm so verwaltet, dass sie automatisch oder manuell weiterverarbeitet werden können. Nach Abschluss des Strukturaufbaus mit der Auflösung auf der höchsten Stufe erfolgt rückwärts die Bestimmung der Resultate an den Substrukturen aller Stufen in einem Rechengang selektiv und automatisch. Auf der Grundelementstufe können die Spannungen direkt graphisch dargestellt werden.

Beispiele zeigen die besondere Eignung dieser Gleichgewichtsmethode für den Bauingenieur, der auf Grund der Gegebenheiten der Baustoffe und Fertigungsverfahren im Bauwesen an Gleichgewichtsmodellen besonders interessiert ist. Sie geben darüber hinaus Hinweise auf eine ausgezeichnete numerische Tauglichkeit des Verfahrens auch an relativ grossen Problemen. Das grösste gelöste Beispiel behandelt in 10 Stufen ein Tragwerk, das bei direkter Auflösung mit derselben Diskretisation mehr als 50'000 Unbekannte hätte, ohne dass einschneidende Stellenverluste festzustellen wären.

Gleichgewichtsmodelle sind ihrem Wesen nach die rechentechnisch aufwendigsten Varianten der Finite-Element-Technik. Wo wegen der Verwendung duktiler Materialien grobe Gleichgewichtsmodelle ausreichen und eine teilweise Regelmässigkeit der Tragwerke vorliegt, muss diese Tatsache nicht von vornherein deren praktische Unterlegenheit bedeuten.



Das entwickelte Verfahren ist gebrauchssicher und automatisch, aber nicht narrensicher. Die Arbeit mit Gleichgewichtsmodellen dieser Art verlangt etwas mehr Einsicht in das Tragverhalten und die Rechentechnik als kinematische Verfahren.

## SUMMARY

A finite-element equilibrium method for static, linear elastic analysis of stiffened and web-braced folded plate structures of arbitrary geometry is presented.

For discretization of plane stress in plates, Airy's stress function is approximated in general triangular elements by polynomials of the fifth order; this equilibrium element is stress-diffusing, and it ensures full local compatibility at nodes. Auxiliary elements are used to impose equilibrium and compatibility at multiple joints of plates and other structural members. A beam element for eccentric connection with plates is included.

The discrete system has forces as main variables and displacements as Lagrange multipliers. The solution is found in the frame of a substructure technique with an arbitrary number of substructure levels. The algorithms for partial elimination at a given level provide auxiliary supports of substructures automatically; this measure protects the solution process against other situations of linear dependence as well.

The computer program implemented (in a standard "pidgin" subset of FORTRAN for universal compatibility) is designed for taking full advantage of total or partial regularity of structural configuration. As no overall coordinate system is used, substructure matrices are independent of spatial orientation, and no transformations are required for repeated substructures in rotated positions. Regularity need not include loadings or supports; slight departures from full regularity does not offset possible economies of computing effort. However, the program is not confined to such regular

cases; consistent use of tree structures in organizing data and recursive programming concepts make it entirely general. Several examples show the suitability of the method to civil engineering problems, where equilibrium models are of particular interest. The largest example solved has more than 50000 discrete structural variables; no signs of numerical instability have been observed in this or in smaller examples.

BEZEICHNUNGEN

Dünndruck bezeichnet Zahlen (Skalare), Fettdruck Matrizen.

Hilfszeichen:

[...]	Matrizenelemente
{...}	Matrizenelemente, transponiert angeschrieben
<b>t</b>	Transponierte Matrix
<b>-1</b>	Inverse Matrix
..	Zyklische Vertauschung
→	Geometrische Vektoren
.	Skalarprodukt
x	Vektorprodukt
$(\vec{a} \times \vec{b})_z$	Komponente z des Vektorproduktes
<b>+ - =</b>	Arithmetische Zeichen für Matrizen
[, ]	Energieprodukt
(, )	Äussere Arbeit
Δ	Anteile der Energie oder des Potentials (vorangestellt)
~ ~	Kennzeichen für diskretisierte Feldgrössen
-	(Ueberstreichung) im betrachteten Substrukturschritt f e s t e Feldgrössen
(..*..)	Unter Matrizen: Dimensionen

Indizes:

i, j, k, m	Laufende Nummern, die zugleich Ortsbezeichnung sind
I, K, M, N	Ganze Zahlen
<b>i, o</b>	Innere, äussere Variable
<b>e, E</b>	Elemente
<b>T, S</b>	Substrukturen (T nur bei Stützwerten der Spannungsfunktion verwendet)
v	Randgrösse

Feste Formelzeichen für Skalare:

$x, y, z$	Kartesische Koordinaten
$n, s$	Aeussere Normale, Seitenrichtung
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	Homogene Dreieckskoordinaten
$\xi, \eta, \kappa$	Schiefe Axenrichtungen
$\Phi$	Airy'sche Spannungsfunktion
$t$	Scheibenstärke
$l$	Seitenlänge
$B$	Biegemomente
$Z$	Trägheitsmomente
$F, Q$	Normalkräfte, Querkräfte
$A$	Fläche (absolut)
$\pi$	Komplementäre Energie oder - Potential
$\pi^*$	Reissner'sches Funktional (erweiterte Energie)

Matrizen:

Allen Matrixensymbolen werden mindestens beim ersten Auftreten die Dimensionen in Klammern unter dem Zeichen beigegeben.

$\alpha, b, c$  Indextransformationen (pro Zeile nur ein Element  $\neq 0$ , mit dem Wert  $\pm 1$ )

$E$  Elastizitätsmodul (3\*3) des ebenen Spannungszustandes

$F, G, H, K, M, A, B, C, R$  Matrizen mit festen, tragwerksabhängigen Elementen.

$\xi, \beta, \zeta, \nu, \eta$  Polynommatrizen, Interpolationsmatrizen.

# 1. Aufgabenstellung und Lösungsmethode

Diese Arbeit behandelt ein numerisches Verfahren für die statische Untersuchung allgemeiner *Faltwerke*, welches besonders auf die Verhältnisse des *Stahlbaus* zugeschnitten ist. Betrachtet werden gelenkige *Faltwerke* aus *Scheiben* beliebiger polygonaler Form, die durch stabförmige *Glieder* (*Steifen*, *Pfosten*, *Gurtungen*, *Verbände*) ausgesteift oder ausgefacht sein können. Mehrfache *Faltwerkskanten* (*Verzweigungen*) sind zugelassen.

Es gelten die üblichen Voraussetzungen der linearen *Elastizitätstheorie*: Kleine *Verschiebungen*, *linearelastische Werkstoffe*. *Materialanisotropie* und *inhomogene Materialeigenschaften* im Grossen können berücksichtigt werden (*Verbundtragwerke*).

Entsprechend der Annahme gelenkiger *Faltwerke* ist die *Plattensteifigkeit* der *Scheiben* vernachlässigt. Die *Belastungen* greifen in den *Kanten* und *Knoten* an.

Das Lösungsverfahren stützt sich auf die *Diskretisation* der *Airy'schen Spannungsfunktion* der *Scheiben* durch einen *Finite-Element-Ansatz* höherer Ordnung. Ein solches *Energieverfahren* zeichnet sich vor anderen numerischen Methoden aus durch

- zwangslose Erfassung allgemeiner Geometrie und Lagerung
- leichte Automatisierung

Die spezielle Wahl eines reinen Gleichgewichtsansatzes soll im Folgenden eingehend diskutiert werden.

## 1.1 Stufen der Vereinfachung und Idealisierung in der numerischen Statik kontinuierlicher Tragwerke

Festigkeitsprobleme an kontinuierlichen Tragwerken durchlaufen von der praktischen Aufgabenstellung bis zur Lösung eine Kette von Vereinfachungen (Fig. 1.01)

Das geplante Tragwerk ist Ausgangspunkt und Ziel eines iterativen Bemessungs- und Berechnungsvorgangs. Um die Aufgabe einer rechnerischen Lösung zugänglich zu machen, wird das geplante Tragwerk durch Vereinfachungen der Geometrie, des Tragverhaltens und der Werkstoffeigenschaften gewissen mechanischen Modellen mit einfachen, mathematisch fassbaren Eigenschaften zugeordnet. Wegen den getroffenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen wird ein einzelnes mechanisches Modell nur die Beantwortung einer Teilfrage erlauben, so dass mehrere mechanische Modelle herangezogen werden müssen; man trifft in statischen Berechnungen in der Regel verschiedene mechanische Modelle für

- die Bestimmung der Spannungen unter Gebrauchslast
- die Erfassung der Tragfähigkeitsgrenzen:  
Bruchlast, Stabilitätsgrenzen
- das Schwingungsverhalten, die Standfestigkeit usw.

Dabei beinhaltet diese Art der Aufteilung in Teilfragen ebenfalls eine Vereinfachung. An einem mechanischen Modell existiert normalerweise eine exakte Lösung der betreffenden Teilfrage. Sofern realitätsnahe Modelle verwendet werden, ist jedoch eine analytische Bestimmung dieser Lösung selten möglich. Zu einer angenäherten numerischen Lösung müssen die unbekannt Funktionen durch bekannte Funktionen mit einer endlichen Zahl von unbekannt Parametern approximiert werden.

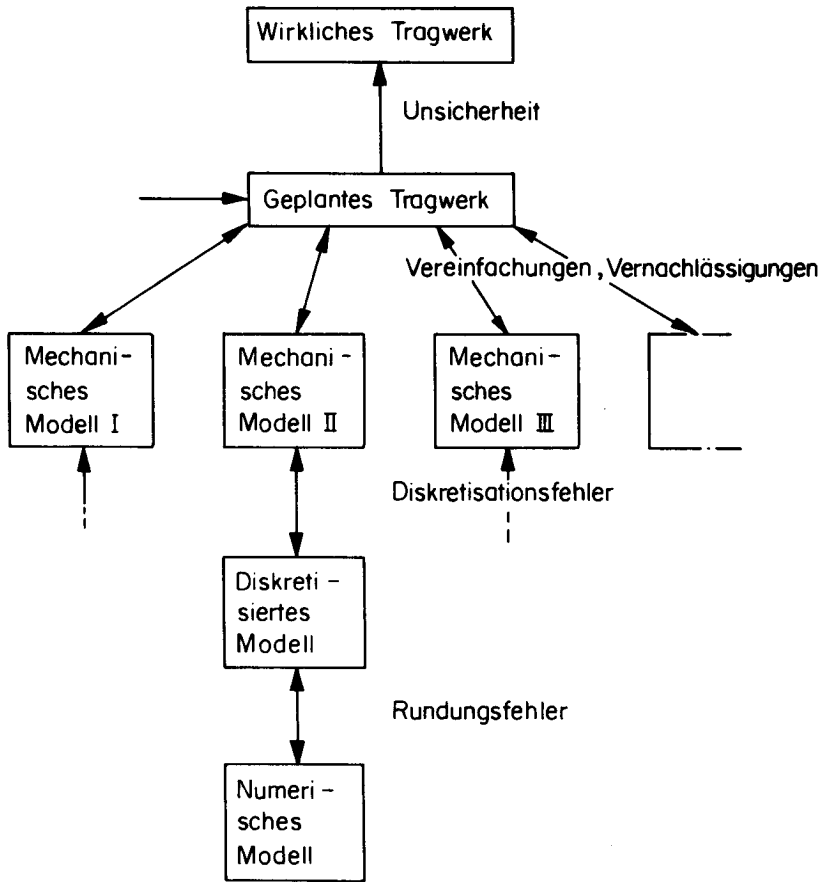


Fig. 1.01



Das so erhaltene d i s k r e t i s i e r t e M o d e l l des kontinuierlichen mechanischen Modells kann wegen der willkürlichen Verkürzung des Variablensatzes auf eine endliche Zahl von Komponenten nicht mehr allen elastischen Feldgleichungen genügen; es entstehen D i s k r e t i s a t i o n s f e h l e r, die je nach dem Diskretisierungsverfahren Gleichgewichtsbedingungen, Verträglichkeitsbedingungen, Stoffgleichungen oder mehrere dieser Bedingungsgruppen treffen. Die Lösung am diskreten System wird so bestimmt, dass diese Diskretisierungsfehler in geeigneter Weise minimal gemacht werden. Diese Lösung muss numerisch mit einer begrenzten Stellenzahl bestimmt werden: Das n u m e r i s c h e M o d e l l ist schon bei seiner Aufstellung mit Rundungsfehlern behaftet, die dann im Verlauf der Rechnung mehr oder weniger angehäuft werden.

Das w i r k l i c h e T r a g w e r k unterscheidet sich vom geplanten durch Streuungen der Materialeigenschaften, durch Abweichungen in den Abmessungen und Belastungen. Das Ausmass dieser Unsicherheiten ist in den verschiedenen Gebieten der Technik sehr unterschiedlich. Es kann klein gehalten werden, wenn

- die Herstellung in industrieller Seriefertigung erfolgt
- Materialien und Verarbeitungstechniken hoher Qualität eingesetzt werden
- die Belastungen selbst aus kontrollierten technischen Vorgängen stammen
- im Betriebszustand eine ständige Ueberwachung und Wartung gegeben ist.

Im Gegensatz zum Maschineningenieur oder Flugzeugstatiker kann sich der Bauingenieur selten auf solche ideale Verhältnisse stützen. Diese Tatsache begrenzt den sinnvoll

vertretbaren Aufwand bei der Analyse des geplanten Tragwerkes: Sowohl eine Verbesserung der mechanischen Modelle als auch eine Verfeinerung der zugeordneten Diskretisationsprozesse hat keinen Sinn, wenn die Unsicherheitsspanne zum wirklichen Tragwerk zu gross ist. Wesentlich ist nun, dass ein überwiegender Teil dieser Unsicherheit die *K o n t i n u i t ä t* des Tragwerks und seiner Teile betrifft. Eine ganze Reihe von Herstellungs- und Werkstoffimperfektionen wie

- Verbindungen mit unsicherer Steifigkeit, "Spiel"
- unvollständiger oder elastischer Verbund
- Risse, lokaler plastischer Fluss schon unter Gebrauchslasten
- lokaler Stabilitätsverlust infolge Anfangsverformungen

beeinträchtigen die Einhaltung der Verträglichkeitsbedingungen am wirklichen Tragwerk und führen den Bauingenieur dazu, sinnvoller nach einem *m ö g l i c h e n G l e i c h g e w i c h t s z u s t a n d* bei Einhaltung der wichtigsten Verträglichkeitsbedingungen und der zugelassenen Beanspruchungsgrenzen zu fragen, als nach einer "exakten" Lösung eines elastischen Spannungsproblems.

## 1.2 Die Fehler bei grober Diskretisation

Vom Standpunkt der mathematischen Physik ist die wichtigste Eigenschaft eines Diskretisationsverfahrens sein Konvergenzverhalten: Bei fortgesetzter gleichförmiger Verfeinerung der Diskretisation soll die Näherungslösung in den Normen gewisser Funktionalräume gegen die exakte Lösung streben [9,21].

Der Ingenieur hat in praktischen Anwendungen der numerischen Kontinuumsstatik nie Gelegenheit, einem solchen Konvergenzvorgang numerisch - auch nur über einige Schritte - nachzugehen; in grober Abschätzung bringt eine einzige Halbierung der Maschenweite der Diskretisation in einem zweidimensionalen Fall eine Vervierfachung der Anzahl Unbekannten, und damit eine Erhöhung des Rechenaufwandes für die Gauss'sche Elimination um einen Faktor 64. Bei solchen Wachstumsfaktoren kann auch der übliche Hinweis auf den Computer als deus ex machina nicht weit helfen; vielmehr muss sich der Ingenieur aus Gründen der Vernunft und der Verhältnismässigkeit der Mittel immer mit groben Diskretisationen begnügen. Für den Bauingenieur als Vertreter eines nach wie vor nur teilweise industrialisierten Zweiges der Wirtschaft sind solche Ueberlegungen besonders zwingend: Seine Tragwerke sind zumeist "Einzelanfertigungen", die nicht den hohen Einsatz an Computer-Rechenzeit rechtfertigen können, welcher der Typenentwicklung in der Flugzeugindustrie heute in der Regel zugrunde liegt. Der Charakter der Diskretisationsfehler erhält damit grosse Bedeutung - im Sinne des letzten Abschnitts insbesondere dann, wenn diese Fehler das Gleichgewicht betreffen. Wir prüfen diese Frage für die drei wichtigsten Varianten der Finite-Element-Technik.

### 1.21 Verträgliche Finite Elemente

Grundlage der Diskretisation ist ein Ritz'scher Ansatz

$$\varphi \approx \begin{bmatrix} \tilde{u}(x,y) \\ \tilde{v}(x,y) \end{bmatrix} = \sum_1^N a_k \varphi_k \quad (1.011)$$

als Näherung für den wahren Verschiebungszustand unter der gegebenen Belastung. Folgende speziellen Konventionen kennzeichnen in diesem Fall einen Finite-Element-Ansatz:

- Das Tragwerk wird durch geeignete Linien in Elemente aufgeteilt gedacht (Fig. 1.02). Die Ansatzparameter  $Q_K$  erhalten die Bedeutung von lokalen Stützwerten des genäherten Verschiebungszustands (1.011) in den Knoten, auf den Kanten oder innerhalb der Elemente des Netzes. Es kann sich dabei um Funktionswerte, Ableitungen oder elementlokale Integrale des genäherten Verschiebungsfeldes handeln.
- Die Ritz'schen Koordinatenfunktionen sind stetig und haben innerhalb der Elemente stetige Ableitungen. Ihre Werte im Innern eines Elementes sind vollständig bestimmt durch die Stützwerte  $Q_K$  an diesem Element.

Daraus und aus der Stetigkeit folgt, dass die Werte des Näherungsfeldes längs einer Elementkante nur von den Stützwerten an dieser Kante selbst abhängen können. Die Koordinatenfunktionen  $\varphi_K$  sind auf Grund dieser Definitionen eng lokalisiert. Sie nehmen in ihren Stützstellen den Wert 1 an und verschwinden an jeder anderen Stützstelle. Ausserhalb der Elemente, die direkt an ihre Stützstelle angrenzen, verschwinden sie identisch.

Die unbekannt Parameter  $Q_K$  erhält man aus dem Ritz'schen Gleichungssystem [3]

$$[\tilde{\varphi}, \varphi_K] = (\bar{f}, \varphi_K) \quad (1.012)$$

$$K = 1 \dots N$$

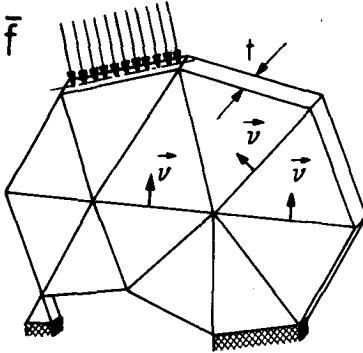


Fig. 1.02

Darin bezeichnet die eckige Klammer das Energieprodukt zweier elastischer Zustände

$$[\varphi, \psi] = t \iint_A (\sigma_x^\varphi \epsilon_x^\psi + \sigma_y^\varphi \epsilon_y^\psi + \tau_{xy}^\varphi \gamma_{xy}^\psi) dA \quad (1.013)$$

und die runde Klammer die äussere Arbeit der gegebenen Belastungen, welche bezogene Linienkräfte auf dem äusseren Rand  $\partial A_0$  von A oder bezogene Flächenkräfte in seinem Innern sein können:

$$(\bar{f}, \psi) = \int_{\partial A_0} (\bar{X}_\nu u^\psi + \bar{Y}_\nu v^\psi) ds + \iint_A (\bar{X} u^\psi + \bar{Y} v^\psi) dA \quad (1.014)$$

G1. (1.012) stimmt formal überein mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Ansatz (1.011) als Spannungszustand mit jeweils einer Ansatzfunktion  $\varphi_K$  als virtuellem Verschiebungszustand. Dieses Prinzip beruht auf den Voraussetzungen, dass der Spannungszustand mit seinen Rand- und Flächenkräften im Gleichgewicht und der virtuelle Verschiebungszustand ein verträglicher sei. Die erste Voraussetzung

ist wegen der rein kinematischen Definition des Ansatzes nicht erfüllt. Die Spannungen, welche aus ihm mittels der Dehnungen

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.015)$$

und des linearen Materialgesetzes abgeleitet werden, sind mit bezogenen Flächenkräften  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  behaftet,

$$\dagger \left( \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) + \tilde{X} = 0$$

$$\dagger \left( \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_y}{\partial y} \right) + \tilde{Y} = 0$$

die nicht mit den gegebenen Flächenkräften  $\bar{X}, \bar{Y}$  übereinstimmen. Ganz entsprechend sind die Randkräfte  $\tilde{X}_v, \tilde{Y}_v$  nicht den angebrachten Belastungen  $\bar{X}_v, \bar{Y}_v$  gleich, und schliesslich treten an allen inneren Elementkanten  $\partial A_i$  Spannungssprünge auf, weil die ersten Ableitungen der Ansatzfunktionen nicht stetig vorausgesetzt sind. Das heisst mit anderen Worten, dass auch an inneren Elementkanten bezogene Linienkräfte  $\tilde{X}_v$  wirken, welche die Spannungen auf den beiden Rändern des Schnittes zu Null ergänzen. Zusammen mit den so eingeführten Restkräften (mit Tilde) ist  $\tilde{\varphi}$  ein Gleichgewichtszustand, so dass hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen unabhängig von den Parametern des Ansatzes identisch erfüllt ist:

$$\begin{aligned} [\tilde{\varphi}, \varphi_K] &\equiv \int_{\partial A_i, \partial A_0} (\tilde{X}_v u^{\varphi_K} + \tilde{Y}_v v^{\varphi_K}) ds + \\ &+ \iint_A (\tilde{X} u^{\varphi_K} + \tilde{Y} v^{\varphi_K}) dA \end{aligned} \quad (K = 1, \dots, N)$$

Subtrahiert man davon die Ritz'schen Gleichungen (1.012), so erhalten die Bestimmungsgleichungen für die Ansatzparameter in (1.012) die Form

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial A_0} [(\tilde{X}_\nu - \bar{X}_\nu) u^{\varphi_K} + (\tilde{Y}_\nu - \bar{Y}_\nu) v^{\varphi_K}] ds + \\
 & + \int_{\partial A_i} [\tilde{X}_\nu u^{\varphi_K} + \tilde{Y}_\nu v^{\varphi_K}] ds \\
 & + \iint_A [(\tilde{X} - \bar{X}) u^{\varphi_K} + (\tilde{Y} - \bar{Y}) v^{\varphi_K}] dA = 0
 \end{aligned}$$

(K = 1..... N) (1.012a)

welche die Bedeutung der gestellten Bedingungen sehr anschaulich zeigt: Es handelt sich um Gleichgewichtsbedingungen, welche

- die Widersprüche

$$\tilde{X}_\nu - \bar{X}_\nu$$

zwischen inneren Spannungen und Randkräften

- die Spannungssprünge an den inneren Elementrändern

$$\tilde{X}_\nu$$

- die Widersprüche

$$\tilde{\chi} - \bar{\chi}$$

im Mittel einer Koordinatenfunktion ins Gleichgewicht setzen.

Damit ist das genäherte Feld  $\tilde{\varphi}$  von (1.011) auch im Gleichgewicht für jeden virtuellen Verschiebungszustand

$$\delta\varphi = \sum_1^N \varphi_k \delta b_k \quad (1.011b)$$

Dagegen sind

- die Gleichgewichtsbedingungen an einem einzelnen herausgeschnitten gedachten Element
- die Gleichgewichtsbedingungen an einem "abgeschnitten" gedachten Teil des Tragwerks
- das Gleichgewicht zwischen äusserer Belastung und inneren Spannungen am Rande

nicht erfüllt, weil die zugeordneten virtuellen Verschiebungszustände nicht die Form (1.011b) haben. Verwendet man lineare oder quadratische Polynome als Verschiebungsansätze bei grober Elementteilung, kann das Ungleichgewicht solche Ausmasse annehmen, dass eine sinnvolle Interpretation der Spannungen für die Bemessung oder den Spannungsnachweis nicht mehr möglich ist. Die Kenntnis dieses Tatbestandes zwingt



entweder zu einer sehr feinen Diskretisation oder zur Verwendung von Polynomansätzen höherer Ordnung mit erhöhter Kontinuität in den Knoten [6 - 15]. Dieser zweite Weg ist bei grossflächigen Tragwerken, die eine grobe Elementteilung zulassen, immer der wirtschaftlichere. Die meisten heute (1971) kommerziell verfügbaren Finite-Element-Programme verwenden noch die Elemente mit linearen oder quadratischen Ansätzen. Nicht selten werden die grossen Unstetigkeiten in den Spannungen durch arithmetische Mittelung in den Knoten geglättet. Es lohnt sich in solchen Fällen, auch die ungemittelten Spannungen auszudrucken; im Lichte von (1.012a) sagen sie mehr aus über die erhaltene Näherung als die Mittelwerte.

### 1.22 Hybride Finite Elemente

Wie zuvor wird das Tragwerk in Elemente aufgeteilt gedacht (Fig. 1.02). Grundlage der Diskretisation sind:

- Verschiebungsansätze

$$\tilde{u}_R = \begin{bmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{bmatrix} = \sum_1^N u_K q_K \quad (1.021)$$

für die inneren Elementkanten. Die Ansatzparameter  $q_K$  haben die Bedeutung von lokalen Stützwerten in Knoten oder auf Kanten, wobei die Verschiebungen in einem allgemeinen Punkt einer Kante auch hier nur von Stützwerten auf dieser Kante selbst abhängen dürfen.

- Spannungsansätze: Innerhalb jedes Elements wird ein Spannungszustand

$$\tilde{\sigma}_E = \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_x(x,y) \\ \tilde{\sigma}_y(x,y) \\ \tilde{\tau}_{xy}(x,y) \end{bmatrix} = \sum_1^M \sigma_K b_K + \bar{\sigma}_E \quad (1.022)$$

definiert, der im Gleichgewicht ist. der zweite Term rechts erfasst gegebene Spannungen, z.B. Belastungen an freien Elementrändern.

Für die theoretischen Grundlagen der Systemgleichungen sei auf [4,5] verwiesen, wo auch eine Uebersicht über die Literatur zu diesem Verfahren gegeben wird.

Man erhält einen ersten Satz von Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_E, \sigma_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_R, \sigma_K \end{bmatrix} \quad (1.023)$$

$K=1, \dots, M$

welche in jedem Element die M Spannungsparameter  $b_K$  in Funktion von Belastung und Verschiebungsparametern liefern. Formal stimmt auch diese Gleichung mit der Arbeitsgleichung der Baustatik überein; streng genommen ist aber keiner der Zustände verträglich. Anschaulich sind diese Gleichungen Verträglichkeitsbedingungen zwischen dem Ansatz für die Randverschiebungen und dem inneren Spannungsfeld des Elements.

In einem zweiten Satz von Gleichungen werden die Koordinaten-Verschiebungszustände als virtuelle Hilfszustände eingesetzt:

$$(\tilde{\sigma}, u_K) = 0 \quad (1.024)$$

$K = 1, \dots, N$

Hier erfassen die  $u_K$  in der Regel mehrere Elemente - alle, die an die Stützstelle von  $q_K$  angrenzen. Um die anschauliche Bedeutung dieser Gleichung zu verstehen, erinnern wir uns daran, dass der Spannungszustand  $\tilde{\sigma}$  stückweise für jedes Element definiert wurde: (1.022)

Zwischen den Elementen bestehen Spannungssprünge, die durch (1.024) im Mittel der Verschiebungsansatzfunktionen ins Gleichgewicht gebracht werden. Auf Grund dieser Eigenschaften kann über das Gleichgewicht an grob diskretisierten Systemen folgendes gesagt werden:

- die Gleichgewichtsbedingungen an einzelnen, isoliert gedachten Elementen sind - durch den Ansatz (1.022) - erfüllt
- die Gleichgewichtsbedingungen an einem "abgeschnitten" gedachten Teil des Tragwerks sind nicht erfüllt; (1.021) enthält keine nichtpassenden Verschiebungszustände
- das Gleichgewicht zwischen äusserer Belastung und inneren Spannungen am Rand wird eingehalten.

Allgemein kann somit von Hybridelementen eine bessere Anpassung an die Bedürfnisse des Bauingenieurs erwartet werden, als von reinen Deformationselementen. Die bekanntgewordenen Resultate sind leider nicht im Sinne der hier gestellten Frage ausgewertet worden.

### 1.23 Finite Elemente vom Gleichgewichtstyp

Auf Grund der Ueberlegungen der letzten Seiten schien es sinnvoll, eine Neuentwicklung eines Rechenverfahrens für Tragwerke des Stahlbaus ganz auf Gleichgewichtsansätze abzustützen, und alle Diskretisationsfehler auf die Verträglichkeitsbedingungen zu legen.

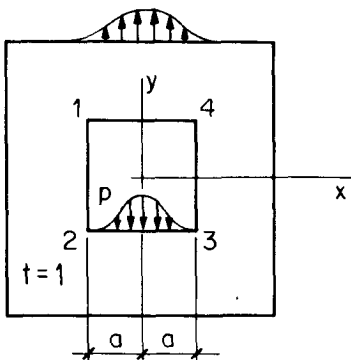
An einfachen Bauteilen - Scheiben, Platten - ist eine solche Lösung mit Hilfe der bekannten Analogien zwischen Verschiebungszustand bzw. Spannungsfunktion der Scheiben einerseits, Spannungsfunktionen und Verschiebungszustand der Platten andererseits aus den bekannten reinen Deformations-Elementansätzen zu gewinnen [2]. Anwendungen solcher Elemente sind in [22 - 27] gegeben.

An zusammengesetzten Bauteilen oder Tragwerken entstehen zusätzliche Schwierigkeiten durch die Uebergangsbedingungen bei verzweigten Kanten, die sich nicht auf die einfache Form der Gleichheit von Funktionen (Spannungsfunktionen, Verschiebungen) an allen angeschlossenen Scheibenrändern bringen lassen, wie sie für die direkte Deformationsmethode (und ihre analogen Formen mit Spannungsfunktionen) typisch ist. In der klassischen Theorie der Faltwerke und in der Stabstatik wird diese Aufgabe durch Ueberlagerung von "Grundsystem" und "überzähligen" Eigenspannungszuständen gelöst.

Im Rahmen automatischer Verfahren ist es zwar möglich, solche Kraftgruppen automatisch aufzustellen [19,20]; der direkte und mathematisch naheliegendste Weg des Einbezugs der Gleichgewichtsbedingungen als Lagrange'sche Nebenbedingungen erweist sich aber rechentechnisch als kürzer und problemloser. Dieser Weg ist in der Statik seit langem bekannt [16 - 18].

## 2. Elemente

Die numerische Behandlung ebener Scheiben durch Diskretisation der Airy'schen Spannungsfunktion zeigt keine Besonderheiten, solange die untersuchte Scheibe einfach zusammenhängend ist; die Lösung entspricht - infolge der wohlbekannt-ten Dualität zwischen den elastischen Grundgleichungen von Platte und Scheibe<sup>1</sup> - Schritt für Schritt dem Vorgehen bei der Untersuchung von Platten mit verträglichen Elementen. Die Analogie zwischen der Durchbiegungsfunktion der Platte und der Airy'schen Spannungsfunktion der Scheibe geht zum Teil verloren bei mehrfach zusammenhängendem Gebiet. Als Beispiel betrachten wir den geschlossenen Ring von Fig. (2.01), der innen und oben durch eine Belastungsverteilung



$$F = \int_2^3 p dx$$

Fig. 2.01

<sup>1</sup> Eine ausführliche Darstellung dieser Beziehungen geben Veubeke und Zienkiewicz [2]; auch die historische Literatur zu diesem Thema ist dort angegeben.

der Resultierenden  $F$  belastet sei. Mit (2.001) ist dann auf dem inneren Randabschnitt 2 - 3

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = p \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

oder

$$F = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_3 - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_2$$

während auf allen anderen Randabschnitten die Krümmung und Verwindung der Spannungsfunktion null sein müssen. Daraus folgt anschaulich oder mit (2.095), dass

$$\oint_{1,2,3,4} \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds \neq 0$$

Die Spannungsfunktion kann mit anderen Worten keine stetige und eindeutige Funktion sein. Diesem Umstand tragen wir Rechnung, indem wir innerhalb einfach zusammenhängender Scheibenstücke stetige, eindeutige Spannungsfunktionen ansetzen, die einen willkürlich gewählten linearen Anteil haben. Auf den Rändern solcher Scheibenstücke führen wir Kraftgrößen als Randvariable ein. Da die Beschreibung des Spannungszustands mit den Stützwerten der Spannungsfunktion viel weniger Parameter verlangt, als jene durch Kräfte, sollen die Scheibenstücke so gross wie möglich gewählt werden.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Diskretisation der Spannungsfunktion in allgemeinen Dreieckselementen und den anschliessenden Aufbau der Scheibenstücke, mit Transformation auf Kraftvariable. Die Darstellung geht darauf aus, zuerst die mechanisch wesentlichen Dinge möglichst einfach in kartesischen Koordinaten zu zeigen (2.1 - 2.13). Rechen-technisch werden mit Vorteil andere Systeme verwendet, die der Geometrie der Elemente angepasst sind. Die wichtigsten Einzelheiten dazu sind (2.2 - 2.26) zu entnehmen. Schliesslich gehen wir in (2.3) auf die Formulierung der Uebergangsbedingungen bei mehrfachen Scheibenkanten ein, die wir begrifflich als selbständige Elemente behandeln. Die wichtigste Folge dieser Regelung ist die Abwesenheit eines übergeordneten globalen Koordinatensystems für den weiteren Substrukturaufbau: Alle Elementvariablen sind "lokal" orientiert (körperfest). Diese Besonderheit ist mit ein Grund für die rechentechnische Bevorzugung lokaler (schiefer und homogener) Koordinatensysteme.

### 2.1 Diskretisation der Spannungen

Ein ebenes, einfach zusammenhängendes, polygonales Scheibenstück von konstanter Dicke  $t$  (Fig. 2.02) sei ein Teil eines Tragwerks aus ebenen Scheiben.

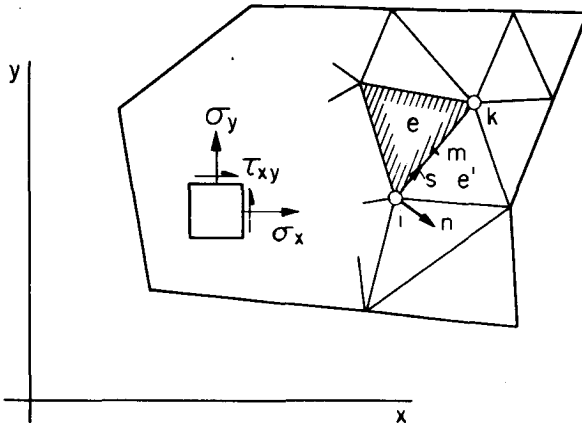


Fig. 2.02

Sein Spannungszustand wird beschrieben durch die Airy'sche Spannungsfunktion

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (2.001)$$

Zur Diskretisation dieser Funktion denken wir uns das Scheibenstück in allgemeine Dreiecke aufgeteilt (Fig. 2.02). In jedem dreieckigen Element nähern wir die Spannungsfunktion durch ein vollständiges Polynom 5. Grades an:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_e &= \sum_{(21)} q_{JL} x^J y^L \quad 0 \leq J+L \leq 5 \\ &= \underset{(1*21)}{\xi_e} \underset{(21*1)}{q_e} \end{aligned} \quad (2.002)$$

Als Stützwerte für die diskretisierte Spannungsfunktion in einem Knoten  $i$  dienen die 6 Werte von Funktion, ersten und zweiten Ableitungen:

$$\tilde{\Phi}_i, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right|_i, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right|_i, \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} \right|_i, \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} \right|_i, \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} \right|_i$$

dazu kommen die Normalableitungen

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_m \quad (2.003)$$



in den Seitenmitten. Wir ordnen diese Stützwerte für das Element  $e$  in die Spalte

$$p_e = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_{1x}, \tilde{\Phi}_{1y}, \tilde{\Phi}_{1xx}, \tilde{\Phi}_{1xy}, \tilde{\Phi}_{1yy}, \tilde{\Phi}_{12n}, \\ \tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\Phi}_{31n} \end{array} \right\} \quad (2.004)$$

Die lineare Beziehung zwischen diesen neuen Variablen und den Polynomkoeffizienten  $q_e$  kann mit Hilfe von (2.002) sofort in Funktion der speziellen Dreiecksgeometrie beschrieben werden:

$$p_e = B_e q_e \quad (2.005)$$

(21\*21)

Wie wir sehen werden, ist die Matrix  $B_e$  für alle nichtausgearteten Dreiecksformen regulär. Man könnte durch Inversion die Interpolationsgleichungen

$$\tilde{\Phi}_e = \xi_e B_e^{-1} p_e = \beta_e p_e \quad (2.006)$$

(1\*21)

gewinnen. Rechentechnisch ist es besser, diese Inversion durch direkte Formulierung der Interpolationsmatrix in einem geeigneten Koordinatensystem zu umgehen. Wir zeigen diese Technik im Abschnitt (2.24)

Auf Grund der getroffenen Annahmen ist das diskretisierte Spannungsfeld überall im Gleichgewicht. Im Innern der Elemente folgt dies direkt aus der Definition der Spannungsfunktion; längs den Elementkanten folgt auf Grund der gemeinsamen Stützwerte:

- Die Funktion  $\tilde{\Phi}(s)$  längs der Kante ik (Fig. 2.02) ist 5. Grades in  $s$ . Sie ist durch die 6 Werte

$$\tilde{\Phi}_i, \tilde{\Phi}_k, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} \right|_i, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} \right|_k, \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial s^2} \right|_i, \left. \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial s^2} \right|_k$$

bestimmt und damit an beiden Rändern des Schnittes identisch. Daraus folgt die Gleichheit der Normalspannungen

$$\tilde{\sigma}_n(s) = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial s^2}$$

in jedem Punkt der gemeinsamen Kante zwischen den Elementen  $e$  und  $\bar{e}$ .

- Die Normalableitung  $\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_k(s)$  längs der Kante ik ist 4. Grades in  $s$ . Sie ist durch die 5 Werte

$$\left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_i, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_k, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} \right|_m, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n \partial s} \right|_i, \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n \partial s} \right|_k$$

bestimmt und damit an beiden Rändern des Schnitts identisch. Daraus folgt die Gleichheit der Schubspannungen

$$\tilde{\tau}_{ns}(s) = + \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial n \partial s} \quad (1)$$

in jedem Punkt der gemeinsamen Kante zwischen den Elementen  $e$  und  $\bar{e}$ .

(1) Wir definieren  $\tilde{\tau}_{ns}$  gegenläufig zur Randkoordinate; deshalb ist hier das positive Vorzeichen anzubringen.

Im Sinne der Dualität zwischen Scheibe und Platte entspricht dieses Scheibenelement einem verträglichen Element für Plattenbiegung, welches seit 1968 in der Literatur ausgiebig behandelt worden ist [6 - 14]. Zlamal [9] hat gezeigt, dass die Approximationsordnung dieses Ansatzes für Randwertprobleme 4. Ordnung 4 ist:

$$\max_{(\tau)} \left| \Phi - \tilde{\Phi} \right| \leq \frac{C}{\sin^2 \nu} M_6 h^4 \quad (2.008)$$

Darin bedeuten:

C eine Konstante, die von der Elementteilung unabhängig ist.

$h, \nu$  längste Seite und kleinster Innenwinkel der Elemente in der Substruktur  $\tau$ .

$M_6$  maximaler Wert der 6. Ableitung von  $\Phi$  in  $\tau$ .

Diese Ungleichung gestattet einen Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit mit jener anderer numerischer Verfahren. Man beachte bei solchen Vergleichen, dass eine globale Einschränkung dieser Art nicht mit dem lokalen Fehler verglichen werden darf, der z.B. aus dem Restglied einer Taylor-Entwicklung folgt. Nach [3] ist die Approximationsordnung eines Differenzenverfahrens mit einem Taylorreihen-Restglied der Ordnung  $K$  gegeben durch

$$\max_{(\tau)} \left| \tilde{\Phi} - \Phi \right| \leq Ch^{K-P}$$

$P$  ist die Ordnung der Differentialgleichung oder des Operators, und  $C$  ist unabhängig von der Maschenweite  $h$ .

Die Wahl eines Elementansatzes der relativ hohen Fehlerordnung 4 hat nicht den Sinn, unnötig hohe Genauigkeit zu erzielen. Vielmehr erlauben solche Elemente bei gegebenen Präzisionsansprüchen eine viel gröbere Diskretisation als die heute verbreiteten Verfahren der Fehlerordnungen 0 bis 2. Solange nicht Geometrie und Querschnittsverlauf eine feine Teilung diktieren - was in den Verhältnissen des Bauwesens selten der Fall ist - lässt sich auf diese Weise viel Rechenaufwand einsparen.

Aus den Interpolationsgleichungen (2.006) erhält man die Spannungen

$$\tilde{\sigma}_e = \begin{bmatrix} \partial^2/\partial y^2 \\ \partial^2/\partial x^2 \\ -\partial^2/\partial x \partial y \end{bmatrix} \beta_e p_e = \nabla \beta_e p_e \quad (2.009)$$

$(3 \times 1)$    $(3 \times 21)$

Die 21 Stützwerte an einem Element e sind der Spalte der Stützwerte an der Substruktur zu entnehmen. Formal schreibt man diese Zuordnung in üblicher Weise

$$p_e = a_e p_T \quad (2.010)$$

$(21 \times 1)$    $(21 \times N_T)$    $(N_T \times 1)$

Der Beitrag der Substruktur zur (komplementären) Energie des Tragwerks ist

$$\Delta \tilde{\pi}_T = \frac{1}{2} \iint_T \tilde{\sigma}^t E^{-1} \tilde{\sigma} dA \quad (2.011)$$

$= \frac{1}{2} p_T^t F_T p_T$

mit

$$F_T = t \sum_{(e)} a_e^t \left[ \iint_e \nabla \beta_e^t E^{-1} \nabla \beta_e dA \right] a_e$$

der Flexibilitätsmatrix der Substruktur in den Variablen  $p_T$ . Diese Matrix ist singulär und hat den Rangabfall 3: Jede lineare Funktion  $\tilde{\Phi}$  über die ganze Substruktur liefert

$$\Delta \tilde{\pi}_T \equiv 0$$

Wir können den linearen Anteil von  $\tilde{\Phi}$  willkürlich mit

$$\tilde{\Phi} = 0 \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} \right|_j = 0 \quad \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right|_j = 0$$

in einem Punkt  $j$  festlegen, ohne den Spannungszustand zu beeinflussen. Denken wir uns jetzt die Spalte der Substrukturvariablen nach isolierten Inneren und Aeusseren geordnet:

$$p_T = \left\{ \begin{array}{cc} p_i & , & p_s \\ (N_i * 1) & & (N_s * 1) \end{array} \right\} \quad (2.012)$$

so ist mit 6 Variablen pro Ecke und einer Variablen pro Kante an einer Substruktur mit  $M$  Polygonecken<sup>1</sup>

(2.013)

$$N_T = 7M - 3$$

<sup>1</sup> Hier ist vorausgesetzt, dass alle Polygonecken Innenwinkel  $\neq \pi$  haben. Ueber Netzpunkte an geradlinigen Kanten siehe 2.26.

Entsprechend den Ausführungen des Abschnitts (3) können wir die inneren, isolierten Variablen schon auf der Substrukturstufe auf Grund von

$$\Delta \tilde{\pi}_T = \text{stationär} (p_s = \text{const})$$

eliminieren und den Beitrag zur Energie auf die Form

$$\Delta \tilde{\pi}_s = \frac{1}{2} p_s^\dagger \underset{(N_s * N_s)}{F_s} p_s \quad (2.014)$$

bringen. Im Hinblick auf die Verwendung des Scheibenstücks in räumlicher Verbindung mit anderen Scheiben ist es erforderlich, die Randwerte  $p_s$  durch Kraftgrößen auszudrücken. Grundlage dieser Transformation sind die folgenden Definitionen (Fig. 2.04) für die Schnittkräfte an der Kante

$$\begin{aligned} F_{ik} &= t \int_i^k \tilde{\sigma}_n ds \\ B_{ik} &= t \int_i^k \tilde{\sigma}_n (s - \frac{l_{ik}}{2}) ds \\ Q_{im} &= t \int_i^m \tilde{\tau}_s ds \quad Q_{mk} = t \int_m^k \tilde{\tau}_s ds \end{aligned} \quad (2.015)$$

und für die Spannungsflüsse an den Ecken

$$(t\sigma_{ik}), (t\sigma_{ki}), (t\tau_{ik}), (t\tau_{ki}) \quad (2.016)$$

Diese äusseren Kraftvariablen ordnen wir in der Spalte

$$P_E = \left\{ (t\sigma_{12}), (t\tau_{12}), F_{12}, B_{12}, Q_{1m}, Q_{m2}, \right. \\ \left. (t\sigma_{21}), (t\tau_{21}), \dots, (t\sigma_{1M}), (t\tau_{1M}) \right\} \quad (2.017)$$

Normal- und Schubspannungen  $\tilde{\sigma}_n, \tilde{\tau}_s$  am Rande sind nach (2.001) und (2.002) kubische Funktionen der Randkoordinate  $\xi$ ; aus den Definitionen (2.015) und (2.016) erhält man nach kurzer Zwischenrechnung die Spannungsformeln

$$\tilde{\sigma}_n(\xi) = \sigma_{ik} h_\sigma(\xi) + \sigma_{ki} h_\sigma(1-\xi) + \\ + \frac{6F_{ik}}{tl_{ik}} h_F(\xi) + \frac{6B_{ik}}{tl_{ik}^2} h_B(\xi) \quad (2.018)$$

$$\tilde{\tau}_s(\xi) = \tau_{ik} h_\tau(\xi) + \tau_{ki} h_\tau(1-\xi) + \\ + \frac{2Q_{im}}{tl_{ik}} h_Q(\xi) + \frac{2Q_{mk}}{tl_{ik}} h_Q(1-\xi)$$

für die allgemeinen Punkte der Kante, mit

$$\xi = \frac{s}{l_{ik}}$$

und den Hilfsfunktionen (Fig. 2.06)

$$\begin{aligned}h_{\sigma} &= 1 - 9\xi + 18\xi^2 - 10\xi^3 \\h_F &= \xi - \xi^2 \\h_B &= -10\xi + 30\xi^2 - 20\xi^3 \\h_{\tau} &= 1 - 8\xi + 15\xi^2 - 8\xi^3 \\h_Q &= 11\xi - 27\xi^2 + 16\xi^3\end{aligned}$$

In den Beispielen werden wir in der Regel den Schubspannungsverlauf quadratisch voraussetzen; Vergleichsrechnungen zeigen, dass die Genauigkeitseinbusse infolge dieser Vereinfachung unbedeutend ist (4.1; siehe auch [7]). Dann gilt für die Schubspannung

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(s) &= \tau_{ik} h_{\tau}^{\square}(\xi) + \tau_{ki} h_{\tau}^{\square}(1-\xi) \\ &\quad + \frac{6 Q_{ik}}{t l_{ik}} h_Q^{\square}(\xi)\end{aligned}\tag{2.018a}$$

mit

$$\begin{aligned}h_{\tau}^{\square} &= 1 - 4\xi + 3\xi^2 \\h_Q^{\square} &= \xi - \xi^2\end{aligned}$$

wo  $Q_{ik}$  jetzt die Querkraft an der ganzen Seite bezeichnet.



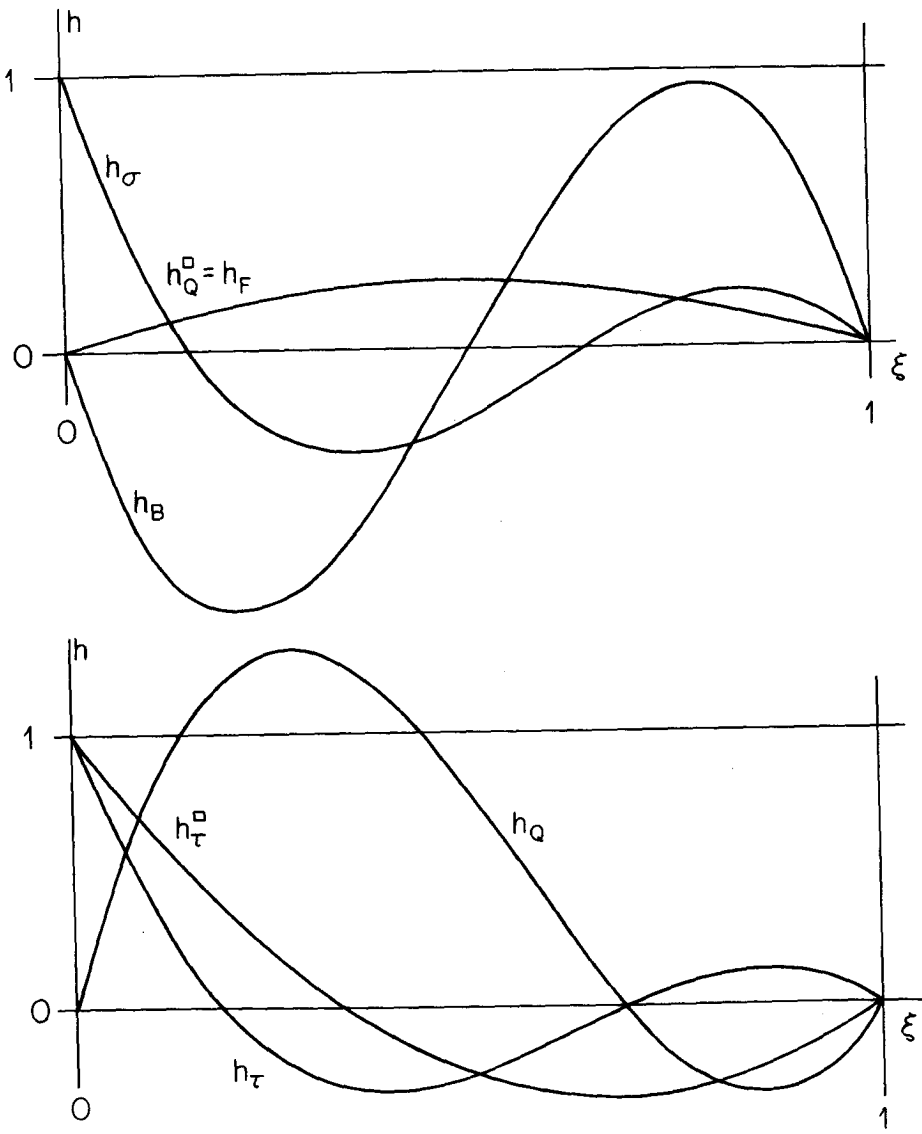


Fig. 2.06

Während die diskretisierte Airy'sche Spannungsfunktion  $\Phi$  ihrer Definition nach ein Spannungsfeld im Gleichgewicht aufspannt, bilden die Kraftgrößen (2.015), (2.016) an den Rändern der Substruktur nicht automatisch eine Gleichgewichtsgruppe; zwischen ihnen sind die 3 Gleichgewichtsbedingungen der Ebene einzuhalten, sowie an jeder äusseren Ecke eine lokale Gleichgewichtsbedingung zwischen den 4 angeschlossenen Spannungen (Fig. 2.05). Aus einer Momentenbedingung an einem parallelogrammförmigen Eckelement erhält man

$$(\sigma_{jk} - \sigma_{ji}) \cos \alpha_j - (\tau_{jk} + \tau_{ji}) \sin \alpha_j = 0 \quad (2.019)$$

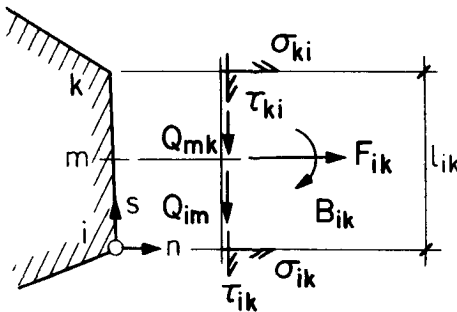


Fig. 2.04

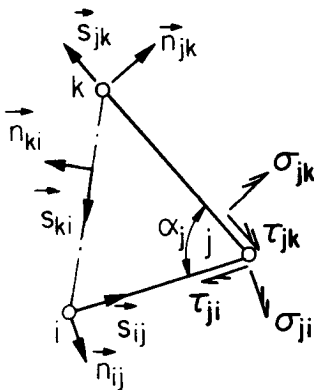


Fig. 2.05

Formal sind die Randvariablen der Substruktur lineare Funktionen der äusseren Kraftvariablen:

$$P_S = C_S P_E \quad (2.020)$$

(N<sub>S</sub>\*8M)

wobei zwischen diesen 3 globale und M lokale Gleichgewichtsbedingungen (2.019) eingehalten werden müssen:

$$G_E P_E = 0 \quad (2.021)$$

((M+3)\*8M)

Bei der späteren Bildung des Energieminimums am Tragwerk (oder an einer übergeordneten Substruktur) wird man diese Gleichungen als Nebenbedingungen zu berücksichtigen haben. Diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe eines Satzes von (M+3) Lagrange'schen Multiplikatoren

$$U_E$$

(M+3)\*1

Der Beitrag des Scheibenstücks zu einer entsprechend erweiterten quadratischen Form der Energie ist dann

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = \frac{1}{2} P_E^\dagger F_E P_E + P_E^\dagger G_E^\dagger U_E \quad (2.022)$$

mit

$$F_E = C_S^\dagger F_S C_S$$

(8M\*8M)                      (N<sub>S</sub>\*N<sub>S</sub>)

Eine direkte Herleitung der Kraftverbindungsmatrix (2.020) und der Gleichgewichtsbedingungen (2.021) geben wir in (2.2) an.

### 2.11 Die Verschiebungen

Die d i s k r e t e n Verschiebungsgrößen des Scheibenstücks sind mit (2.022) zu definieren als

$$v_E = F_E p_E + G_E^T u_E \quad (2.023)$$

umgekehrt erhält man durch Integration

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = \int_0^{v_E} p_E^\dagger \delta v_E \quad (2.022a)$$

wieder (2.022). Ein Verschiebungsfeld zu unserem Spannungsansatz existiert im Allgemeinen nicht, weil dieser nicht integrierbar ist. Eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung der diskreten Verschiebungsgrößen gewinnt man an Spezialfällen mit integrierbaren Spannungen. Bildet man hier den Integranden in (2.022a) als Randarbeit der Spannungen infolge  $p_E$  mit dem Inkrement des Verschiebungsfeldes, so ist mit den Hilfsfunktionen (2.018)

$$\begin{aligned} p_E^\dagger \delta v_E = & \sum_1^{M-1} \int_k^{k+1} \left\{ (\tau_{k,k+1} h_\sigma(\xi) + t_{\sigma_{k+1,k}} h_\sigma(1-\xi)) \right. \\ & + F_{k,k+1} \frac{6h_F(\xi)}{l_{k,k+1}} + B_{k,k+1} \frac{6h_B(\xi)}{l_{k,k+1}^2} \left. \right) \delta v_n(s) \\ & + (t_{\tau_{k,k+1}} h_\tau(\xi) + t_{\tau_{k+1,k}} h_\tau(1-\xi)) \\ & + Q_{k,m} \frac{2h_Q(\xi)}{l_{k,k+1}} + Q_{m,k+1} \frac{2h_Q(1-\xi)}{l_{k,k+1}} \left. \right) \delta v_s(s) \} ds \end{aligned}$$

Die Gleichung muss für alle Werte von  $\mathbf{p}_E$  identisch erfüllt sein; die Komponenten von  $\mathbf{u}_E$  an der Seite  $k, k+1$  sind deshalb

$$\begin{aligned}
 v_{\sigma}^{k,k+1} &= \int_k^{k+1} h_{\sigma} u_n ds & v_{\sigma}^{k+1,k} &= \int_k^{k+1} h_{\sigma}(1-\xi) u_n ds \\
 v_F^{k,k+1} &= \frac{6}{l_{k,k+1}} \int_k^{k+1} h_F u_n ds & v_B^{k,k+1} &= \frac{6}{l_{k,k+1}^2} \int_k^{k+1} h_B u_n ds \\
 v_{\tau}^{k,k+1} &= \int_k^{k+1} h_{\tau} u_s ds & v_{\tau}^{k+1,k} &= \int_k^{k+1} h_{\tau}(1-\xi) u_s ds \\
 v_Q^{k,m} &= \frac{2}{l_{k,k+1}} \int_k^{k+1} h_Q(\xi) u_s ds \\
 v_Q^{m,k+1} &= \frac{2}{l_{k,k+1}} \int_k^{k+1} h_Q(1-\xi) u_s ds
 \end{aligned} \tag{2.024}$$

Im allgemeinen Fall existieren die Integranden dieser Mittelwerte nicht. Trotzdem wird man die Verschiebungsgrößen (2.023) im Sinne dieser Ausdrücke interpretieren, weil sie in der G r e n z e gegen die entsprechenden Mittelwerte der exakten Lösung streben.

Statt die Energie nach ihrer Diskretisation durch Lagrange'sche Multiplikatoren zu ergänzen, kann man (2.022) direkt aus einem allgemeineren Variationsprinzip der Elastomechanik ableiten.

Dieses Vorgehen vermittelt mehr Einsicht in die mechanische Bedeutung der Multiplikatoren und zeigt auch, wie ein Gleichgewichtsansatz mit *D e f o r m a t i o n s m e t h o d e* behandelt werden kann. Ausgangspunkt ist das Hellinger-Reissner'sche Variationsprinzip [28], für ebenen Spannungszustand ohne Volumkräfte in der Form:

$$\begin{aligned}
 -\pi_R = & \int_A \left\{ B(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) + \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) u + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) v \right\} dA \\
 & - \int_{S1} \left\{ (\sigma_n - \bar{\sigma}_n) u_n + (\tau_s - \bar{\tau}_s) u_s \right\} ds \\
 & - \int_{S2} \left\{ \sigma_n \bar{u}_n + \tau_s \bar{u}_s \right\} ds
 \end{aligned}$$

(2.025)

Darin bezeichnen  $\bar{\sigma}_n, \bar{\tau}_s$  vorgeschriebene Randspannungen und  $\bar{u}_n, \bar{u}_s$  gegebene Randverschiebungen. Die Spannungen  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  und die Verschiebungen  $u, v$  sind unabhängig und ohne Nebenbedingungen zu variieren. Die spezifische komplementäre Formänderungsenergie  $B$  stimmt in unserem Fall mit der Formänderungsenergie überein und ist

$$B = \frac{1}{2} \sigma^t E^{-1} \sigma$$

(3\*3)

womit die Materialgleichungen vorausgesetzt werden; die Gleichgewichtsbedingungen und Verträglichkeitsbedingungen sind in (2.025) enthalten, wie man aus der ersten Variation des Funktionals sieht.

Wir machen folgende speziellen Voraussetzungen über die unabhängigen Felder:

- Die Spannungen  $\sigma_x$ ...sind innerhalb jeder Substruktur im Gleichgewicht; durch die Ränder der Substrukturen sind Spannungssprünge im Ansatz vorerst zugelassen.
- Die Verschiebungen gehen stetig durch die Ränder der Substrukturen.

Das Integral des zweiten und dritten Terms unter dem Flächenintegral von (2.025) ist unter diesen Voraussetzungen auf den Rändern zwischen Substrukturen nicht definiert. Wir schreiben diese Terme für die unmittelbare Nachbarschaft  $n=\pm \epsilon$  eines inneren Kantenabschnitts  $i, k$  in der Form

$$t \int_i^k \left[ \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left\{ \left( \frac{\partial \sigma_n}{\partial n} + \frac{\partial \tau_s}{\partial s} \right) u_n + \left( \frac{\partial \tau_s}{\partial n} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} \right) u_s \right\} dn \right] ds$$

wo  $n, s$  das lokale Koordinatensystem normal und parallel der Kante bezeichnet. Partielle Integration in der Normalrichtung liefert

$$t \int_i^k \left[ \left( \sigma_n u_n + \int \frac{\partial \tau_s}{\partial s} dn u_n \right) \Big|_{-\epsilon}^{+\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left( \sigma_n \frac{\partial u_n}{\partial n} + \int \frac{\partial \tau_s}{\partial s} dn \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) dn + \left( \tau_s u_s + \int \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} dn u_s \right) \Big|_{-\epsilon}^{+\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \left( \tau_s \frac{\partial u_s}{\partial n} + \int \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} dn \frac{\partial u_s}{\partial n} \right) dn \right] ds$$

und für  $\epsilon \rightarrow 0$  verbleibt ein Beitrag

$$t \int_i^k (-\sigma_n^- u_n + \sigma_n^+ u_n - \tau_s^- u_s + \tau_s^+ u_s) ds$$

wo die hochgestellten Vorzeichen den Schnitttrand bezeichnen. Integriert man über das Innere und die inneren Ränder  $\partial S_i$  der beteiligten Substrukturen  $S$ , so lässt sich (2.025) damit für

unseren Fall definieren als

$$\begin{aligned}
 -\pi_R^* = \sum_S \left\{ \dagger \left[ \int_{S_i} \sigma^\dagger E^{-1} \sigma \, dA - \right. \right. \\
 \left. \left. - \int_{\partial S_i + \partial S_1} (\sigma_n u_n + \tau_s u_s) \, ds + \int_{\partial S_1} (\bar{\sigma}_n u_n + \bar{\tau}_s u_s) \, ds \right. \right. \\
 \left. \left. - \int_{\partial S_2} (\sigma_n \bar{u}_n + \tau_s \bar{u}_s) \, ds \right] \right\} = \text{stationär} \quad (2.030)
 \end{aligned}$$

Dieses Prinzip ist von Pian und Tong als Erweiterung des Prinzips vom Minimum der komplementären Energie angegeben worden; [5]. Durch geeignete Diskretisation des unabhängigen Verschiebungsfeldes wäre es möglich, nun auf der Substrukturstufe zu Hybrid-elementen überzugehen. Soll dagegen der Gleichgewichtscharakter des Ansatzes beibehalten werden, können die Definitionen (2.024) für die Diskretisation der Randintegrale in (2.030) dienen. Die vorgeschriebenen Spannungen auf  $\partial S_1$  müssen die spezielle Form (2.018) haben; gegebene Verschiebungen auf  $\partial S_2$  können ohne solche Einschränkungen berücksichtigt werden, in der Regel wird jedoch die Vorschreibung diskreter Verschiebungsgrößen auch hier genügen. Mit (2.014) und den Definitionen (2.024) kann der Beitrag einer Substruktur zu (2.030) dann in der Form

$$-\Delta \pi_S^* = \frac{1}{2} p_S^\dagger F_S p_S - p_E^\dagger v_E + \bar{p}_E^\dagger v_E \quad (2.031)$$

angeschrieben werden. Der Satz von Verschiebungen  $v_E$  enthält vorerst auch Verschiebungen, denen später feste Werte zugewiesen werden sollen. Zwischen den äusseren Kraftvariablen  $p_E$  und den Stützwerten  $p_S$  der Spannungsfunktion auf dem Rand der Substruktur besteht auf Grund der Definitionen (2.015), (2.016)



eine lineare Beziehung

$$p_E = \underset{(8M * N_S)}{D_S} p_S \quad (2.032)$$

(2.020) und (2.021) könnten daraus durch Teilinversion erhalten werden; man hat

$$C_S D_S = \underset{(N_S * N_S)}{I} \quad (2.033)$$

$$G_E D_S = \underset{((M+3) * N_S)}{O}$$

Einsetzen von (2.032) in (2.031) und Ableitung nach den Variablen  $p_S$  bei festgehaltenem  $v_E$  liefert

$$D_S^\dagger v_E = \underset{(N_S * 1)}{F_S} p_S = v_S \quad (2.034)$$

Die so definierten Verschiebungsgrößen  $v_S$  sind anschaulich die Amplituden der Verschiebungen zu den Eigenspannungszuständen  $p_S$ . Mit (2.022) und (2.033) folgt dann aus (2.023)

$$v_E = C_S^\dagger v_S + G_E^\dagger u_E \quad (2.035)$$

Bildet man hier die virtuelle Arbeit

$$p_E^\dagger v_E = p_S^\dagger v_S + (p_E^\dagger G_E^\dagger) u_E \quad (2.036)$$

so leisten die Lagrange'schen Multiplikatoren nur mit Kräften Arbeit, welche die 3 globalen und  $M$  lokalen Gleichgewichtsbedingungen (2.019) verletzen. Daraus folgt die anschauliche Bedeutung der Multiplikatoren;  $U_E$  enthält, für das diskrete System,

- 3 Starrkörperverschiebungen der Substrukturen in ihrer Ebene
- $M$  lokale Rotationen der Ecken der Substruktur.

---

Die Verschiebungsvariablen  $v_E$  sind den Kraftgrößen  $p_E$  von (2.015) und (2.016) zugeordnet. Grundsätzlich wären sie für eine Behandlung des diskreten Systems nach der *D e f o r m a t i o n s m e t h o d e* geeignet: aus (2.034) folgt

$$p_S = F_S^{-1} D_S^t v_E \quad (2.037)$$

Die Flexibilitätsmatrix  $F_S$  ist regulär, denn der lineare Anteil der Spannungsfunktion über die Substruktur wurde unterdrückt. Damit transformiert man den Beitrag der Substruktur zur Energie auf die Form

$$\Delta \pi_S^* = v_E^t K_E v_E - v_E^t \bar{p}_E \quad (2.038)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$K_E = D_S F_S^{-1} D_S^t \quad (2.039)$$

Dieses Vorgehen ist in anderem Zusammenhang von Veubeke und Sanders angewendet worden: [22,25,27]. Der Gleichgewichtscharakter des Ansatzes bleibt erhalten, denn die Deformationsgleichungen der übergeordneten Struktureinheit sind Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte  $\mathbf{p}_E$  der Substrukturen, und diese Kräfte legen den Spannungsverlauf an deren Rändern eindeutig fest. Die Steifigkeitsmatrix (2.039) hat einen Rangabfall  $(M+3)$ , entsprechend den kinematischen Freiheitsgraden  $\mathbf{u}_E$  in (2.035). Soweit es sich um die 3 Starrkörperverschiebungen handelt, ist dieser Rangabfall keine Besonderheit; dagegen können die  $M$  lokalen Rotationen Anlass zu einem labilen System mit singulärer Matrix geben.

An einer einzelnen Ecke einer Substruktur (Fig. 2.05) folgt aus (2.019) und der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix (2.039), dass eine Verschiebung mit

$$\begin{aligned} v_{\sigma k} &= \omega_j \cos \alpha_j \\ v_{\sigma i} &= -\omega_j \cos \alpha_j \\ v_{\tau k} &= -\omega_j \sin \alpha_j \\ v_{\tau i} &= -\omega_j \sin \alpha_j \end{aligned} \tag{2.040}$$

und allen übrigen Komponenten von  $\mathbf{v}_E$  vom Wert 0 zwangslos vor sich geht.

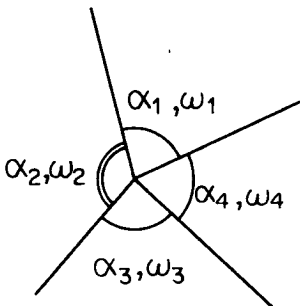


Fig. 2.06

An einem Knotenpunkt mit  $N$  angeschlossenen Substrukturecken in einer Ebene (Fig. 2.06) gewinnt man durch Identifikation anliegender Verschiebungen (2.040) unter Beachtung der Vorzeichen die Gleichungen

$$\begin{aligned}\omega_i \cos \alpha_i &= \omega_{i+1} \cos \alpha_{i+1} \\ \omega_i \sin \alpha_i &= -\omega_{i+1} \sin \alpha_{i+1}\end{aligned}\tag{2.041}$$

$i = 1 \dots N$   
 $i+1 = 2 \dots N, 1$

oder, wenn  $\omega_i \neq 0$

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = \frac{\cos \alpha_i}{\cos \alpha_{i+1}} = -\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_{i+1}}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\sin(\alpha_i + \alpha_{i+1}) = 0$$

Dies zeigt, dass Anordnungen mit vier rechten Winkeln in einer Ebene einen kinematischen Freiheitsgrad besitzen.

An einer Pyramidenspitze im Raum gelangen nur die Gleichungen der zweiten Zeile von (2.041) zur Anwendung, welche den Verschiebungen parallel den Kanten zugeordnet sind; jede solche Anordnung besitzt mit

$$\omega_i = \pm \frac{c}{\sin \alpha_i}$$

einen kinematischen Freiheitsgrad.

Auch die Formulierung (2.022) mit Kräften als Hauptvariable führt zu linear abhängigen Gleichungen und unbestimmten Multiplikatoren, sofern (2.019) für alle Substrukturecken um einen Knoten in das Gleichungssystem einbezogen wird und z.B. lauter rechte Winkel vorliegen oder die Normalspannungen null gesetzt sind. Die Abhängigkeit ist hier sehr einfach zu isolieren, denn die Koeffizienten von  $\omega_j$  in (2.040) erscheinen in den Spalten von  $G_E^\dagger$  in (2.035), und der zugeordnete Multiplikator aus  $u_E$  ist  $\omega_j$ . Um lineare Abhängigkeit zu vermeiden, genügt es, überschüssige Multiplikatorgleichungen und ihre Multiplikatoren auszuschneiden. Formal entspricht dies der Zuweisung des Werts 0 an den Multiplikator; in Abwesenheit gegebener äusserer Belastungen, welche (2.019) verletzen, ist die Multiplikatorgleichung dann - wegen ihrer linearen Abhängigkeit - erfüllt und entfällt. Die manuelle Erkennung und Ausscheidung überschüssiger Multiplikatorvariablen ist möglich, aber sie behindert bei grossen Systemen die Automatisierung des Verfahrens. Im Abschnitt 3 dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Ausscheidung solcher Multiplikatoren in den Ablauf der Gauss'schen Elimination einbezogen und automatisiert werden kann.

Das Vorgehen hat sich an den Beispielen des vierten Abschnitts als so zuverlässig erwiesen, dass es auch bei Deformationsmethode mit Aussicht auf Erfolg verwendet werden könnte. Praktisch wird man dabei jene lokalen Verschiebungsgrössen null setzen, welche im Eliminationsprozess als abhängig hervortreten. Diese Lösung unterscheidet sich von jener aus Kraftmethode nur in den Verschiebungen zu Kraftgrössen, welche statisch äquivalent Null sind: die unbestimmten Rotationen  $\omega_j$  in (2.040) erhalten andere Werte zugewiesen. Auch hier zeigt das Verschwinden der Belastungsglieder in den - durch Abhängigkeit - ausgelöschten Eliminationsgleichungen das Gleichgewicht der angebrachten Belastungen im Sinne von (2.019) an.

## 2.12 Ueberkontinuität

Es ist praktisch zweckmässig, möglichst grosse Bereiche des Tragwerks auf Grund des Ansatzes für die Spannungsfunktion (2.002) ohne Einführung von Kraftvariablen zu behandeln. Pro Knoten des Elementnetzes (Fig. 2.02) hat man dabei mit 6 Variablen zu rechnen; dazu kommt eine weitere Variable für jede Seite. Ein ausgedehntes Dreiecksnetz mit  $N$  Knoten hat pauschal und bei Vernachlässigung des Randeinflusses  $2N$  Dreiecke und  $3N$  Kanten, wie man sich mit Hilfe des Euler'schen Polyedersatzes überlegt<sup>1</sup>. Für den Variablensatz  $\rho_3$  folgt daraus die Anzahl der Komponenten zu

$$L = 6N + 3N = 9N$$

Dagegen wären im Extremfalle des Uebergangs auf Kraftvariable an jedem Dreieck pauschal

$$L^* = 8 * 3N + 6 * 2N = 36N$$

wo der erste Beitrag von den Kanten, der zweite von den 6 Lagrange'schen Multiplikatoren pro Dreieck stammt. Der Mehraufwand durch den Uebergang auf Kraftvariable ist überraschend hoch. In praktischen Fällen ist es allerdings nie notwendig, schon auf Dreieckselementstufe Kraftvariablen einzuführen; solche werden erst unentbehrlich bei Kanten mit mehrfachem Scheibenanschluss oder an den Anschlussstellen anderer Elementtypen.

<sup>1</sup> In zwei Dimensionen ist mit  $N$  Knoten,  $K$  Kanten und  $D$  Dreiecken

$$N + D = K + 1$$

und für grosse Netze einfachen Zusammenhangs

$$K \sim \frac{3D}{2}$$

daraus folgt die Behauptung.

Eine zweite Folge des Uebergangs zu Kraftvariablen ist der Verlust der lokalen Kontinuität in den Knoten. In innern Knoten eines Scheibenstücks (Fig. 2.02) hat man durch die gemeinsamen zweiten Ableitungen der Spannungsfunktion an allen angeschlossenen Elementecken einen homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand. Werden Scheibenstücke durch Kraftvariable in der Kontaktfläche verbunden, ist diese Stetigkeit der Dehnungen nicht mehr gesichert. Selbstverständlich ist trotzdem eine korrekte Diskretisation des Problems gewährleistet: Die erste Variation des Prinzips (2.025) liefert unter anderem die Verträglichkeitsbedingungen. Praktisch und bei grober Diskretisation geht auf diese Weise jedoch viel Genauigkeit verloren. In den Anwendungen des 4. Abschnitts werden wir häufig Ueberkontinuitätsbedingungen an Verzweigungskanten mit Hilfe Lagrange'scher Multiplikatoren wieder einführen. Einzelheiten dazu sind den Beispielen zu entnehmen.

## 2.2 Technische Einzelheiten zur Bildung der Elementmatrizen

Die Interpolation in Dreiecksbereichen (2.002 - 2.006) und die Auswertung der Flexibilitätsmatrizen der Dreieckselemente und Scheibenstücke (2.009 - 2.011) im kartesischen Bezugssystem ist wohl einfach, rechentechnisch aber langsam. Schnelle Spezialprogramme für diese Aufgabe stützen sich auf homogene Dreieckscoordinate, die Felippa [30] eingeführt hat. Er gibt auch die Ritz'schen Ansatzfunktionen für allgemeine Dreiecksbereiche bis zum Polynomgrad 3 an. Im Sinne einer Ergänzung seiner Liste sind in (2.24) die Koordinatenfunktionen 5. Grades explizit angegeben.

In Verbindung mit homogenen Dreieckskoordinaten ist eine entsprechende, auf lokale Dreiecksrichtungen bezogene Beschreibung des Spannungszustandes zweckmässig. Es ist üblich, die direkten Ansatzgrössen - hier Spannungen - durch kovariante Komponenten zu beschreiben. Die zugeordneten Dehnungen haben dann kontravarianten Charakter (2.23).

Schliesslich geben wir in (2.27) die Grundlagen zur direkten Bestimmung der Kraftverbindungs- und Gleichgewichtsmatrizen (2.020, 2.021). Die Randvariabeln des Scheibenstücks sind nach den lokalen Randrichtungen orientiert. Deshalb spart man Transformationen, wenn man die entsprechenden lokalen Variabeln nicht zuerst in ein kartesisches System transformiert. In speziellen Fällen ist dieses Vorgehen auch für die inneren Variabeln des Scheibenstücks anwendbar (2.26).



Elementprogramme - zu denen wir hier auch die Spezialprogramme für die polygonalen Scheibenstücke zählen - verlangen einen relativ grossen Arbeitsaufwand und grösste Sorgfalt bei der Ausprüfung. Das "Handwerkszeug" dazu ist einerseits einfach, wird aber in der Fachliteratur höchstens flüchtig gestreift. Deshalb stellen wir die wichtigsten Grundlagen für das Dreieckselement und die Scheibenstücke kurz zusammen. Andererseits sollten Massnahmen zur Beschleunigung von Elementprogrammen - soweit sie nicht zugleich zur numerischen Stabilität der Rechnung beitragen - keineswegs überschätzt werden. Massgebend für die totalen Rechenkosten sind bei grösseren Problemen immer die Eliminationsprozesse an den linearen Gleichungssystemen. Wir verweisen auf den Abschnitt (3).

### 2.21 Geometrie und Koordinatensysteme

Mit

$$2F = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{vmatrix} \quad (2.051)$$

hat das Dreieck von Fig. 2.10 die Fläche

$$A = \text{abs} (F) \quad (2.052)$$

und die Orientierung

$$\mu = \text{sign} (F) \quad (2.053)$$

diese hat den Wert +1, wenn (ijk) denselben Umlaufsinn definiert wie (+x → +y).

Die lokalen Seitenkoordinaten sind definiert durch die normierten Basisvektoren

$$\begin{aligned} \vec{s}_i &= \left\{ \frac{x_k - x_j}{l_i}, \frac{y_k - y_j}{l_i} \right\} \quad \dots 1 \\ &= \{s_{ix}, s_{iy}\} = \left\{ \frac{\Delta_{ix}}{l_i}, \frac{\Delta_{iy}}{l_i} \right\} \dots \\ \vec{n}_i &= \mu \{s_{iy}, -s_{ix}\} \quad \dots \end{aligned}$$

mit

$$l_i^2 = \Delta_{ix}^2 + \Delta_{iy}^2 \quad \dots \quad (2.054)$$

$\vec{n}_i$  ist unabhängig von der Orientierung ein äusserer Normalenvektor.

Wie wir sehen werden, tritt  $l_i$  in allen Transformationen zwischen Grössen gerader Ableitungsstufe mit gerader Potenz auf. Dann ist das Ausziehen der Wurzel aus  $l_i^2$  nicht nötig und soll auch aus numerischen Gründen vermieden werden.

Die homogenen Dreieckskoordinaten eines Punktes P in der Ebene des Dreiecks sind definiert durch

$$\zeta_i(P) = \frac{\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_P & x_j & x_k \\ y_P & y_j & y_k \end{vmatrix}}{2F} \quad \dots \quad (2.055)$$

<sup>1</sup> .. bezeichnet zyklische Vertauschung

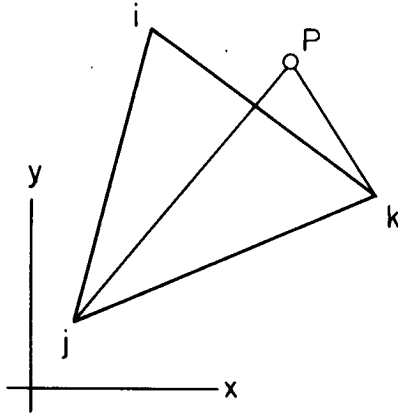


Fig. 2.10

Diese Formeln sind die Kramer'sche Auflösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_i & x_j & x_k \\ y_i & y_j & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \\ \zeta_k \end{bmatrix} \quad (2.056)$$

womit - neben der Umkehrtransformation - die Abhängigkeit

$$\zeta_i + \zeta_j + \zeta_k = 1$$

folgt.

Die homogenen Koordinaten eines Punktes sind invariant gegenüber allen linearen Transformationen (Perspektiven Abbildungen) der Ebene.

2.22 Ableitungen von Funktionen in homogenen Koordinaten

Im Folgenden benötigen wir die Ableitungen von Funktionen in homogenen Variablen nach den lokalen Seitenkoordinaten. Durch spezielle Wahl des kartesischen Systems (Fig. 2.11) wird aus (2.055)

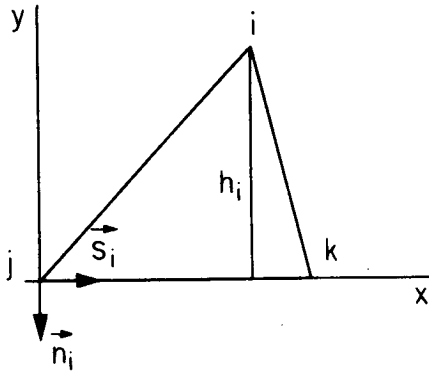


Fig. 2.11

$$\begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \\ \zeta_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -l_i \\ 2A & -h_i & l_j \cos(k) \\ 0 & h_i & l \cos(j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_i \\ n_i \end{bmatrix} \quad (2.057)$$

Damit folgt

$$\frac{d\Phi}{ds_i} = \frac{1}{l_i} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_k} - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_j} \right) \quad \dots \quad (2.058)$$

und

$$\frac{d^2\Phi}{ds_i^2} = \frac{1}{l_i^2} \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_k^2} - 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_k \partial\zeta_j} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\zeta_j^2} \right) \quad (2.059)$$

ferner

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dn_i} = \frac{1}{2A} \left( - \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_i} l_i + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_j} l_j \cos(k) \right. \\ \left. + \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_k} l_k \cos(j) \right) \dots \end{aligned} \quad (2.060)$$

### 2.23 Transformationen in schiefwinkligen Systemen

Wir stellen die Ableitungen der Spannungsfunktion - insbesondere also den Spannungszustand - in schiefen Axensystemen immer durch kovariante Komponenten dar. Anschaulich bedeutet dies, dass die "Komponente" eines Spannungszustandes in einer Richtung (Fig. 2.12) als *t o t a l e* Spannung in dieser Richtung definiert ist. (Die alternative kontravariante Definition beruht auf einer Zerlegung des Spannungszustands in lineare Teilspannungszustände). Es ist für die Arbeit mit allgemeinen Dreieckselementen zweckmässig, den inneren Spannungszustand in einem Punkt durch die 3 Spannungen normal zu den Seiten zu beschreiben, unter Verzicht auf Schubspannungen. Ausgehend vom kartesischen Hilfssystem (Fig. 2.12) hat man dann vorerst

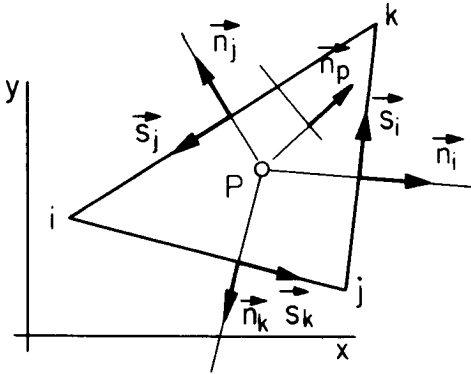


Fig. 2.12

$$\sigma_{\Delta} = \begin{bmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \\ \sigma_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{ix}^2 & n_{iy}^2 & 2n_{ix} & n_{iy} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.061)$$

$$= B_{\Delta} \sigma$$

(3\*3)

wo  $\vec{n}_i$  Einheitsvektoren sind. Mit einer Airy'schen Spannungsfunktion  $\Phi$  ist (Fig. 2.12)

$$\sigma_i = \frac{d^2 \Phi}{ds_i^2} \quad \dots$$

Alle Spannungstransformationen sind zugleich Transformationen für 2. Ableitungen einer Funktion.

Die Spannung in einer allgemeinen Richtung  $p$  wird

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{bmatrix} n_{px}^2 & n_{py}^2 & 2n_{px} & n_{py} \end{bmatrix} B_{\Delta}^{-1} \sigma_{\Delta} \\ &= \underset{(1*3)}{B_{p\Delta}} \sigma_{\Delta} \end{aligned} \quad (2.062)$$

Am Rande von Scheibenstücken treten auch Schubspannungen auf; der Spannungszustand an einer äusseren Ecke ist durch die 4 Spannungskomponenten

$$\underset{(4*1)}{\sigma_s} = \left\{ \sigma_{jk}, \sigma_{ji}, \tau_{jk}, \tau_{ji} \right\} \quad (2.063)$$

von Fig. 2.05 ü b e r bestimmt. Man beachte, dass die Schubspannungen den  $S$  entgegen gerichtet sind. Die Aufgabe der Bestimmung der Spannung in einer allgemeinen Richtung kann wie zuvor auf dem Weg über das kartesische Hilfssystem gelöst werden; die Gln. (2.061) sind zu ergänzen durch 2 Gleichungen für die Schubspannungen

$$\tau_{ji} = \left[ -n_{kx} s_{kx}, -n_{ky} s_{ky}, -(n_{ky} s_{kx} + s_{ky} n_{kx}) \right] \underset{(3*1)}{\sigma}$$

Durch Jordan'schen Austausch kann so auch die Nebenbedingung (2.019) zwischen den 4 Spannungen (2.063) gewonnen werden; Die Spannung in der allgemeinen Richtung  $p$  wird aber in Funktion von 3 dieser Komponenten erhalten. Es ist numerisch vorteilhaft, eine symmetrische Form zu verwenden. Nach einiger Zwischenrechnung findet man

$$\sigma_j = B_{>j} \sigma_{>} \quad (2.064)$$

(1\*4)

mit

$$B_{>j}^{\dagger} = \frac{1}{q_j} \begin{bmatrix} p_k q_j + r_k r_j \\ p_i q_j + r_i r_j \\ q_k r_j + r_k q_j \\ -q_i r_j - r_i q_j \end{bmatrix}$$

Die Abkürzungen bedeuten

$$p_j = (\vec{s}_k \cdot \vec{s}_i)^2 \dots$$

$$q_j = (\vec{s}_k \cdot \vec{n}_i)^2 \dots$$

$$r_j = (\vec{s}_k \cdot \vec{s}_i)(\vec{s}_k \cdot \vec{n}_i) \dots$$

Auch den Gradientenvektor der Spannungsfunktion beschreiben wir im schiefen System  $\xi, \eta$  durch seine kovarianten Komponenten (Fig. 2.13). Gesucht sei die 1. Ableitung in einer allgemeinen Richtung  $\kappa$ . Für die Basisvektoren findet man (mit dem Sinussatz) die Beziehung



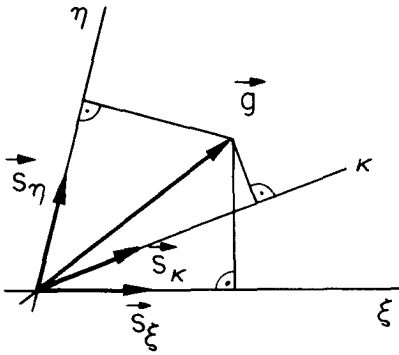


Fig. 2.13

$$\vec{s}_\kappa = \frac{\sin(\kappa\eta)}{\sin(\xi\eta)} \vec{s}_\xi + \frac{\sin(\xi\kappa)}{\sin(\xi\eta)} \vec{s}_\eta$$

wo zum Beispiel

$$\sin(\kappa\eta) = (\vec{s}_\kappa \times \vec{s}_\eta)_z$$

Damit folgt für den Gradientenvektor

$$\frac{d}{d\kappa} = \vec{g} \cdot \vec{s}_\kappa = \frac{\sin(\kappa\eta)}{\sin(\xi\eta)} \frac{d}{d\xi} + \frac{\sin(\xi\kappa)}{\sin(\xi\eta)} \frac{d}{d\eta} \quad (2.065)$$

Die Vektorkomponenten gehorchen derselben Transformationsregel wie die Basisvektoren. Deshalb die Bezeichnung "kovariant".

### 2.24 Koordinatenfunktionen

In homogenen Dreieckskoordinaten können Interpolationsfunktionen in (2.006) ohne allzugrosse Schwierigkeiten direkt

angeschrieben werden. Als Stützwerte wählt man vorerst Variable in den Seitenkoordinaten des Dreiecks, die analog zu (2.004) in der Spalte

$$P_{e\Delta} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Phi} \Big|_i, \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_j} \Big|_i, \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_k} \Big|_i, \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_i} \Big|_{mi}, \\ \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds_i^2} \Big|_i, \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds_j^2} \Big|_i, \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds_k^2} \Big|_i, \end{array} \right\} \quad (2.066)$$

geordnet seien. Die Interpolationsmatrix  $\beta_{e\Delta}$  entsprechend (2.006) ist dann aufzubauen aus den 5 Funktionen in den Spalten von Tab. 2.14, deren zyklischen Vertauschungen und Spiegelungen. Die erste Funktion  $\varphi_{,i}$  ist die Koordinatenfunktion zum Stützwert

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_i} \Big|_{mi}$$

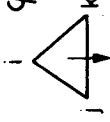
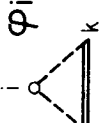
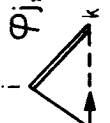

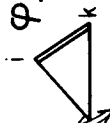
Die Koordinatenfunktionen 2 - 5 setzen sich zusammen aus einer Grundfunktion, welche Koordinatenfunktion bezüglich der 18 Eckstützwerte ist, und Korrekturen durch Anteile von  $\varphi_{,i}$  zur Herstellung der Orthogonalität mit diesen Funktionen. Neben diesen Korrekturfaktoren enthält Tab. (2.14) auch die zweiten Ableitungen der Grundfunktionen in den Seitenrichtungen, die in (2.25) benötigt werden.

Im Hinblick auf die spätere Integration schreiben wir die Interpolationsmatrix als Produkt

$$\beta_{e\Delta} = \gamma_{e\Delta} B_{e\Delta} \quad (2.067)$$

(1\*21)      (1\*21) (21\*21)

wo alle geometrischen Faktoren der Einheitsfunktionen in Tab. (2.14) einschliesslich der Korrekturfaktoren (Zeilen 3 - 5) in der Konstanten, spärlich besetzten Matrix  $\mathbf{B}_{e\Delta}$  untergebracht werden, während  $\gamma_{e\Delta}$  nur noch die dimensionslosen Grundfunktionen enthält und von der speziellen Dreiecksgeometrie unabhängig ist.

 $\varphi_{j,i}$	 $\varphi_i$	 $\varphi_{j,i}$	 $\varphi_{j,ii}$	 $\varphi_{j,ij}$	<p>Fig. 2.14</p>
$-\frac{32A}{l_i} \zeta_i \zeta_j \zeta_k$	$10\zeta_i^3 - 15\zeta_i^2 + 6\zeta_i^5$	$l_i(4\zeta_j^3 - 3\zeta_j^4) \zeta_k$	$\frac{l_i^2}{2} \zeta_j^3 (1 - \zeta_j) \zeta_k$	$-\frac{l_i^2}{2} \zeta_i \zeta_j \zeta_k$	<p>Grundfunktion</p>
$\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$	$0$	$-\frac{1}{32A} (12l_i l_j \cos(k) + 5l_i l_k \cos(j))$	$-\frac{l_i^2}{64A} (2l_j \cos(k) + l_k \cos(j))$	$-\frac{l_i l_j^2}{64A}$	<p>* <math>\varphi_{j,i}</math></p>
$\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$	$-\frac{15}{16A} l_i \cos(k)$	$0$	$0$	$0$	<p>Korrektur- beiträge</p>
$\begin{matrix} \bullet \\ \bullet \end{matrix}$	$-\frac{15}{16A} l_i \cos(j)$	$\frac{1}{32A} \cdot 5l_i l_k$	$\frac{l_i^2 l_k}{64A}$	$\frac{l_k l_j^2}{64A}$	<p>* <math>\varphi_{j,k}</math></p>
$-\frac{64A}{l_i} \zeta_i (\zeta_k^2 - 4\zeta_j \zeta_k + \zeta_j^2)$	$0$	$12l_i^* \zeta_j (2\zeta_k - \zeta_j \zeta_k - 2\zeta_j + 2\zeta_j^2) \zeta_k$	$l_i^{2*}$	$-3l_i^{2*} \zeta_i \zeta_j (\zeta_k - \zeta_j)$	<p>* <math>\frac{1}{l_i^{2*}}</math> Krüm -</p>
$\zeta_i^2 (\zeta_j - 2\zeta_k)$	$60\zeta_i^* (1 - 3\zeta_i + 2\zeta_i^2)$	$0$	$0$	$l_j^2 \zeta_j^3$	<p>* <math>\frac{1}{l_j^{2*}}</math> mun -</p>
$-\frac{64A}{l_i} \zeta_k^2 (\zeta_i - 2\zeta_j)$	$60\zeta_i^* (1 - 3\zeta_i + 2\zeta_i^2)$	$\zeta_j \zeta_k (2 - 3\zeta_j)$	$3l_i^{2*} \zeta_j \zeta_k (1 - 2\zeta_j)$	$-3l_i^{2*} \zeta_j \zeta_k (\zeta_i - \zeta_j)$	<p>* <math>\frac{1}{l_k^{2*}}</math> gen</p>

2.25 Bildung der Elementmatrix des Dreieckselements

In geringfügiger Abwandlung von (2.061) hat man für ein Dreieck  $ijk$  (Fig. 2.12)

$$\sigma_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{ds_i^2} \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{ds_j^2} \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{ds_k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_i^{-2} & l_j^{-2} & l_k^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{iy}^2 & \Delta_{ix}^2 & -2\Delta_{ix} & \Delta_{iy} \\ \Delta_{jy}^2 & \Delta_{jx}^2 & -2\Delta_{jx} & \Delta_{jy} \\ \Delta_{ky}^2 & \Delta_{kx}^2 & -2\Delta_{kx} & \Delta_{ky} \end{bmatrix} \sigma \quad (3*1)$$

$$\sigma_{\Delta} = l^{-2} B_{\Delta l} \sigma \quad (2.071)$$

Die Formänderungsenergie

$$d\pi = \frac{1}{2} \sigma^t \underset{(3*3)}{E^{-1}} \sigma \, dV$$

transformiert sich damit in

$$d\pi = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta}^t l^{+2} E_{\Delta}^{-1} l^{+2} \sigma_{\Delta} \, dV$$

mit

$$\underset{(3*3)}{E_{\Delta}^{-1}} = B_{\Delta l}^{-1t} E^{-1} B_{\Delta l}^{-1} \quad (2.072)$$

Aus (2.067) folgt

$$\sigma_{\Delta} = l^{-2} \partial_{\gamma e \Delta}^2 B_{e \Delta} P_{e \Delta} \quad (2.073)$$

mit dem Operator

$$\partial^2 = \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \xi_k} - \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right)^2, \dots \right\}$$

Für das Dreieckselement folgt

$$\Delta \pi_e = \frac{t}{2} \mathbf{p}_{e\Delta}^\dagger \mathbf{F}_{e\Delta} \mathbf{p}_{e\Delta}$$

$$\mathbf{F}_{e\Delta} = \mathbf{B}_{e\Delta}^\dagger \mathbf{F}_\Delta \mathbf{B}_{e\Delta} \quad \mathbf{F}_\Delta = \sum_{\substack{i=1,3 \\ j=1,3}} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{f}_{ij} \quad (2.074)$$

(21\*21)    (21\*21)

Die  $\mathbf{E}_{ij}$  sind die Elemente von  $\mathbf{E}_\Delta^{-1}$ . Die Matrizen  $\mathbf{f}_{ij}$  sind von der speziellen Geometrie unabhängig:

$$\mathbf{f}_{ii} = \int_{\Delta} \partial_{je\Delta}^{2,(i)\dagger} \partial_{je\Delta}^{2,(i)} dA$$

(21\*21)

$$\mathbf{f}_{ij} = \int_{\Delta} (\partial_{je\Delta}^{2,(i)\dagger} \partial_{je\Delta}^{2,(j)} + \partial_{je\Delta}^{2,(j)\dagger} \partial_{je\Delta}^{2,(i)}) dA \quad (2.075)$$

(21\*21)

was man mit Hilfe der Integrationsformel

$$\frac{1}{2A} \int_{\Delta} \xi_i^{n_i} \xi_j^{n_j} \xi_k^{n_k} dA = \frac{n_i! n_j! n_k!}{(n_i + n_j + n_k + 2)!} \quad (2.076)$$

und eines einfachen Spezialprogramms ein für allemal ausgewertet. Dieser Weg zur Bildung von Elementmatrizen [31,10] dürfte am vorliegenden Element zu einem annähernd optimalen Programm führen; unter Verzicht auf weitere Verfeinerungen erfordert die Bildung von  $\mathbf{F}_{e\Delta}$  ca. 3000 Multiplikationen und Additionen,

neben 1400 festen Datenplätzen für Konstanten. Ein alternatives Vorgehen hat Felippa [30] angegeben; es ist zwar langsamer, führt aber die Integration auf einen kleineren Satz von Grundwerten (statt 2.075) zurück, die zudem in [30] tabelliert sind.

### 2.26 Transformation der Variablen an Scheibenstücken

Die Elementvariablen (2.066) sind analog zu (2.010) auf einen Satz von Variablen des Scheibenstücks zu beziehen. Grundsätzlich kann dies immer so geschehen, dass zuerst die Beziehung zum kartesischen Variablensatz (2.004) hergestellt wird:

$$P_{e\Delta} = C_{e\Delta} P_e \quad (2.080)$$

(21\*21)

und, mit (2.010)

$$P_{e\Delta} = C_{e\Delta} a_e P_s \quad (2.081)$$

(21\*Ns)

Dieser Weg über das kartesische System des Scheibenstücks ist bei ganz allgemeiner Geometrie des Elementnetzes zweckmässig; die nichttrivialen Beziehungen in  $C_{e\Delta}$  sind

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\phi}}{ds_j} \Big|_i &= \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \Big|_i s_{jx} + \frac{d\tilde{\phi}}{dy} \Big|_i s_{jy} \\ \frac{d^2\tilde{\phi}}{ds_j^2} \Big|_i &= \frac{d^2\tilde{\phi}}{dx^2} \Big|_i s_{jx}^2 + 2 \frac{d^2\tilde{\phi}}{dxdy} \Big|_i s_{jx} s_{jy} \\ &\quad + \frac{d^2\tilde{\phi}}{dy^2} \Big|_i s_{jy}^2 \quad \dots \end{aligned} \quad (2.082)$$

Die Normalableitungen an den Kanten sind in der Transformation (2.081) auf eine konventionelle gemeinsame Orientierung für beide angeschlossenen Dreiecke zu beziehen.

Besitzt das Elementnetz ausgezeichnete Richtungen, kann eine Anpassung des Bezugssystems an diese Transformationsaufwand sparen. In regulären Dreiecksnetzen bezieht man  $\mathbf{p}_s$  auf ein schiefes System mit drei ausgezeichneten Richtungen; dadurch werden in (2.080) die Transformationsgleichungen für die Spannungen trivial. Von den ersten Ableitungen der Spannungsfunktion muss jene zur dritten ausgezeichneten Richtung mit (2.065) in Funktion der ersten zwei dargestellt werden.

Am Rand der Scheibenstücke vermitteln lokale schiefe Systeme den direkten Uebergang zu den - gleichfalls bezüglich lokaler Richtungen definierten - Kraftvariabeln (2.017). In Eckpunkten wählt man als unabhängige Variable die 6 Werte (Fig. 2.17)

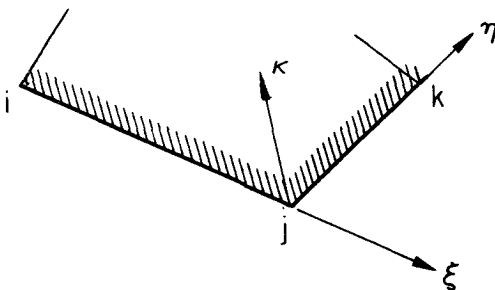


Fig. 2.17

$$\tilde{\Phi}_j, \frac{d\tilde{\Phi}}{d\xi} \Big|_j, \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} \Big|_j, \frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\xi^2} \Big|_j, \frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\eta^2} \Big|_j, \frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\kappa^2} \Big|_j \quad (2.086)$$



Ableitungen der Spannungsfunktion in den übrigen lokalen Richtungen folgen dann aus (2.062) oder (2.064) sowie (2.065). In Randpunkten auf geradlinigen Abschnitten des Randes bezieht man die Variablen auf ein lokales kartesisches System mit  $x_l$  parallel zum Rand (Fig. 2.18). Die hier benötigten Transformationsgl. entsprechen sinngemäss (2.082)

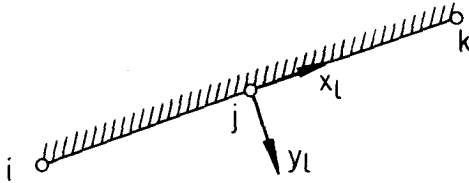


Fig. 2.18

### 2.27 Die Kraftverbindungsmatrix der Scheibenstücke

Die Transformationsmatrix  $C_s$  von (2.020) kann leicht direkt bestimmt werden. Mit den lokalen Randbezugssystemen für Ecken- und Kantenpunkte (Fig. 2.17) des letzten Abschnitts hat man - ausgehend von den Werten in i -

$$\tilde{\Phi}_i, \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \right|_i, \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \right|_i$$

die Beziehungen

$$F_{ij} = t \int_i^j \sigma(s) ds = t \left( \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j - \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_i \right)$$

$$Q_{im} = t \int_i^m \tau(s) ds = t \left( \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_m - \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_i \right)$$

$$Q_{mj} = t \int_m^j \tau(s) ds = t \left( \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_j - \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_m \right)$$

$$\begin{aligned} B_{ij} &= t \int_i^j \left( s - \frac{l_{ij}}{2} \right) \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds^2} ds \\ &= t \left[ \frac{l_{ij}}{2} \left( \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j + \frac{d^2\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_i \right) - \tilde{\Phi}_j + \tilde{\Phi}_i \right] \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j = \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_i + \frac{F_{ij}}{t}$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_m = \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_i + \frac{Q_{im}}{t}$$

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_j = \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_m + \frac{Q_{mj}}{t}$$

$$\tilde{\Phi}_j = \tilde{\Phi}_i + \frac{l_{ij}}{2} \left( \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j + \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_i \right) - \frac{B_{ij}}{t}$$

In der Ecke  $j$  bestimmen wir nun die Ableitungen parallel und normal zur folgenden Kante  $jk$ . Mit

$$C_j = \vec{s}_{ij} \cdot \vec{s}_{jk}$$

$$S_j = (\vec{s}_{ij} \times \vec{s}_{jk})_z$$

ist, als kartesisches Sonderfall von (2.065)

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{jk}} \Big|_j = \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j C_j - \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_j S_j$$

(2.096)

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{jk}} \Big|_j = \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{ij}} \Big|_j S_j + \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_j C_j$$

Bei quadratisch angesetzter Schubspannung sind die Beziehungen für die Normalableitungen in (2.095) zu modifizieren:

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big| = \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_i + \frac{Q_{ij}}{t}$$

(2.095a)

die Ableitung in der Seitenmitte unterliegt der Zwangsbedingung (Spline-Interpolation)

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_m = \frac{1}{2} \left[ \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_i + \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{ij}} \Big|_j \right]$$

$$+ \frac{l_{ij}}{8} \left[ \frac{d^2\tilde{\Phi}}{dn_{ij} ds_{ij}} \Big|_i - \frac{d^2\tilde{\Phi}}{dn_{ij} ds_{ij}} \Big|_j \right]$$

(2.095b)

Es ist wesentlich, diese Bedingung in  $C_s$  einzuführen, weil sonst die lokalen Gleichgewichtseigenschaften des Ansatzes

verlorengeworden würden. Damit sind Funktion und erste Ableitungen im lokalen System (2.086) bestimmt, und die Ausgangslage für den Uebergang zum nächsten Randpunkt mit den Rekursionsformeln (2.095) ist hergestellt. Die Kraftverbindungsmatrix von (2.020) ist - in den Funktionswerten und ersten Ableitungen zugeordneten Zeilen - in dieser Weise zeilenweise aufzubauen; man hat nur die Gln. (2.095) und (2.096) schrittweise anzuwenden, wobei für Terme aus der Spalte links des Gleichheitszeichens in (2.020) jeweils eine ganze - zuvor bestimmte - Zeile von  $C_s$  eingeht. Der Start erfolgt im Randpunkt 1 mit der willkürlichen Anfangsbedingung

$$\tilde{\Phi}_1 = 0 \quad \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{12}} \right|_1 = 0 \quad \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{12}} \right|_1 = 0$$

Nach einem Umlauf um die einfach zusammenhängende Substruktur erhält man in gleicher Weise die 3 Zeilen

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Phi} \\ \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{ds_{M1}} \right|_1 \\ \left. \frac{d\tilde{\Phi}}{dn_{M1}} \right|_1 \end{bmatrix} = G_{EOPE} = 0 \quad (2.098)$$

(3\*8M)

also die 3 globalen Gleichgewichtsbedingungen aus (2.021), bezogen auf den Punkt 1, die letzte Seite (M-1) und deren Normale.

Die Transformationsgleichungen für die 2. Ableitungen der Spannungsfunktion sind durch die Wahl der lokalen Bezugssysteme in ihrer Mehrzahl trivial. Im Punkte  $j$  hat man

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\xi^2} \Big|_j &= \frac{(t \tau_{ji})}{t} & \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\eta^2} \Big|_j &= \frac{(t \sigma_{jk})}{t} \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{d\kappa^2} \Big|_j &= \underset{(1*4)}{B_{>j}} \sigma_j \end{aligned} \tag{2.099}$$

unter sinngemässer Verwendung von (2.064). Besondere Aufmerksamkeit verdient der Punkt  $j$  an einer geraden Kante der Substruktur. Hier ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dx_l^2} \Big|_j &= \frac{(t \sigma_j)}{t} \\ \frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dx_l dy_l} &= \frac{(t \tau_j)}{t} \end{aligned} \tag{2.100}$$

Die Ableitung

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dy_l^2} \Big|_j \tag{2.101}$$

kann aus den Randkräften nicht bestimmt werden. Ihre Beibehaltung als äussere Variable gibt Anlass zur Formulierung einer Kontinuitätsbedingung im Sinne der Ausführungen in (2.12). Wo diese Ueberkontinuität nicht eingeführt werden soll, muss (2.101) mit den inneren Substrukturvariablen  $p_i$  von (2.012) eliminiert werden.

Schliesslich folgen aus (2.019)  $M'$  lokale Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{array}{l} G_{E1} \quad p_E = 0 \\ (M' * 8M) \end{array} \quad (2.102)$$

die (2.098) zu (2.021) ergänzen.  $M'$  ist hier die Anzahl der "eigentlichen" Ecken, mit Innenwinkeln  $\neq \pi$ .

### 2.3 Hilfselemente

Wir denken uns allgemeine räumliche faltwerke mit polygonalen Scheiben so in Scheibenstücke und Kanten-elemente zerlegt, dass alle Kräfte zwischen den Teilen gegenseitige Schnittkräfte sind. Mehrfache, verzweigte Kanten werden dadurch zu eigenständigen "Elementen" (Fig. 2.20) von denen der Beitrag zum Funktional (2.025) zu bestimmen ist. Wählen wir den Kantenbereich ohne räumliche Ausdehnung, so liefert das Volumintegral über die elastische Energie keinen Beitrag, und es bleibt:

$$-\Delta \pi_R^* = - \iint_{S^1} \left[ \left( X_\nu - \bar{X}_\nu \right) u + \left( Y_\nu - \bar{Y}_\nu \right) v + \left( Z_\nu - \bar{Z}_\nu \right) w \right] dS \quad (2.025a)$$

Die Diskretisation dieses Funktionals ist trivial; die inneren Spannungen, nur vertreten durch  $X_\nu \dots$  auf dem Rand, sind im Gleichgewicht, so dass ihre Arbeit mit dem Verschiebungszustand der Kante verschwindet. Die äusseren Spannungen sind an jeder Scheibe gemäss (2.018) anzusetzen. Schliesslich sind die Verschiebungen als räumliche Verallgemeinerung von (2.033) zu betrachten. Auf eine ausführliche Darstellung sei mit Hinweis auf (2.11) verzichtet. Anschaulich kann das Resultat direkt als Produkt der Gleichgewichtsbedingungen der diskreten Kräfte und Spannungsflüsse an der Kante mit einem Satz von Multiplikatoren angeschrieben werden:

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = u_E^\dagger G_E P_E \quad (2.022a)$$

Von den Scheibenebenen in Fig. 2.20 mögen einige nur feste äussere Belastungen tragen:  $C_4, C_5$ . (2.022a) erhält die endgültige Form eines Potentialbeitrags

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = u_E^\dagger \begin{pmatrix} G_E & P_E + \bar{P} \\ (N_G + N_E) & (N_G + 1) \end{pmatrix} \quad (2.201)$$

Der konstante Belastungsterm ist zu unterscheiden von den Grössen mit Querstrichen in (2.025), die in unserer stufenweisen Bestimmung des stationären Wertes von  $\Delta \tilde{\pi}^*$  vorübergehend für eine Stufe festgehalten werden. Die Berechtigung zu solcher Manipulation der Begriffe "fest" und "variabel" wird im nächsten Abschnitt (3) bewiesen.

Die angedeutete Regelung hat zwei Konsequenzen, die wesentlich zur begrifflichen und programmtechnischen Straffung eines Substrukturassemblers beitragen:

- Belastungen sind ausnahmslos Elementbelastungen. Der Begriff der Belastung von "Punkten" ist (bei jeder Art von Finite-Element-Technik) mechanisch und methodisch unnötig.
- Die Koeffizienten der quadratischen Formen (2.201) (2.022) sind in körperfesten lokalen Systemen der Elemente formuliert und invariant gegen Translationen und Rotationen im Raum.



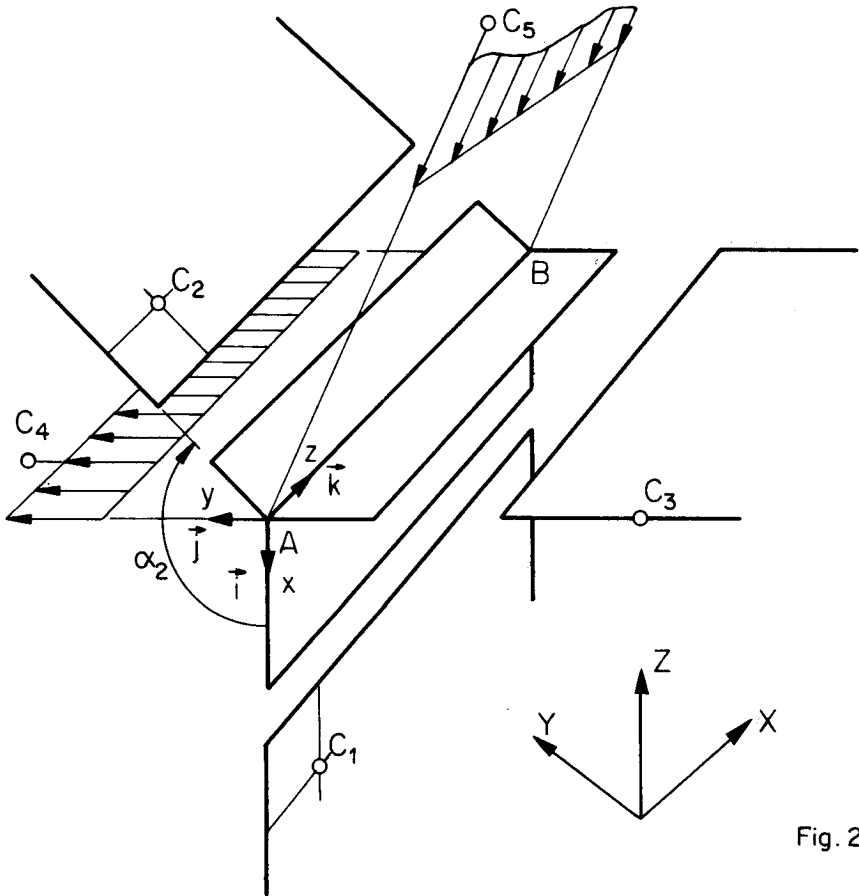


Fig. 2.20

Es verdient Beachtung, dass ein duales Vorgehen zum eben Beschriebenen auch eine globalkoordinatenfreie Substrukturtechnik im Rahmen der Deformationsmethode ermöglicht: Alle Knoten oder Kanten mit mehr als zwei angeschlossenen Substrukturen sind als Multiplikator-Hilfselemente zu definieren, welche die Verträglichkeit aller angeschlossenen Verschiebungsparameter sichern. Alle Verschiebungs-Randvariablen an einfachen

Elementkanten sind lokal bezüglich des Randes zu orientieren.

Ein Nachteil dieses Vorgehens im Falle der Deformationsmethode ist natürlich die Tatsache, dass nach der Einführung von Multiplikatoren das Gleichungssystem seine positive Definitheit verliert und eine teilweise Pivotsuche nötig wird. Wie wir sehen werden, kann dieser Schwierigkeit im Rahmen mehrstufigen Substrukturaufbaus leicht begegnet werden.

Vorteile sind hingegen

- das Wegfallen von Transformationen auf das Globalsystem
- einfachere Erfassung schiefer Lagerungsbedingungen
- die Gefahr der Einschleppung von Singularitäten durch Transformation ins Globalsystem entfällt. Diese Erscheinung tritt z.B. auf bei der Behandlung von Schalen mit flachen Abschnitten unter Einsatz von Deformationselementen mit Verschiebungsfeldern von kleinerem als 3. Grad.
- wesentlich einfachere Programmlogik bei mehrstufiger Substrukturtechnik.

Die Vorteile des globalkoordinatenfreien Vorgehens fallen dann am stärksten ins Gewicht, wenn mehrfache Kontaktstellen von Substrukturen selten sind oder fehlen. Ein Beispiel für diesen Fall sind Brückentragwerke, welche auf der 1. oder 2. Substrukturstufe als eindimensionale Anordnung von Substrukturen idealisiert werden können. In diesem Falle ist die hier vorgeschlagene Methode jeder anderen - mit raumfestem System - vorzuziehen, und zwar für jede Art von Finiten Elementen.

### 2.31 Das Scheibenkantenelement

Die mehrfache Scheibenkante von Fig. 2.20 ist in ihrer räumlichen Lage zu definieren durch

- Anfangs- und Endpunkt der Schnittkante A,B
- M Orientierungspunkte  $C_1 \dots C_M$  in den Halbebenen der angeschlossenen Scheiben
- N Orientierungspunkte  $C_{M+1} \dots C_{M+N}$  in den Halbebenen der aufgebrauchten Belastungen.

Das Bezugssystem X, Y, Z für die Vorgabe der Punktkoordinaten ist für jedes einzelne Element unabhängig wählbar; massgebend für die Wahl ist nur die Bequemlichkeit der Beschreibung.

Die Basisvektoren  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  des lokalen Systems (x,y,z) des Elements sind konventionell festgelegt durch

$$\vec{k} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \quad (2.206)$$

$$\vec{j} = \frac{\vec{k} \times \vec{AC}}{\vec{k} \times \vec{AC}}$$

$$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}$$

Im lokalen System ist die Stellung der einzelnen Scheiben bestimmt durch Ihren Winkel zur ersten Scheibe:

$$\sin \alpha_2 = \frac{\vec{AC}_2 \times \vec{k}}{|\vec{AC}_2 \times \vec{k}|} * \vec{i} \quad (2.207)$$

$$\cos \alpha_2 = -\frac{\vec{AC}_2 \times \vec{k}}{|\vec{AC}_2 \times \vec{k}|} * \vec{j}$$

Sinngemäß bestimmt man die Winkel  $\beta_i$  zu den Belastungsebenen. Aus jeder Scheibe greifen Spannungen am Kantenelement an, die gemäss (2.018) verteilt sind. Die Zeichenkonvention für die diskreten Kraftvariablen sind in Fig. 2.22 angegeben:

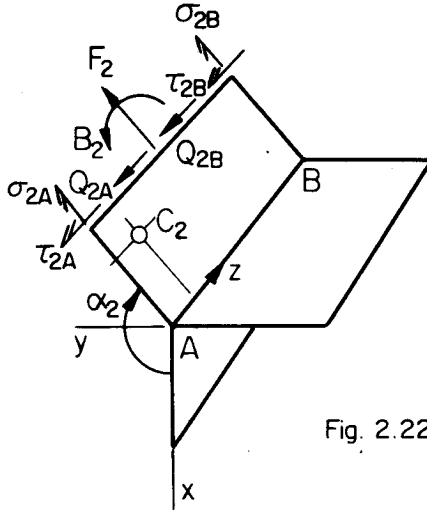


Fig. 2.22

- Normalkräfte: Zug  $\oplus$
- Moment  $\oplus$ , wenn bei B Zug
- Querkräfte  $\oplus = -Z$

Um in jedem Punkt der Kante AB Gleichgewicht der angreifenden kubisch verteilten Normal- und Schubspannungen zu erzielen, sind 12 Gleichgewichtsbedingungen zwischen den 8M Variablen

$$p_E = \left\{ (t\sigma_{1A}), (t\tau_{1A}), F_1, B_1, Q_{1A}, Q_{1B}, \right. \quad (2.208)$$

$$\left. (t\sigma_{1B}), (t\tau_{1B}), \dots \right\}$$

an den M Scheiben und den Belastungen an den N Belastungsebenen einzuhalten:

$$(t\sigma_{xA}) = \sum_M (t\sigma_{iA}) \cos \alpha_i + \sum_N (\overline{t\sigma_{iA}}) \cos \beta_i = 0$$

$$(t\sigma_{yA}) = \sum_M (t\sigma_{iA}) \sin \alpha_i + \sum_N (\overline{t\sigma_{iA}}) \sin \beta_i = 0$$

$$(t\tau_{zA}) = \sum_M (t\tau_{iA}) + \sum_N (\overline{t\tau_{iA}}) = 0$$

$$F_x = \sum_M F_i \cos \alpha_i + \sum_N \overline{F_i} \cos \beta_i = 0$$

$$F_y = \sum_M F_i \sin \alpha_i + \sum_N \overline{F_i} \sin \beta_i = 0$$

$$B_x = -\sum_M B_i \sin \alpha_i - \sum_N \overline{B_i} \sin \beta_i = 0$$

$$B_y = \sum_M B_i \cos \alpha_i + \sum_N \overline{B_i} \cos \beta_i = 0$$

$$Q_A = \sum_M Q_{iA} + \sum_N \overline{Q_{iA}} = 0$$

$$Q_B = \sum_M Q_{iB} + \sum_N \overline{Q_{iB}} = 0$$

$$(t\sigma_{xB}) = \sum_M (t\sigma_{iB}) \cos \alpha_i + \sum_N (\overline{t\sigma_{iB}}) \cos \beta_i = 0$$

$$(t\sigma_{yB}) = \sum_M (t\sigma_{iB}) \sin \alpha_i + \sum_N (\overline{t\sigma_{iB}}) \sin \beta_i = 0$$

$$(t\tau_{zB}) = \sum_M (t\tau_{iB}) + \sum_N (\overline{t\tau_{iB}}) = 0$$

Diese Bedingungen gehen mit den Verschiebungen

$$U_H = \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{xA}, \lambda_{yA}, \lambda_{\tau A}, f_x, f_y, b_x, b_y, \\ (12 \cdot 1) \quad q_A, q_B, \lambda_{xB}, \lambda_{yB}, \lambda_{\tau B} \end{array} \right\}$$

als Lagrange'sche Multiplikatoren in den (verallgemeinerten) Potentialbeitrag (2.201) des Hilfselements ein.

### 2.32 Andere Hilfselemente

Neben dem Scheibenkantenelement ist ein weiteres Hilfselement für die Erfassung mehrfacher Stabknoten im Raum erforderlich; weil seine Theorie nach den Ausführungen über das Scheibenkantenelement nichts neues zeigt, verzichten wir auf deren Darstellung.

Auch die Nebenbedingungen zur Herstellung lokaler Kontinuität (2.12) werden formal als "Elemente" behandelt. Ein Beispiel ist die Verträglichkeitsbedingung für die Dehnung zwischen Steg und Flansch eines Plattenbalkens (siehe 4.4). Schliesslich sind alle Randbedingungen, welche über die einfachen Fälle der Nullsetzung einer Kraftvariabel (freier Rand), Elimination einzelner Randkräfte (Einspannung) oder Nullsetzung einer Verschiebungsvariablen (Lagerung, Einspannung) hinausgehen, in dieser Weise zu berücksichtigen.

### 2.4 Ein Stabelement

Auf Grund ihrer relativ hohen Fehlerordnung 4 sind die Scheibenelemente (2.1) für die Diskretisation grosser Scheibenstücke bei guter Genauigkeit geeignet. Die geometrische Form der Dreieckselemente unterliegt gewissen Beschränkungen:

Nadelförmig zugespitzte Elemente führen zu Stellenverlusten in den Elementmatrizen. Als "Formparameter" kann das Verhältnis von Inkreis zu Umkreis verwendet werden (Streckung).

Die vertretbare Streckung hängt von der Stellenzahl des verwendeten Rechners ab; eine Untersuchung dieses Einflusses ist in [6] angegeben. Für die vorliegende Arbeit wurde als Grenze für die Streckung der Elemente konventionell

$$r / R > 0.15$$

eingeführt. Damit die Elemententeilung nicht durch die schlankesten angeschlossenen stabförmigen Glieder bestimmt wird, ist somit die Entwicklung eigentlicher Stabelemente erforderlich. Die Diskretisation ist hier durch die Voraussetzungen der technischen Bieungslehre vorweggenommen, und die Herleitung des elementaren Energiebeitrags bietet keine Besonderheiten.

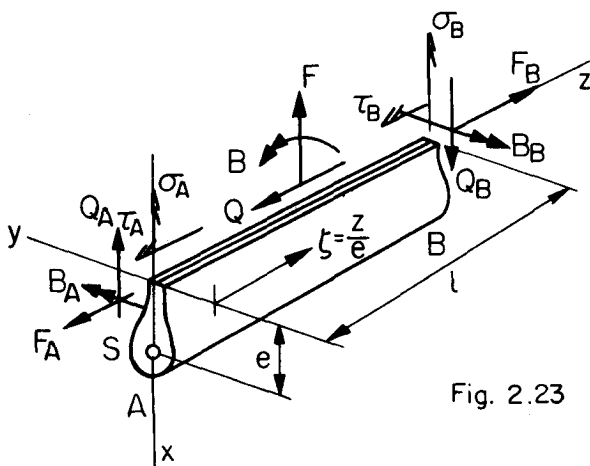


Fig. 2.23

Geometrie, Variablensatz und Zeichenregelung sind Fig. 2.23 zu entnehmen. Wir setzen einfach-symmetrischen konstanten Querschnitt voraus und beziehen die Beanspruchung in den Endpunkten A, B des Stabes auf eine Axe im Abstand  $e$  vom Schwerpunkt, wo auch die Scheibenkräfte angreifen. Die Normalspannungen an dieser Längskante seien gemäss (2.018) verteilt; die Schubspannungen beschränken wir auf den quadratischen Fall (1.018a). Wir denken uns den Stab vorerst im Endpunkt B eingespannt. Die Beanspruchung eines Schnittes  $\zeta$  bezüglich des Schwerpunktes ist dann gegeben durch

$$\tilde{q}(\zeta) = \zeta_e q_e \quad (2.211)$$

(3\*1)      (3\*10)

mit

$$\tilde{q} = \{F(\zeta), B(\zeta), Q(\zeta)\}$$

$$q_e = \left\{ \begin{array}{l} F_A, B_A, Q_A, (t\sigma_A), (t\tau_A), F, B, Q, \\ (10*1) \qquad \qquad \qquad (t\sigma_B), (t\tau_B) \end{array} \right\}$$

und der Matrix  $\zeta_e$  von Tab. (2.24)



1	0	0	0	$l \left[ \begin{matrix} \zeta - \\ 2\zeta^2 \\ + \zeta^3 \end{matrix} \right]$	0	0	$6 \left[ \begin{matrix} \frac{\zeta^2}{2} \\ - \frac{\zeta^3}{3} \end{matrix} \right]$	0	$l \left[ \begin{matrix} -\zeta^2 \\ + \zeta^3 \end{matrix} \right]$
-e	1	$\zeta l$	$l^2 \left[ \begin{matrix} \frac{\zeta^2}{2} \\ - \frac{3\zeta^3 + 3\zeta^4}{2} \\ - \frac{\zeta^2}{2} \end{matrix} \right]$	$-el \left[ \begin{matrix} \zeta \\ -2\zeta^2 \\ + \zeta^3 \end{matrix} \right]$	$l \left[ \begin{matrix} \zeta^3 \\ - \frac{\zeta^4}{2} \end{matrix} \right]$	$6 \left[ \begin{matrix} -\frac{5}{3}\zeta^3 \\ + \frac{5}{2}\zeta^4 \\ - \zeta^5 \end{matrix} \right]$	$-6e \left[ \begin{matrix} \frac{\zeta^2}{2} \\ - \frac{\zeta^3}{3} \end{matrix} \right]$	$l^2 \left[ \begin{matrix} \frac{\zeta^3}{2} \\ - \zeta^4 + \frac{\zeta^5}{2} \end{matrix} \right]$	$-el \left[ \begin{matrix} -\zeta^2 \\ + \zeta^3 \end{matrix} \right]$
0	0	1	$l \left[ \begin{matrix} \zeta - \frac{9}{2}\zeta^2 \\ + 6\zeta^3 - \frac{5}{2}\zeta^4 \end{matrix} \right]$	0	$3\zeta^2 - 2\zeta^3$	$\frac{6}{l} \left[ \begin{matrix} -5\zeta^2 \\ + 10\zeta^3 \\ - 5\zeta^4 \end{matrix} \right]$	0	$l \left[ \begin{matrix} \frac{3}{2}\zeta^2 \\ - 4\zeta^3 \\ + \frac{5}{2}\zeta^4 \end{matrix} \right]$	0

Fig. 2.24

Mit der Diagonalmatrix

$$E_B^{-1} = \left[ \frac{1}{EF}, \frac{1}{EJ}, \frac{1}{GF} \right]$$

erhält man die Flexibilität des Stabelements mit der Arbeitsgleichung der Baustatik als

$$\underset{(10 \times 10)}{\bar{F}_e} = l \int_0^1 \zeta^t E_B^{-1} \zeta d\zeta \tag{2.212}$$

oder

$$\bar{F}_e = \underset{(10 \times 10)}{\frac{l}{EF}} f_F + \underset{(10 \times 10)}{\frac{l}{EJ}} f_B + \underset{(10 \times 10)}{\frac{l}{GF}} f_Q$$

Auswertung der Arbeitsintegrale liefert

$$f_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{l}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & \frac{13l}{420} & 0 & -\frac{l^2}{140} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11l}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{l^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

symmetrisch

$$f_B = \begin{bmatrix} e^2 & -e & \frac{el}{2} & \frac{el}{120} & \frac{e^2l}{12} & \frac{3el}{20} & \frac{e}{2} & \frac{e^2}{2} & \frac{el^2}{120} & \frac{e^2l}{12} \\ 1 & \frac{l}{2} & \frac{l^2}{120} & \frac{el}{12} & \frac{3l}{20} & \frac{1}{2} & \frac{e}{2} & \frac{e}{2} & \frac{l^2}{120} & \frac{el}{12} \\ \frac{l^2}{3} & \frac{l^3}{280} & \frac{el^2}{30} & \frac{7l^2}{60} & \frac{5l}{14} & \frac{7el}{20} & \frac{l^3}{210} & \frac{el^2}{20} & \frac{el^3}{1008} & \frac{e^2l^2}{1260} \\ \frac{l^4}{9240} & \frac{el^3}{1008} & \frac{l^3}{1440} & \frac{18l^2}{55440} & \frac{17el^2}{5040} & \frac{l^4}{1088} & \frac{el^3}{1260} & \frac{e^2l^2}{140} & \frac{e^2l^3}{1680} & \frac{10el^2}{336} & \frac{13el}{420} & \frac{el^3}{1260} & \frac{e^2l^2}{140} \\ \frac{e^2l^2}{105} & \frac{11el^2}{1680} & \frac{10el}{336} & \frac{13el}{420} & \frac{el^3}{1260} & \frac{1260}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} & \frac{140}{1260} \\ \frac{23l^2}{504} & \frac{9l}{70} & \frac{8}{8} & \frac{13l^3}{10080} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} & \frac{5el^2}{336} \\ \frac{18l}{462} & \frac{8e}{21} & \frac{28l^2}{55440} & \frac{3el}{56} & \frac{13e^2}{35} & \frac{5el^2}{1008} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} & \frac{11el^2}{210} \\ \frac{9240}{9240} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} & \frac{el^3}{1008} \\ \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} & \frac{e^2l^2}{105} \end{bmatrix}$$

symmetrisch

$$f_Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{630} & 0 & -\frac{3l}{280} & \frac{1}{84} & 0 & \frac{l^2}{1260} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & -\frac{1}{2l} & 0 & -\frac{3l}{280} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{10}{7l^2} & 0 & -\frac{1}{84} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{630} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

symmetrisch

Schliesslich ergänzen wir den Variablensatz des Elements durch die Schnittkräfte und Verschiebungen an der Einspannstelle B:

$$p_e = \{ q_e, F_B, B_B, Q_B \}$$

(13\*1)

$$u_e = \{ u_F, u_B, u_Q \}$$

(3\*1)

und erhalten damit den Energiebeitrag des Elements

$$\Delta \tilde{\pi}_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^\dagger \mathbf{F}_e \mathbf{q}_e + \mathbf{u}_e^\dagger \mathbf{G}_e \mathbf{p}_e \quad (2.022c)$$

$(10 \times 1)$        $(3 \times 1)$        $(13 \times 1)$

mit

$$\mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.213)

### 3. Substrukturen

Der Beitrag eines Elements zum Gesamtpotential der übergeordneten Struktureinheit ist im allgemeinen Fall von der Form

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = \frac{1}{2} q_E^\dagger H_E q_E + q_E^\dagger \bar{h}_E \quad (3.001)$$

$(N_E * N_E)$                        $(N_E * 1)$

Die Variablen sind einerseits Kräfte, Momente, Spannungsflüsse; andererseits Verschiebungen als Lagrange'sche Multiplikatoren:

$$q_E = \left\{ \begin{array}{l} p_E \\ u_E \end{array} \right\} \quad (3.002)$$

$(N_E * 1)$                        $(L_E * 1)$      $(M_E * 1)$

Praktisch wird man sie nicht in dieser schematischen Weise sortieren. Die Einflussgrößenmatrix ist symmetrisch, aber nicht definit:

$$H_E = \begin{bmatrix} F_E & G_E^\dagger \\ (L_E * L_E) & (L_E * M_E) \\ G_E & O \\ (M_E * L_E) & (M_E * M_E) \end{bmatrix} \quad (3.003)$$

In der Regel wird man eine Reihe von Lastfällen zugleich untersuchen; die zugeordneten Potentiale

$$\Delta \tilde{\pi}_E^* = \left[ \Delta \tilde{\pi}_E^{*(1)} \dots \Delta \tilde{\pi}_E^{*(\bar{N}_E)} \right] \quad (3.004)$$

$(1 * \bar{N}_E)$

unterscheiden sich nur durch die Konstantenspalen, die wir in der Matrix der Standardlastfälle des Elements zusammenfassen.

$$\bar{H}_E = \left[ \bar{h}_E^{(1)} \dots \bar{h}_E^{(\bar{N}_E)} \right] \quad (3.005)$$

$(N_E * \bar{N}_E)$

Ausgehend von einem Variablensatz  $q$  der übergeordneten Struktureinheit sind die Elementvariablen durch eine Umordnungs-  
transformation

$$q_E = q_E q \quad (3.006)$$

$(N_E * N)$

zu bilden. Ferner seien die Beiträge der Standard-Lastfälle des Elements zu den Belastungsgliedern der übergeordneten Struktureinheit durch die Re komb i n a t i o n s m a -  
t r i x

$$b_E \quad (3.007)$$

$(\bar{N}_E * \bar{N})$

bestimmt. Diese Verallgemeinerung gegenüber dem üblichen Konzept einer unveränderlichen Bedeutung der Lastfälle ist nötig, um alle Möglichkeiten der Repetition bei verschieden belasteten, sonst aber gleichen Elementen auszunützen.

Mit (3.001) - (3.007) folgen die Einflussgrößen- und Konstantenmatrizen der übergeordneten Struktureinheit

$$H_{(N \times N)} = \sum_E a_E^t H_{(N_E \times N_E)} a_E \quad (3.008)$$

$$\bar{H}_{(N \times \bar{N})} = \sum_E a_E^t \bar{H}_{(N_E \times \bar{N}_E)} b_E$$

Im Falle einstufigen Strukturaubaus - das Tragwerk wird direkt in Grundelemente zerlegt - liefern die Bedingungen

$$\tilde{\pi}^{*(K)} = \text{stationär} \quad (K = 1 \dots \bar{N}) \quad (3.009)$$

die linearen Gleichungen

$$Hq + \bar{H} = 0 \quad (3.010)$$

Die Lagerungsbedingungen können in einfachen Fällen durch die  $a_E$  Matrizen eingeführt werden; sonst wird man sich geeigneter Hilfselemente bedienen.

Solcher einstufiger Strukturaufbau aus Elementen ist heute die Regel bei den meisten Finite-Element Programmen; in seltenen Fällen steht eine zweite Stufe zur Verfügung ("Koppelungsrechnung"). Diese Konzeption entspricht am diskreten System einer simplen Aufblähung der Methoden klassischer Statik ins - numerisch - gigantische. Die Grenzen solcher Arbeitsweise sind enger, als gemeinhin angenommen wird, und sie sind keineswegs nur Grenzen der Computertechnologie oder des Rechenaufwands (auf die wir zurückkommen werden). Wichtiger ist die

grundsätzlich falsche Datenstrukturierung, welche hier zugrundeliegt. Der Vorgang des Entwurfs, der Bemessung und Berechnung eines Tragwerks stützt sich auf fortgesetzte Unterscheidung von Haupt- und Nebensache, auf eine stufenweise Beurteilung des Tragverhaltens an mechanischen Modellen steigender Komplexität.

Die Bestimmung der Spannungen an einem sehr realitätsnahen mechanischen Modell durch Diskretisation und Auflösung von tausenden von Gleichungen in einem Schritt kann in diesem Zusammenhang höchstens als abschliessende Kontrolle - z.B. als Ersatz für einen Modellversuch - sinnvoll sein. Dagegen ist die ungegliederte Information aus einer solchen Rechnung in der Regel so umfangreich und unübersichtlich, dass eigentliche konstruktive Arbeit damit nicht möglich ist. Dazu kommt die kaum zu überschätzende Schwierigkeit, die Dateneingabe eines solchen Problems auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Bekanntlich werden grosse Anstrengungen unternommen, durch technische Verbesserungen der Datenerfassung - und Datenausgabe zu einer besseren Lösung dieser Probleme zu gelangen.

Nach der Ueberzeugung des Verfassers sind solche Massnahmen **a l l e i n** nicht mehr als eine Kur an den Symptomen. Das Problem der grossen Datenmengen ist in der Technik schon lange vor der Erfindung des Computers bewältigt worden: Durch ein Denken in hierarchisch geordneten Begriffen, durch setzen von Prioritäten, durch systematische Gliederung der Information nach ihrer Wichtigkeit. Voraussetzung für die Anwendung solcher Denkschemata in digitalen statischen Berechnungen ist eine anpassungsfähige vielstufige Substrukturtechnik. Nur auf dieser Grundlage wird es möglich sein, den digitalen Rechner zu einem tauglichen Werkzeug des Statikers im gesamten Ablauf seiner Arbeit zu machen. Die eigentliche Substrukturtechnik wird dabei zu ergänzen sein durch



- Modifikationstechniken

- Verfahren für die Verbindung von Substrukturen mit ungleichartigen Variablengruppen (vgl. 3.024),

auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Eine zweistufige Substrukturtechnik beschreibt Przemieniecki [32]; er gibt auch eine Uebersicht über frühere Literatur zu diesem Thema. Die Besonderheit des hier beschriebenen Verfahrens ist die Zurückführung der Auflösung auf eine Form des Gauss'schen Algorithmus, welche zugleich die erforderliche vorübergehende statisch bestimmte Lagerung der Substrukturen automatisch herstellt.

### 3.11 Die Grundlage

Die mechanischen Grundlagen der Substrukturtechnik sind einfach und anschaulich evident. Wir geben einen formalen Beweis an, um die Voraussetzungen und die allgemeine Gültigkeit für alle linearen Probleme zu zeigen.

Sei  $\pi$  das diskretisierte Gesamtpotential eines Tragwerks, dass wir uns in 2 Substrukturen zerlegt denken wollen (Fig.3.01),

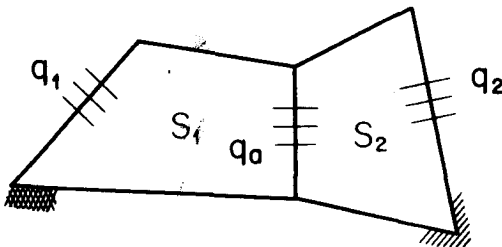


Fig. 3.01

die vorerst je stabil gelagert seien. Wir teilen die Variablen in drei Gruppen: Die inneren Variablen der Substrukturen  $q_i$

( $i = 1, 2$ ), und die gemeinsamen Variablen  $q_0$ .

Das Potential  $\pi$  ist die Summe der Beiträge aus den beiden Substrukturen

$$\pi = \Delta\pi_1 + \Delta\pi_2 \quad (3.011)$$

wobei

$$\begin{aligned} \Delta\pi_i = \frac{1}{2} \left[ q_i^\dagger H_{ii} q_i + 2 q_i^\dagger H_{i0} q_0 \right. \\ \left. + q_0^\dagger \Delta H_{00} q_0 \right] \\ + q_i^\dagger \bar{h}_i + q_0^\dagger \Delta \bar{h}_0^{(i)} \end{aligned} \quad (3.012)$$

$i = 1, 2$

Für die Summe (3.011) erhält man, in Matrizenform angeordnet

$$\begin{aligned} \pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_1^\dagger & q_2^\dagger & q_0^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{10} \\ 0 & H_{22} & H_{20} \\ H_{10}^\dagger & H_{20}^\dagger & H_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} q_1^\dagger & q_2^\dagger & q_0^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.013)$$

mit

$$H_{00} = \Delta H_{00}^{(1)} + \Delta H_{00}^{(2)}$$

$$\bar{h}_0 = \Delta \bar{h}_0^{(1)} + \Delta \bar{h}_0^{(2)}$$

Die direkte Lösung des Problems ist mit

$$\pi = \text{stationär}$$

die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{1a} \\ 0 & H_{22} & H_{2a} \\ H_{1a}^{\dagger} & H_{2a}^{\dagger} & H_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_a \end{bmatrix} = 0$$

Durch Elimination der 2 inneren Variablensätze erhält man daraus die Bestimmungsgleichungen

$$L_a q_a + \bar{l}_a = 0 \quad (3.014)$$

mit

$$L_a = H_{aa} - \sum_{i,2} H_{ia}^{\dagger} H_{ii}^{-1} H_{ia}$$

$$\bar{l}_a = \bar{h}_a - \sum_{i,2} H_{ia}^{\dagger} H_{ii}^{-1} \bar{h}_i$$

Andererseits folgen aus den Teilminima

$$\text{mit } \pi_i = \text{stationär bei } q_a = \text{const.}$$

(i=1,2)

die Gleichungen

$$H_{ii} q_i + H_{ia} q_a + \bar{h}_i = 0$$

oder

$$q_i = - H_{ii}^{-1} (H_{ia} q_a + \bar{h}_i)$$

Setzt man dies in (3.012) ein, so folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\Delta \pi_i = \frac{1}{2} q_a^\dagger \Delta L_a^{(i)} q_a + q_a^\dagger \Delta l_a^{(i)}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta L_a^{(i)} &= \Delta H_{aa}^{(i)} - H_{ia}^\dagger H_{ii}^{-1} H_{ia} \\ \Delta l_a^{(i)} &= \Delta \bar{h}_a^{(i)} - H_{ia}^\dagger H_{ii}^{-1} \bar{h}_i \end{aligned} \quad (3.015)$$

Bildet man daraus die Summe (3.011) und das Substrukturminimum

$$\pi = \text{stationär}$$

so erhält man wieder die Gleichungen (3.014) für die äusseren Variablen. Damit ist gezeigt, dass direkte und tufenweise Lösung identisch sind.

### 3.12 Der Algorithmus

Die numerische Bestimmung der Matrizen (3.015) erfolgt mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus [29]. In etwas verallgemeinerter Form liefert dieser eine Zerlegung

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline H_{ii} & H_{ia} & \bar{h}_i \\ \hline H_{ia}^\dagger & \Delta H_{aa}^{(i)} & \Delta \bar{h}_a^{(i)} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline C_{ii} & 0 \\ \hline C_{ia} & -I \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & B_{ii} & B_{ia} \\ \hline 0 & B_{aa} & \bar{B}_a \\ \hline \end{array} = 0$$

(3.016)

Das Bildungsgesetz der Produktmatrizen werden wir in (3.22) im Zusammenhang mit anderen numerischen Fragen zeigen. Wir werden immer dafür sorgen, dass die Dreiecksmatrizen  $C_{ii}$  und  $B_{ii}$  regulär sind, also nur Diagonalelemente  $\neq 0$  haben.

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned}
 H_{ii} + C_{ii} B_{ii} &= 0 \\
 H_{ia} + C_{ii} B_{ia} &= 0 \\
 H_{ia}^\dagger + C_{ia} B_{ii} &= 0 \\
 \Delta H_{aa}^{(i)} + C_{ia} B_{ia} - B_{aa} &= 0 \\
 \bar{h}_i + C_{ii} \bar{B}_i &= 0 \\
 \Delta \bar{h}_a^{(i)} + C_{ia} \bar{B}_i - \bar{B}_a &= 0
 \end{aligned}$$

und folgert

$$\begin{aligned}
 H_{ii}^{-1} &= - B_{ii}^{-1} C_{ii}^{-1} \\
 B_{ia} &= - C_{ii}^{-1} H_{ia} \\
 C_{ia} &= - H_{ia}^\dagger B_{ii}^{-1} \\
 \bar{B}_i &= - C_{ii}^{-1} \bar{h}_i
 \end{aligned}$$

Schliesslich ist

$$\begin{aligned} B_{\alpha\alpha} &= \Delta H_{\alpha\alpha}^{(i)} - H_{i\alpha}^t H_{ii}^{-1} H_{i\alpha} = \Delta L_{\alpha}^{(i)} \\ \bar{B}_{\alpha} &= \Delta \bar{h}_{\alpha}^{(i)} - H_{i\alpha}^t H_{ii}^{-1} \bar{h}_i = \Delta l_{\alpha}^{(i)} \end{aligned} \quad (3.015a)$$

Neben diesen Beiträgen zur höheren Stufe enthält der zweite Faktor der Zerlegung (3.016) die Matrizen für das Rückwärts-einsetzen; nach Bestimmung der äusseren Variablen  $q_{\alpha}$  auf höherer Stufe ist

$$\begin{aligned} q_i &= - H_{ii}^{-1} H_{i\alpha} q_{\alpha} - H_{ii}^{-1} \bar{h}_i \\ &= - B_{ij}^{-1} (B_{i\alpha} q_{\alpha} + \bar{B}_i) \end{aligned} \quad (3.018)$$

### 3.13 Rechengang und Datenstruktur

Die stufenweise Lösung lässt sich sofort auf beliebig viele Stufen und Substrukturen pro Stufe ausdehnen. Dabei brauchen wir folgende Begriffe:

- Die S t u f e <sup>n</sup> der "strukturellen Assemblierung" werden von der höchsten Stufe K - jener des Tragwerks - absteigend numeriert; B a s i s e l e m e n t e wie die Dreieckselemente oder Scheibenkanten des Abschnitts (2) können auf jeder Stufe unter K auftreten.

<sup>1</sup> Wo Grössen aus verschiedenen Stufen gemeinsam auftreten, werden wir die Stufe als vorangestelltes Superscript

angeben.  $(L)q_s$

- Die allgemeinste begriffliche Einheit ist die Substruktur der Stufe L, mit dem Satz von Potentialbeiträgen zu ihren  $\bar{N}_s$  Standardlastfällen:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\pi}_s^* &= \left[ \Delta \tilde{\pi}_s^{*(1)} \dots \Delta \tilde{\pi}_s^{*(\bar{N}_s)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (q_s^\dagger H_s q_s)^{(1)} \dots (q_s^\dagger H_s q_s)^{(\bar{N}_s)} \right] \\ &\quad + q_s^\dagger \bar{H}_s \\ &\quad \quad \quad (N_s * \bar{N}_s) \end{aligned} \tag{3.020}$$

Bei den Komponenten der Variablenspalte  $q_s$  der Substruktur unterscheiden wir *i n n e r e* und *ä u s s e r e* Variable. *I n n e r e* Variable der Stufe L sind solche, die dort eliminiert werden. *A e u s s e r e* Variable sind solche, die an die nächste Stufe weitergegeben werden. *E l e m e n t e* sind (auf jeder Stufe) spezielle Substrukturen, die nur *ä u s s e r e* Variable haben.

Das *T r a g w e r k* ist eine spezielle Substruktur, die nur *i n n e r e* Variable hat. Die Substrukturmatrizen denken wir uns entsprechend der Unterscheidung von inneren und äusseren Variablen in Untermatrizen aufgeteilt:

$$\begin{aligned} H_s &= \begin{bmatrix} H_{ii} & H_{io} \\ (N_i * N_i) & (N_i * N_o) \\ H_{io}^\dagger & H_{oo} \\ & (N_o * N_o) \end{bmatrix} & \bar{H}_s &= \begin{bmatrix} \bar{H}_i \\ (N_i * \bar{N}_s) \\ \bar{H}_o \\ (N_o * N_s) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.021}$$

Im Gegensatz zur später einzuführenden P a r t i t i o n der Matrizen ist diese Aufteilung nur begrifflicher Art: Die Substrukturmatrizen werden praktisch nicht nach inneren und äusseren Variablen umgeordnet.

Grundsätzlich liefert nun die Gauss'sche Teilzerlegung zu (3.021) die E l e m e n t - und R e k u r s i o n s m a - t r i z e n in der schematischen Form des zweiten Faktors in (3.016).

$B_{ii}$	$B_{ia}$	$\bar{B}_i$
0	$L_{aa}$ ( $N_d * N_a$ )	$\bar{L}_a$ ( $N_d * N_s$ )
0		

(3.022)

Um von der einschränkenden Voraussetzung einer stabilen Lagerung der Substrukturen freizukommen, bleibt die genaue Lage der Trennungslinien zwischen inneren und äusseren Variablen in (3.022) bis zum Abschluss des Gauss'schen Teileliminationsvorgangs variabel; anfänglich innere Variable, deren Elimination wegen

- linearer Abhängigkeit
- linearer Fast-Abhängigkeit
- Auswirkungen der Matrizenpartition

nicht möglich ist, werden den äusseren Variablen zugeordnet. Anschaulich bedeutet diese Massnahme die automatische Bestimmung vorübergehender Hilfslager für die Substruktur; numerisch ist damit die Regularität von  $B_{ij}$  gesichert.

Die Bezifferung der Variablen an der übergeordneten Substruktur der Stufe (L+1) muss diese zusätzlichen Variablen der Unterelemente einschliessen. Diese Aufgabe ist programmtechnisch



leicht zu lösen, weil die zusätzlichen Variablen - als ehemalige Innere - immer isoliert auftreten. Als Ergebnis der Numerierung in der Stufe (L+1) sind die Beziehungen

$$\begin{matrix} {}^{(L)}q_a & = & {}^{(L)}C_S & {}^{(L)}a_E & {}^{(L+1)}q_S \\ {}^{(L)}(N_a * 1) & & {}^{(L)}(N_a * N_E) & & {}^{(L+1)}(N_s * 1) \end{matrix} \quad (3.024)$$

bekannt. Die Matrix  $a_E$  ist wie immer als reine Indextransformation zu verstehen; sie hat nur die Aufgabe, die Variablen des Elements der Stufe L aus dem Variablenatz der übergeordneten Substruktur auszuwählen (und ev. ihr Zeichen zu wechseln). Die Matrix  $C_S$  kann eine reguläre Transformation ( $N_a = N_E$ ) oder eine Einschnürung des Variablenatzes beinhalten ( $N_a > N_E$ ). Eine solche muss z.B. an den Uebergängen zwischen Elementen verschiedenartigen Variablenatzes auf das Element mit dem reichhaltigen Teilsatz in der Kontaktfläche der beiden angewendet werden, um den reinen Gleichgewichtscharakter der Diskretisation zu erhalten. Als Rechtfertigung solcher Massnahmen kann das Prinzip von St. Venant herangezogen werden.

Aus (3.022) und (3.024) zu allen Unterelementen E einer Substruktur der Stufe (L+1) erhält man jetzt (vgl. 3.008)

$$\begin{matrix} {}^{(L+1)}H_S & = & \sum_E & {}^{(L)}a_E^\dagger & {}^{(L)}C_S^\dagger & L_{aa} & {}^{(L)}C_S & {}^{(L)}a_E \\ {}^{(L+1)}\bar{H}_S & = & \sum_E & {}^{(L)}a_E^\dagger & {}^{(L)}C_S^\dagger & \bar{L}_a & \begin{matrix} {}^{(L)}b_E \\ {}^{(L)}\bar{N}_s * {}^{(L+1)}\bar{N}_s \end{matrix} \end{matrix} \quad (3.025)$$

Zu einem Element der Stufe L gehören somit die folgenden Informationsbeträge:

- ①  $^{(L)}\mathbf{O}_E$  -Matrix für die Zuordnung an die höhere Stufe (3.025)
- ②  $^{(L)}\mathbf{b}_E$  -Matrix für die Rekombination der Standartfälle
- ③  $^{(L)}\mathbf{C}_S$  -Matrix für die Transformation der Elementvariabeln
- ④ Substrukturmatrizen gemäss (3.022), einschliesslich der Koeffizienten für das Rückwärtseinsetzen
- ⑤ Ein Verzeichnis der untergeordneten Elemente der Stufe (L-1)

Die Informationsmenge zu einem Tragwerk, welches stufenweise in Substrukturen zerlegt wird, erhält die logische Struktur eines Baumes :

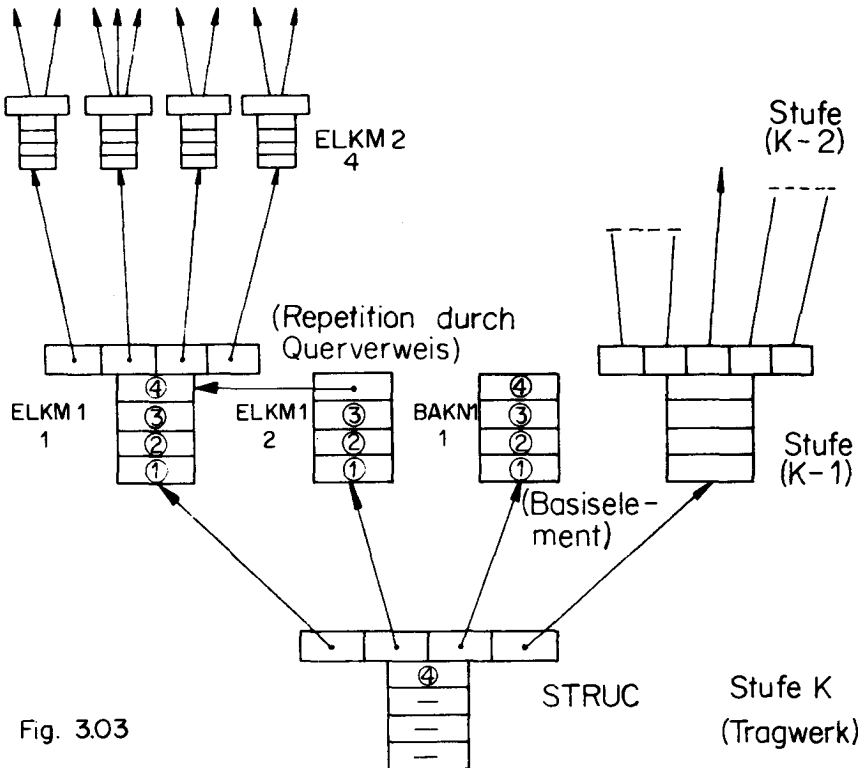


Fig. 3.03

Der Umfang der Informationsmenge (Fig. 3.03) ist schon bei statischen Problemen mittlerer Grösse so, dass eine einzelne Substrukturmatrix einer Stufe L im direkt adressierbaren Kernspeicher einer modernen Grossrechenanlage keinen Platz findet, so dass sekundäre Speichermedien herangezogen werden müssen. In der höchsten Stufe K muss eine stabile Lagerung des Tragwerks gegeben sein. Auch hier kann die automatische Hilfslagerung nützliche Dienste leisten; da äussere Variable nicht mehr möglich sind, wird unbestimmten Variablen (zu deren Bestimmung der Rang nicht ausreicht) automatisch der Wert 0 zugewiesen. Diese Konvention kann in zwei Fällen von praktischem Nutzen sein:

- statische Berechnung von Bauteilen mit vollständig gegebenen Spannungsrandbedingungen:  
Die automatisch isolierten Hilfslager dienen als Ersatz für nicht vorgegebene Verschiebungsrandbedingungen. Durch Einsetzen der Lösungen in die isolierten Gleichungen verifiziert man zudem das Gleichgewicht der gegebenen Randspannungen.
- Feststellung der Instabilität des Tragwerks im Grossen (nicht zu verwechseln mit der elastischen Instabilität 2. Ordnung).  
Das Programm ist in der Lage, die Freiheitsgrade einer kinematischen Kette festzustellen, welche durch Fehler des Entwurfs oder der Diskretisation an die Stelle des beabsichtigten stabilen Tragwerks getreten ist. Diese Prüfung ist viel durchgreifender als die Prüfung der Stabilität einzelner Knoten, wie sie z.B. in STRESS vorgesehen ist (CHECK JOINT STABILITY).

Der Vorgang des Rückwärtseinsetzens in den Ketten von teilweise aufgelösten Substrukturgleichungen in aufsteigenden Linien des "Baumes" von Fig. (3.03) hat neben der Rücktransformation der Resultate gemäss (3.024) auf die stattgefundene stufenweise Rekombination der Standartlastfälle Rücksicht zu nehmen; seien

$$\begin{matrix} (L+1) \\ Q_S \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix}$$

die  $\bar{N}$  a k t u e l l e n Lösungen für die Substrukturvariablen  $Q_S$  der Stufe (L+1). Dann ist

$$\begin{matrix} (L) \\ Q_a \\ (N_a * \bar{N}) \end{matrix} = \begin{matrix} (L) \\ C_S \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \begin{matrix} (L) \\ a_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \begin{matrix} (L+1) \\ Q_S \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \quad (3.024)$$

Die Konstanten in den Eliminationsgleichungen von (2.022) sind auf den "aktuellen" Stand zu bringen:

$$\begin{aligned} \begin{matrix} \bar{B}_i \\ (N_i * \bar{N}) \end{matrix} &= \begin{matrix} \bar{B}_i \\ (N_i * \bar{N}_S) \end{matrix} \begin{matrix} (L) \\ b_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \dots \dots \begin{matrix} (K-1) \\ b_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \\ &= \begin{matrix} \bar{B}_i \\ (N_i * \bar{N}) \end{matrix} \begin{matrix} (L) \\ b_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \begin{matrix} (L+1) \\ B_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \end{aligned}$$

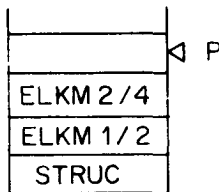
${}^{(L+1)}B_E$  ist das Produkt aller Rekombinationsmatrizen der Stufen (L+1) - (K-1)

$$\begin{matrix} (L) \\ B_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} = \begin{matrix} (L) \\ b_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \begin{matrix} (L+1) \\ B_E \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix}$$

in der aufsteigenden Linie des Baumes zum betrachteten Element. Damit folgt, nach (3.018) und (2.022) durch Gauss'sche Teilrekursion

$$Q_i = - \begin{matrix} B_{ii}^{-1} \\ (N_i * N_i) \end{matrix} \left( \begin{matrix} B_{ia} \\ (N_i * N_a) \end{matrix} Q_a + \begin{matrix} \bar{B}_{ii} \\ (N_S * \bar{N}) \end{matrix} \right) \quad (3.018a)$$

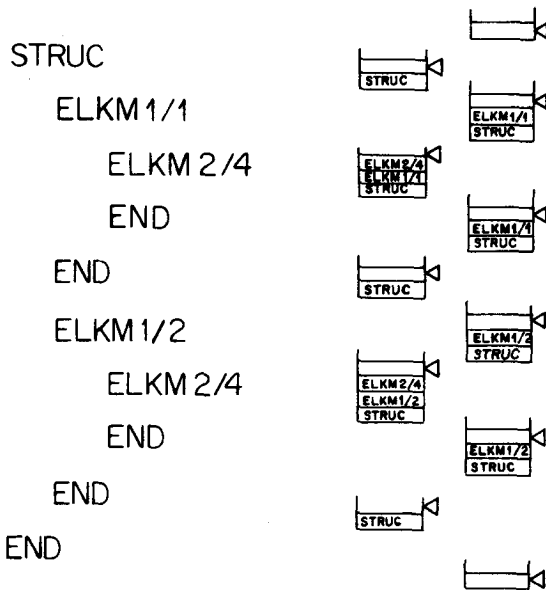
Dem Leser muss spätestens an dieser Stelle die Unzulänglichkeit von Matrizenformeln für die Beschreibung des numerischen Prozesses der Substrukturtechnik auffallen. Diese Unzulänglichkeit ist grundsätzlicher Art. Man könnte z.B. versuchen, jeder Matrix neben der Stufenbezeichnung die "individuelle" Bezeichnung der zugehörigen Substruktur als Index beizufügen. Auch dies würde keine Lösung bringen, denn selbstverständlich wird man die Repetition gleicher Elemente (ein Hauptzweck der Substrukturtechnik) im Baum von Fig. 3.03 nicht durch "Abschreiben" des ganzen Astes darüber realisieren, sondern durch einen "Querverweis" bei den Elementmatrizen, wie beim Element ELKM1/2 in Fig. 3.03 angedeutet wurde. Dadurch werden automatisch alle zuvor "getauften" Elemente des Astes links auf den Stufen (K-2) bis zweideutige Namen erhalten. Eine eindeutige Kennzeichnung eines Elements im Baum ist im Allgemeinen nur durch Angabe des Wegs zu ihm möglich; diese Angabe wäre z.B. für das Unterelement ELKM2/4 des repetierten Elements ELKM1/2 in Fig. 3.03:



(3.030)

Im zeitlichen Ablauf des numerischen Prozesses wird man die Identität des Elements in Bearbeitung durch eine Liste dieser Art (englisch Stack) fixieren. P gibt den Ort für den nächsten Listeneintrag tieferer Stufe an (Stack Pointer).

Der Beschreibung eines Rückwärtseinsetzvorganges zu den beiden Elementen ELKM2/5 von ELKM1/1 und ELKM1/2 kann - als Steuerbefehle für das Programm - etwa folgende Form gegeben werden:



(3031)

Wir haben rechts den Zustand des Stacks in jeder Phase des Ablaufs angegeben; die Regel für seine Verwaltung ist offenbar:

- bringe Namen an die Position des Stack Pointers und schiebe diesen zugleich um einen Platz aufwärts
- schiebe bei END den Stack-Pointer um 1 abwärts.

Ein Grundzug der Formeln für Strukturaufbau und Rückwärts-einsetzen (3.024) - (3.018a) ist die **R e k u r s i v i t ä t**: Die Operationen sind an allen Stufen des Baumes in gleicher Weise auszuführen. Werden alle Informationen für die Durchführung dieser Operationen in Form solcher "Stacks" abgelegt - wobei es unwesentlich ist, ob im Stack die Information selbst oder ein eindeutiger Vertreter davon erscheint - wird es möglich, dieser Rekursivität direkten programmtechnischen Ausdruck zu geben, indem ein und dasselbe Unterprogramm die Operation auf allen Stufen ausführt; man hat lediglich dafür zu sorgen, dass jeweils die richtigen Operanden angesteuert werden; innerlich wird man diese Steuerung durch den Stack-Pointer vornehmen. Baumstrukturen, Stacks und Rekursivität sind selbstverständliche und fast lapidare datentechnische Korrelate zu den wichtigsten Grundfiguren abstrakten Denkens in Begriffen. Leider ist diese Selbstverständlichkeit eine solche der **b e s s e r e n E i n s i c h t**, die unter den "pragmatischen" Technikern aller Sparten bisher keine Siege feiert. Man hat sich heute damit abzufinden, dass die einzige universell verwendbare und mit ausreichender Rücken-deckung durch die datenverarbeitende Industrie versehene Programmsprache (FORTRAN) von solcher Einsicht unberührt ist.

Für die Zwecke dieser Arbeit war FORTRAN nur durch systematische Vergewaltigung und durch die Anwendung von Tricks zu gebrauchen; sein einziger und wichtigster Vorteil dürfte sein, dass es auf Grund seiner Einfachheit solchen Missbrauch ungestraft zulässt.

Der Verfasser dankt an dieser Stelle **G. M. S k a g e s t e i n** für seine Einführung in die zuvor gestreiften Grundformen der Datenstrukturierung und Programmierung; ohne sie wäre diese Arbeit nie abgeschlossen worden. Skagestein's neue Programmsprache [33] stand ihm leider nicht zur Verfügung; sie hätte die Arbeit wohl um Monate verkürzt.

### 3.14 Repetitionen

An regelmässigen Tragwerken oder an Tragwerksteilen mit regelmässiger Diskretisation ermöglicht mehrstufige Substrukturtechnik Einsparungen am Rechenaufwand. Die Allgemeinheit der zugrundeliegenden Datenstruktur (Fig. 3.03) erlaubt eine sehr weite Interpretation des Begriffs "regelmässig"; insbesondere muss die Regelmässigkeit weder die Belastungen noch die Lagerung einschliessen. Ferner ist es leicht möglich, durch geeignete Wahl der Substrukturstufung und -Gliederung eine gestörte Regelmässigkeit vorerst ungestört regelmässig zu behandeln und erst am Schluss - in höheren Stufen - die unregelmässigen Teile oder Glieder des Tragwerks anzuschliessen. Die Voraussetzungen zu dieser weiten Interpretation der Regelmässigkeit sind gegeben durch

- die Möglichkeit einer Rekombination der Lastfälle von Stufe zu Stufe
- die Möglichkeit, Variable als "äussere" Variable zu erklären, wodurch deren Elimination aufgeschoben wird und die weitere Verwendung auf höherer Stufe offen bleibt.

Fast alle Tragwerke des Bauwesens sind in diesem Sinne von teilweiser Regelmässigkeit; die Erfahrung zeigt auch, dass unregelmässige Diskretisation selten notwendig ist.

Das Ausmass der Einsparung durch Repetition von Substrukturen kann nicht allgemein angegeben werden. Massgebend ist in allen praktischen Fällen der numerische Aufwand für die Gauss'sche Elimination. Als schematisches Beispiel zur Illustration betrachten wir ein ebenes, zweidimensionales Tragwerk (Fig. 3.05) mit einer regelmässigen Teilung in  $2^K$  Maschen an jeder Seite. Verglichen wird die Zahl der Multiplikationen (oder Additionen) für direkte Auflösung einerseits und stufenweise Lösung "nach Potenzen von 2" andererseits (Fig. 3.05), in  $2K$  Stufen. Es



wurde nicht untersucht, ob diese extreme Stufung in allen Fällen optimal ist; bei eigentlichen Makroelementen mit vielen Seitenvariablen ist sie es sicher.

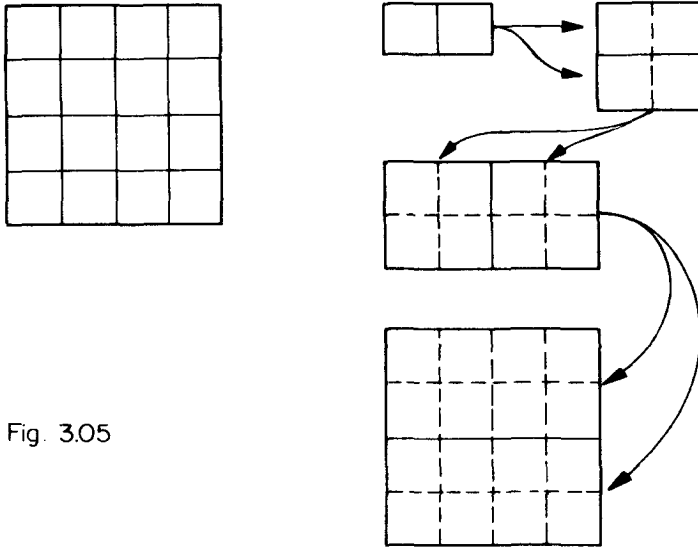


Fig. 3.05

Die Grundelemente haben  $P$  Variable pro Knoten,  $S$  Variablen an den Seiten und  $I$  Binnenvariablen.  $2/3$  der Variablen auf dem Rand seien durch Randbedingungen gegeben. Von den Binnenvariablen setzen wir voraus, dass in jeder Stufe unter  $2^k$  nur die Hälfte von ihnen an der Substruktur eliminiert werden kann, entsprechend den Verhältnissen der direkten Kraftmethode. Bei direkter Auflösung ist die Zahl der Unbekannten

$$N = 2^{2k} * I + (2^k + 1)^2 * P + 2^{k+1} * (2^k + 1) * S - 2^{k+2} * (P + S) * \frac{2}{3}$$

bei einer Bandbreite von

$$NB = (2^K - 1) * (P+S) + 2^K * (S+I) \\ + P + 2 * S/3$$

Die Zahl der Operationen ist

$$L_D \sim (N - NB) * \frac{NB^2}{2} + \frac{NB^3}{6}$$

Bei stufenweiser Lösung ist auf jeder Stufe eine Teilelimination nach den inneren Variablen MI an einer Matrix der Dimension M bei MA = M-MI äusseren Variablen vorzunehmen. Wir setzen voraus, dass die Elementmatrizen koordinatenunabhängig sind und somit in gedrehter Lage nicht transformiert werden müssen (2.3). Der Aufwand für die Teilelimination an den voll besetzten Substrukturmatrizen (keine Bandstruktur) ist

$$L_S \sim \frac{1}{6} (M^3 - M_A^3)$$

Dazu kommen pro Element  $M_A^2/2$  Operationen für die Umordnung. Dieser Term kann ins Gewicht fallen, wenn die Zahl der inneren Variablen klein ist. Die Randbedingungen werden grundsätzlich so früh wie möglich berücksichtigt; die ersten Randvariablen können in der Stufe  $2K-3$  eliminiert werden.

Die Ergebnisse der Auswertung dieser Beziehungen für eine Anzahl von Fällen (P/S/I) sind in Fig. (3.06) aufgetragen. Auf der Abszisse ist K aufgetragen, in der Ordinate der Divisor

$$F = \frac{L_D}{\sum_1^{2K} L_S}$$

um den der Aufwand durch die Substrukturtechnik sinkt. Man beachte den logarithmischen Massstab der Ordinate. Die gestrichelte Kurve zeigt den - selbstverständlich hypothetischen - Fall  $P = 0$ ,  $S = 0$ ,  $I = 0$ . Im Bereich mittelgrosser "Makroelemente" als Ausgangspunkt (3/40/9) ist bei 4 Maschen ( $K = 2,4$  Stufen) mit einer Reduktion des Aufwands im Verhältnis von 7,77/1 zu rechnen; bei mehr Stufen steigt das Verhältnis schnell an.

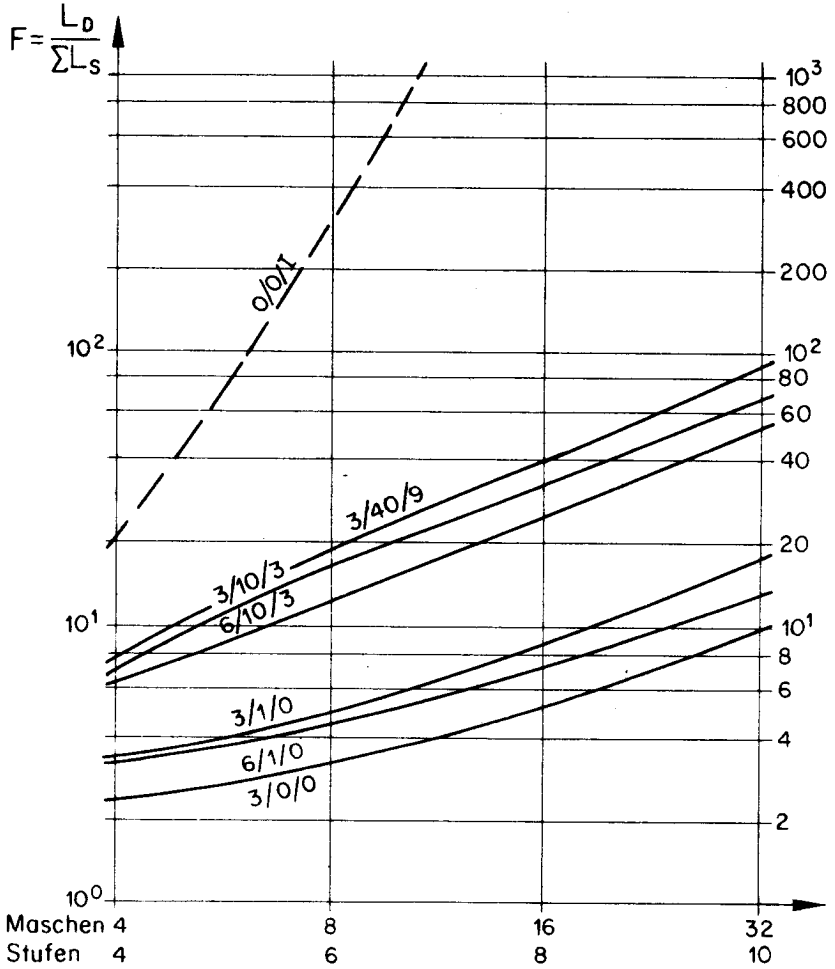


Fig. 3.06

Parameter: P/S/I

P Knotenvariable

S Seitenvariable

I Innere Var.

am Grundelement

### 3.2 Die Auflösung der linearen Gleichungssysteme

Die statischen Gleichungen des Tragwerks auf der obersten Stufe des Substrukturaufbaus haben die schematische Form

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{F} & \mathbf{G}^\dagger \\ \hline (\mathbf{N}_F * \mathbf{N}_F) & \\ \hline \mathbf{G} & \mathbf{O} \\ (\mathbf{N}_G * \mathbf{N}_P) & \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad (3.050)$$

Wir klären zuerst die Beziehung dieser Gleichungen zu jenen der klassischen Kraftmethode der Statik (O. Mohr, H. Müller-Breslau ; dazu nehmen wir vereinfachend an, die Matrix  $\mathbf{G}$  sei vom Rang  $\mathbf{N}_G$  und so geordnet, dass in

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_e & \mathbf{G}_n \\ (\mathbf{N}_G * \mathbf{N}_G) & (\mathbf{N}_G * (\mathbf{N}_F - \mathbf{N}_G)) \end{bmatrix}$$

die erste Matrix regulär sei. Unterteilt man den Rest der Matrix entsprechend, wird das Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ee} \mathbf{p}_e + \mathbf{F}_{en} \mathbf{p}_n + \mathbf{G}_e^\dagger \mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}_e &= \mathbf{O} \\ \mathbf{F}_{en}^\dagger \mathbf{p}_e + \mathbf{F}_{nn} \mathbf{p}_n + \mathbf{G}_n^\dagger \mathbf{u} + \bar{\mathbf{f}}_n &= \mathbf{O} \\ \mathbf{G}_e \mathbf{p}_e + \mathbf{G}_n \mathbf{p}_n + \bar{\mathbf{g}} &= \mathbf{O} \end{aligned} \quad (3.051)$$

Daraus erhält man ein System der klassischen Kraftmethode durch Elimination von  $\mathbf{p}_e$  und  $\mathbf{u}$  ; die "überzähligen" Kraftgrößen sind die  $\mathbf{p}_n$  , und die zugehörigen Gleichgewichtszustände sind durch

$$p_e = - G_e^{-1} (G_n p_n + \bar{g})$$

(3.052)

mitbestimmt

Praktisch verlangt dieses Vorgehen [20] eine Rangbestimmung in der rechteckigen Matrix  $G$ , was nur durch einen Gauss-Jordan-Algorithmus mit zweidimensionaler Pivotsuche zu machen ist. Man stellt fest, dass die Bestimmung der Grundzustände, die in der klassischen Statik durch intuitiven Ansatz erfolgt, bei automatischer Ausführung zum rechentechnisch schwierigsten Teil der Auflösung wird. Für grosse Systeme ist deshalb ein Festhalten an den Vorstellungen von Grundzustand und überzähligen Zuständen wenig erfolgversprechend, wenn nicht eine direkte Konstruktion oder Vorgabe dieser Zustände möglich ist.

Die Matrix  $F$  ist anschaulich die Flexibilitätsmatrix des Tragwerkes bei festgehaltenen Verschiebungsgrössen  $u$  - also bei festgehaltenen Hilfs lagern in allen Unterelementen des Tragwerks. Daraus folgt, dass  $F$  regulär und von guter Kondition sein muss. (Eine kleine Störung kann an einem so stark gelagerten Tragwerk nur eine kleine und eng begrenzte Wirkung haben). Auf Grund dieser Einsicht könnte man in (3.050) zuerst nach den Kraftgrössen  $p$  auflösen:

$$p = - F^{-1} (G^t u + \bar{f})$$

(3.053)

und hätte die Gleichungen

$$- (GF^{-1}G^t) u - GF^{-1}\bar{f} + \bar{g} = 0$$

für Verschiebungsgrößen:

$$Ku = R$$

$$K = GF^{-1}G^{\dagger} \quad (3.054)$$

$$R = -GF^{-1}\bar{f} + \bar{g}$$

Bei stabiler Lagerung des Tragwerks ist auch dieses System positiv definit: Es ist das System der Deformationsmethode für die Variablen  $U$ . Grundsätzlich könnte das System (3.050) in diesen zwei Schritten ohne jede Komplikation durch Pivotsuche aufgelöst werden.

Der eingesetzte Auflösungsalgorithmus lehnt sich eng an diesen Lösungsweg an, ohne ihm ganz zu folgen. Erschwerend fällt ins Gewicht, dass

- eine schematische Trennung von Kraft- und Verschiebungsvariablen eine oft vorhandene Bandstruktur zerstören würde und deshalb nicht zweckmässig ist
- neben Kräften mit Diagonalkoeffizienten  $> 0$  durch Multiplikatorelemente auch solche auftreten können, die nur über Gleichgewichtsbedingungen mit anderen Kräften verknüpft sind, was u.U. die Definitheit der Matrizen  $F$  und/oder  $K$  in Frage stellt
- im allgemeinen Fall der Teilelimination an Substrukturen eine Hilfslagerung durch den Auflösungsprozess selbst erfolgen muss.

Trotz diesen Komplikationen ist es möglich, die Gleichungen im Rahmen mehrstufiger Substrukturanalyse mit nur teilweiser diagonaler (eindimensionaler) Pivotsuche zu-

verlässig aufzulösen. Ein Grund dafür ist, dass die Art der Diskretisation Variablen ausschliesst, die nur über neben-diagonale Gleichungen bestimmbar sind; solche Fälle sind Anzeichen von Diskretisationsfehlern und/oder triviale isolierte Gleichungen.

### 3.21 Die Partition der Substrukturmatrizen

Die Grösse der Substrukturmatrizen (3.025) ist bei regelmässigen Tragwerken bestimmt durch die Forderung nach grösstmöglicher Einsparung durch Repetition. Die optimale Substrukturabstufung ist bei grösseren Problemen nicht immer intuitiv feststellbar; die Grundlagen für Vergleiche sind in (3.14) angegeben. Oft ist  $N_S$  durch die Arbeitsmethodik festgelegt. Bei den grösseren Beispielen zu dieser Arbeit hat sich ein schrittweises Vorgehen mit Substrukturen von 100 bis höchstens 600 Variablen bewährt, wobei jede Substruktur vor ihrer weiteren Verwendung einzeln (als Tragwerk) gelagert und geprüft wurde. Dadurch gelingt es, Datenfehler an leicht überblickbaren Tests schon auf unterer Stufe zu isolieren - ein nicht unwichtiger Vorteil einer Substrukturtechnik. In jedem Falle sind die Substrukturmatrizen zu gross, um im direkt adressierbaren Kernspeicher heutiger Rechenanlagen unzerlegt untergebracht zu werden.

Für die Zerlegung stehen mehrere Möglichkeiten zur Wahl:

- Blockpartition
- Streifenpartition bei Bandmatrizen
- Elementweise Speicherung nichtverschwindender Elemente.

Die letzte Variante ist bei spärlich besetzten Matrizen interessant im Zusammenhang mit einer besonderen Auflösungstechnik (Frontal Solution [34]), die darauf abzielt, die Zahl der nichtverschwindenden Elemente auch während der Auflösung



klein zu halten. In unserem Falle ist diese Technik unwirksam, weil schon die Grundelemente zu relativ dicht besetzten Bereichen der Matrix Anlass geben. Auch die Voraussetzung einer Bandstruktur trifft die Bedürfnisse einer mehrstufigen Substrukturtechnik schlecht; eine solche ist zwar gegeben bei Tragwerken, die im Grossen eindimensional sind; dann führt die Substrukturtechnik aber immer zu einer Block - Bandstruktur, die auch auf der Basis allgemeiner Blockpartition ausgenützt werden kann. An regelmässigen Tragwerken, die im Grossen zweidimensional sind, rechnet man oft am besten mit kleinen, voll besetzten Matrizen und wählt die Zahl der Stufen gross, um alle Repetitionen auszunützen. Unsere Wahl fällt somit auf eine Blockpartition (Fig. 3.04). Die Partitionsgrössen  $N_1, N_2, \dots$

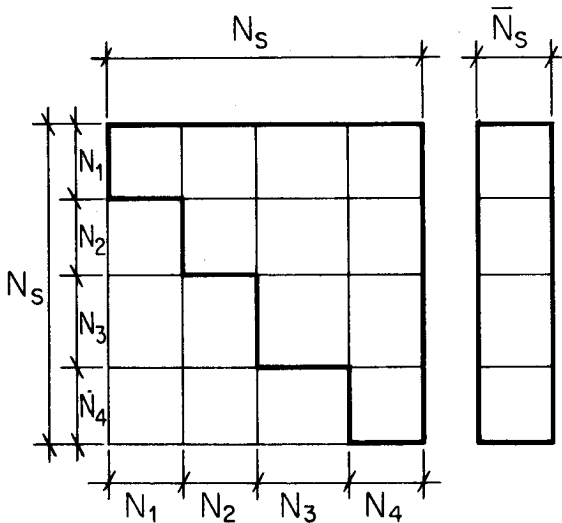
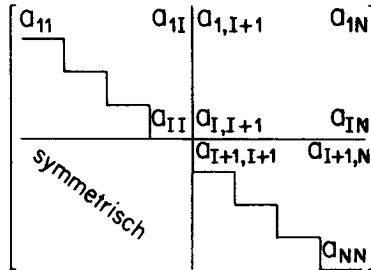


Fig. 3.04

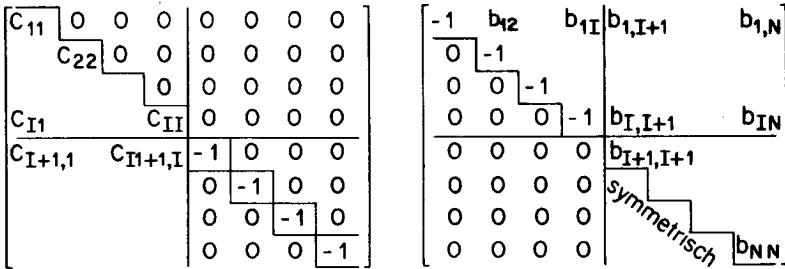
wird man bei Block-Bandstruktur so anpassen, dass die Blöcke ein möglichst enges Band bilden und Blöcke mit wenig Elementen vermieden werden.

3.22 Die Elimination in einem Diagonalblock

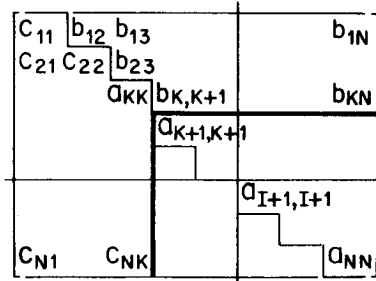
Der Gauss'sche Algorithmus für die Bildung der Zerlegung (2.014) ist eine einfache Verallgemeinerung des bekannten Rechenganges bei der vollständigen Auflösung von linearen Gleichungen, wie er in jedem Lehrbuch der numerischen Mathematik beschrieben wird [29]. An einem Diagonalblock



wird die Zerlegung



mit Pivotsuche in der Diagonale hergestellt. Den Zwischenzustand nach dem Schritt K veranschaulicht schematisch



Der nächste Schritt umfasst folgende Operationen:

- Suche eines geeigneten Pivots in der Diagonalen der Restmatrix  $A_{K+1, K+1} \dots A_{II}$   
 "Geeignet" ist ein Pivot, wenn er nicht 0 ist. Numerisch ist 0 für einen Diagonalkoeffizienten  $A_{JJ}$  ein Intervall  $\pm \text{EPS}$  um den Nullpunkt. Einzelheiten dazu werden am Ende dieses Abschnittes angegeben. Die Pivotsuche geht nicht darauf aus, den jeweils maximalen verfügbaren Pivot zu finden; vielmehr soll die Zahl der Umordnungen - welche die Operation verzögern - möglichst klein gehalten werden, bei Vermeidung untragbarer Stellenverluste wegen Division durch "fast Null".
- Zeilen- und Spaltenvertauschung, so dass der gefundene Pivot an die Stelle  $(K+1, K+1)$  gelangt.  
 Für die Spalte  $(K+1)$  ist

$$C_{J, K+1} \leftarrow A_{K+1, J} \quad (J = (K+1) \div N)$$

Die Zeile  $(K+1)$  ist

$$b_{K+1, J} \leftarrow -\frac{C_{J, K+1}}{C_{K+1, K+1}} \quad (J = (K+2) \div N) \quad (3.062)$$

- Eliminationsbeiträge an den verbleibenden a-Bereich der Matrix, nach der Regel

$$a_{JM} \leftarrow a_{JM} + C_{J, K+1} * b_{K+1, M} \quad (J = K+2 \div N) \quad (3.063)$$

$$M = J \div N$$

Damit ist der Schritt  $K+1$  abgeschlossen. Die ganze Zerlegung ist abgeschlossen, wenn

- entweder alle I Inneren Variablen eliminiert sind
- oder wenn kein tauglicher Pivot mehr gefunden werden kann. Hatte der letzte ausgeführte Schritt die Nummer K, so ist neu  $I \leftarrow K$  zu setzen; die Variablen (K+1) bis I (alt) werden zu äusseren.

Zum Schluss sind die vorgenommenen Umordnungen rückgängig zu machen oder in geeigneter Weise zu "merken".

Wir haben der Beschreibung die begrifflich einfachste Form des Algorithmus zugrundegelegt. Die rechentechnisch effektivste Organisation hängt von technischen Gegebenheiten der Programmiersprache und des Rechners ab. Es lohnt sich, diese Frage bei der Programmierung sorgfältig abzuklären, weil der Eliminationsvorgang bei mittleren und grossen Problemen den Löwenanteil der Rechenkosten verursacht.

Die Grösse EPS (relative Null) ist gegeben durch

$$EPS_{JJ} = U \cdot G_{JJ} \cdot S \quad (3.064)$$

Der Rundungsfehler an der Einheit U ist eine maschinenabhängige Grösse. Bei rundender Gleitkommaarithmetik mit M binären Mantissenstellen ist er

$$2^{-(M+1)} = 10^{-0.301(M+1)}$$

$G_{JJ}$ , die Grössenordnung der Einflussgrösse  $Q_{JJ}$  hängt ab von Variabelntyp, ungefähren Dimensionen der Elemente und Elastizitätsmodul. Für ein Scheibenelement seien  $l_R, t_R$  die "Referenzdimensionen" in der Scheibenebene und quer dazu.

Eine Einflussgrösse bestimmt sich aus

$$a_{JJ} = \int \sigma_J \epsilon_J dv$$

Element

Sei z.B.  $Q_J$  eine Kraft  $P$  an einer Scheibenkante. Dann ist

$$\sigma_J t_R l_R \sim P = 1$$

$$\sigma_J \sim \frac{1}{t_R l_R}$$

und daraus

$$a_{JJ} \sim \frac{1}{E t_R}$$

Mit Dimensionsbetrachtungen dieser Art findet man die Grössenordnungen

$$\frac{l_R^2}{100 t_R E} \quad \text{für Spannungsflüsse an Scheiben}$$

$$\frac{1}{t_R E} \quad \text{für Scheibenkräfte}$$

$$\frac{40}{l_R^2 t_R E} \quad \text{für Momente an Scheiben}$$

$$\frac{12 \kappa^2}{t_R E} \quad \text{für Querkräfte an Stabelementen}$$

$$\frac{12 \kappa^2}{l_R^2 t_R E} \quad \text{für Momente an Stabelementen}$$

Die Verhältniszahl  $K$  gibt das Verhältnis der Scheiben-Referenzlänge (entspricht Stablänge) zur mittleren Stabhöhe an. Die Grössenordnung von Einflussgrössen zu Verschiebungsvariablen sind die reziproken Werte jener zugehöriger Kraftgrössen.

Als **S i c h e r h e i t s a b s t a n d S** zur Vermeidung starker Stellenverluste hat sich bei den Beispielen zu dieser Arbeit - in Verbindung mit den 48 binären Mantissenstellen der CDC - 6000 - Computer - ein Faktor von  $10^9$  bis  $10^{10}$  bewährt.

### 3.23 Bemerkungen zum Blockalgorithmus

An einer blockpartitionierten Matrix (Fig. 3.04) sind bei der Auflösung **a n d e n B l ö c k e n** im Wesentlichen dieselben Operationen vorzunehmen, wie wir sie bei der elementaren Gauss'schen Zerlegung für die Matrizelemente zeigten, wobei aber in jedem Block innere und äussere Variable auftreten können. Die einzige grundsätzlich neue Frage betrifft die Wahl der Pivotblöcke, beziehungsweise deren Reihenfolge. Man kann leicht zeigen, dass eine **v o l l s t ä n d i g e A u f l ö s u n g** eines indefiniten Gleichungssystems mit Blockpartition auf Grund diagonalen, blockweiser Pivotsuche im allgemeinen nicht möglich ist; es lassen sich leicht Fälle angeben, wo **j e d e** Blockreihenfolge Variablen liefert, die aus technischen Gründen (wegen der Partition) nicht eliminiert werden können, trotzdem sie keineswegs linear abhängig sind.

(3.066) zeigt ein ganz einfaches Beispiel

1	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1

(3.066)

Im Rahmen der stufenweisen Substrukturlösung ist diese Tatsache kein Anlass zur Besorgnis: nicht eliminierbare Variable werden durch die automatische Hilfslagerung der Substrukturen zu äusseren Variablen undefiniert und können in der nächsthöheren Stufe eliminiert werden. Durch den Kontraktionseffekt der Teilelimination kommen diese Variablen in der höheren Stufe so zu liegen, dass sie - lineare Unabhängigkeit vorausgesetzt - in aller Regel eliminiert werden. In den zahlreichen Beispielen zu dieser Arbeit ist kein einziger Fall aufgetreten, in dem eine eliminierbare Variable aus technischen Gründen mehr als zwei Stufen zu spät eliminiert worden wäre. Voraussetzung zu diesem gutartigen Verhalten ist allerdings ein sachgemässer Einbezug dieser "Hilfslagerungsvariablen" in die Bezifferung des Variablensatzes der übergeordneten Substruktur sowie eine ausreichende Blockgrösse auf allen Stufen. In der höchsten Stufe muss eine vollständige Auflösung stattfinden. Das bedeutet, dass die höchste Stufe keine Partition aufweisen darf: Nur in einem einzelnen Block kann restlose Auflösung garantiert werden. Praktisch führt dies nicht zu einer Beschränkung der Problemgrösse, ist man doch frei, über die Stufe des Tragwerks hinaus Hilfsstufen zu definieren, die nur dem Abbau von Eliminationsrückständen dienen.

Unter diesen Umständen ist es nicht nötig, den Blockalgorithmus mit einer Pivot-Block-Suche zu versehen. Als Hilfsmittel zur Minimierung der Anzahl nichteliminierter Variablen kann ein Suchvorgang verwendet werden, der die Blöcke in der Reihenfolge ihres - echten oder technischen-Rangabfalls wählt. Der zusätzliche Rechenaufwand lohnt sich bei kleinen Substrukturen, die anschliessend mehrfach repetiert werden.

### 3.3 BASAR (Basic Substructure Assembler)

Die numerischen Beispiele zu dieser Arbeit wurden mit Hilfe eines Programms errechnet, das der Verfasser in der Zeit von November 1968 bis August 1970 implementiert und über den RZETH-Satelliten zur CDC - 6400 der FIDES ausgeprüft hat. Die Produktion der Resultate wurde auf dem neuen CDC - 6400/6500 - Zwillingsystem der ETH durchgeführt. Das Programm umfasst in seiner jetzigen Fassung rund 10'000 Fortran-Instruktionen, aufgeteilt in 220 Subroutinen. Die Beschreibung des Programms ist nicht Gegenstand dieser Arbeit. Wir verweisen auf [1], wo neben der Eingabekonvention des Programms eine technische Beschreibung der Programmteile gegeben ist. Im folgenden seien Zweck, Aufgabenstellung für die Programmierung und gegenwärtiger Zustand des Programms kurz zusammengefasst.

Die Umsetzung der dargestellten Theorie in elektronische Rechnung verlangte einen allgemeinen Substrukturassembler mit folgenden Fähigkeiten:

- Aufbau von Substrukturmatrizen aus Elementen auf Grund beliebig definierter Variablengruppen.
- Bildung von Elementen höherer Stufe durch Teil-elimination nach den inneren Variablen; automatische Umordnung nicht eliminierbarer innerer Variablen in eine Gruppe von äusseren Variablen des höheren Elements (automatische Hilfslagerung).
- Rückwärtseinsetzen in Substruktur"bäumen" beliebiger Tiefe und Breite.

Aus praktischen Gründen war die Möglichkeit der Unterbrechung der Rechnung auf jeder Stufe des Strukturaufbaus vorzusehen, bei voller Erhaltung der Information für spätere Fortsetzung, (einschliesslich vollständigem Rückwärtseinsetzen). Das bedeutet, dass die gesamte Informationsmenge von Fig. 3.03 auf einen



permanenten Datenträger gerettet wird. Eine vorteilhafte Nebenwirkung dieser Fähigkeit des Programms ist die Möglichkeit, ohne Programmänderung mit beliebigen Elementmatrizen zu rechnen, indem diese im Format der Zwischenresultate unabhängig erzeugt und eingegeben werden. Auf diese Weise kann BASAR für jede Art von Finite-Element-Analyse verwendet werden; die Lösungsroutinen sind ohnehin auf den allgemeinsten Fall zugeschnitten, der bei linearen Problemen auftreten kann. Die Eingabe konvention wurde auf den Fall vielstufiger, stark repetitiver Substrukturtechnik ausgerichtet; in solchen Fällen ist eine knappe und elegante Problembeschreibung möglich. In anderen Fällen sollte die Eingabe durch Programme erzeugt oder durch Editionsprogramme aus bestehenden Datensätzen herausmodifiziert werden. Die Ausgabe von Resultaten ist grundsätzlich selektiv; die Rekursion wird nur auf jenen Linien des Baumes (Fig. 3.03) ausgeführt, die verlangt werden (siehe 3.031). Für die Gleichgewichts-Scheibenelemente (2) können die Randspannungen direkt graphisch dargestellt werden. Die Resultate von Substrukturen (oder von aussen eingegebenen Elementen) werden in Tabellenform ausgedruckt oder zur Weiterverarbeitung durch Anschlussprogramme bereitgestellt.

Den Qualitätsforderungen an das Programm wurde die folgende Prioritätsordnung zugrundegelegt:

- 1 Allgemeinheit
- 2 Zuverlässigkeit
- 3 Maschinenabhängigkeit und leichte Modifizierbarkeit
- 4 Effektivität

Die Allgemeinheit des Substrukturassemblers wurde möglich durch die Anwendung der Prinzipien von (3.13):

- Baumstrukturen
- Stack-Prinzip

Die Kapazität des Programms (maximale Problemgrösse) hängt nur von der Grösse der sekundären Speichermedien ab. Die Grösse einer einzelnen Substruktur ist auf 1'000 Variable begrenzt. Die Zuverlässigkeit wurde durch ungewöhnlich starke Kontrollen angestrebt. Eingabedaten und innere Zwischenresultate haben immer eine gewisse Redundanz; das Programm ist in 11 weitgehend unabhängige Teile gekammert, die alle eingehenden Informationen vorerst abtesten, unabhängig von deren Herkunft (Zwischenresultate oder äussere Daten). Gegen innere Ueberschreibungen durch Kapazitätsüberschreitungen besteht ein vollständiger Schutz.

Der Maschinenunabhängigkeit dienen folgende Massnahmen: Als Programmiersprache wurde eine eng begrenzte Teilmenge von FORTRAN verwendet, die den ASA-Standarts [35] entspricht und von den Compilern der 3 grossen Computerkonzerne anstandslos verarbeitet wird. Alle maschinenabhängigen Informationen (Wortlänge, Rundungsfehler, I/O-Kanäle etc.) wurden an einer Stelle konzentriert. Input, Output und interne Transporte werden über einen kleinen Satz maschinenabhängiger Unterprogramme abgewickelt, die bei Umstellung auf andere Computer als einzige geändert werden müssten. Es hat sich herausgestellt, dass physikalisches Ueberschreiben auf sekundären Speichermedien (Rewrite in Place) nicht von allen Betriebssystemen oder Fortranversionen heutiger Computer ermöglicht wird. Deshalb wurde die Blockoperation des Eliminationsalgorithmus (im Sinne des konzentrierten Algorithmus, Gauss - Banachiewicz) so organisiert, dass nur zwei Kopien der Substrukturmatrizen an die sekundären Speicher übermittelt werden.

Der Forderung nach leichter Modifizierbarkeit kommt der logisch einfache und modulare Bau des Programms entgegen. Die Ausprüfung von Änderungen an Programmteilen wird durch die inneren Kontrollen an den Zwischenresultaten erleichtert. Wo nicht andere Forderungen entgegenstanden, wurden die Funktionen so weit wie möglich entflichtet; leichter Lesbarkeit wurde Vorrang vor Eleganz und Kürze der Codierung eingeräumt. Alle Teile des Programms sind mit Kommentaren versehen.

Die Effektivität der Operation hängt fast ausschliesslich vom Eliminationsprozess ab; auf diesen konzentrierten sich bisher alle Anstrengungen zur Optimierung:

- Die Pivotsuche innerhalb der Blöcke und der Pivot-austausch wurden so organisiert, dass die natürliche Reihenfolge der Elemente möglichst wenig durcheinandergeschüttelt wird. Die Operationen wurden so programmiert, dass ein guter Fortran-Compiler in der Lage ist, die verbleibenden Abschnitte natürlicher Reihenfolge ausnützen (Adresseninkrementierung anstelle expliziter Adressenberechnung). Bei ungestörter Reihenfolge werden zudem automatisch schnellere Routinen verwendet.
- Die Blocktransporte bei der Elimination werden parallel mit der arithmetischen Operation ausgeführt.

Im Zeitpunkt der Drucklegung dieser Arbeit hat BASAR 4 Monate fehlerfreie Operation hinter sich; es kann im Bereich der Beispiele (4) als voll operationell bezeichnet werden.

## 4. Anwendungen

Ausgangspunkt dieser Arbeit waren ursprünglich zwei Fragestellungen aus dem Stahlbrückenbau. Gesucht waren

- eine Abschätzung für die Grösse der Torsionslängsspannungen (Wölbspennungen) an Kasten-trägern mit einer fachwerkförmigen Scheibe (Windverband)
- Aussagen über die Zuverlässigkeit von Trägerrost-näherungen bei der statischen Berechnung ortho-troper Platten mit exzentrischem Deckblech.

Die erste Frage konnte in (4.3) für den praktisch interessan-ten Bereich beantwortet werden. Die zweite Frage ergab sich aus einer früheren Arbeit des Verfassers <sup>1</sup>. Sie ist in (4.4) an einem Beispiel geprüft worden; für eine abschliessende Antwort wären hier weitere Untersuchungen notwendig.

Neben diesen Hauptfragen dienen die Beispiele zur Prüfung der Arbeitshypothese des ersten Abschnitts dieser Arbeit, ist doch die behauptete besondere Eignung von G l e i c h - g e w i c h t s e l e m e n t e n für den Bauingenieur bis-her nicht geprüft worden; mit Ausnahme der früheren Schub-feldansätze der Flugzeugstatik sind dem Verfasser keine Finite - Element - Gleichgewichtsmethoden für zusamme-gesetzte kontinuierliche Tragwerke bekannt, die bis zur prak-tischen Brauchbarkeit entwickelt worden wären. Den praktischen Beispielen gingen selbstverständlich Testbeispiele für die

<sup>1</sup> TINY; ein Programm für die Bestimmung von Einflussflächen für die Querträgermomente prismatischer Trägerroste mit seitlichen Auskragungen. Institut für Baustatik und Stahlbau ETH, 1965 (unveröffent-licht).

richtige Funktion der Programme voraus. Die grundsätzliche Eignung des Elementansatzes (2.002) für die Lösung der Bipotentialgleichung musste dagegen nicht mehr geprüft werden. Seit 1968 sind neben der Arbeit [6] des Verfassers mindestens 6 Veröffentlichungen mit vielen Beispielen zu diesem Thema erschienen [7, 8, 10, 12, 13, 14]. A n d e r h e g g e n hat in [43] - neben anderen Programmen - zwei FORTRAN - Subroutinen für die Bestimmung von Elementmatrizen aus diesem Ansatz angegeben. Diese Unterprogramme sind als Grundlage für die Scheibenelemente zu den Beispielen verwendet worden. Sie haben sich als schnell und richtig erwiesen; Vergleiche der Elementmatrizen mit jenen aus dem ALGOL - Programm zu [6] ergaben Uebereinstimmung in allen 8 ausgedruckten Stellen. Weitere Tests in Verbindung mit der Transformation auf Kraftvariable (4.11, 4.12) bestätigen die numerische Präzision. Der Verfasser dankt an dieser Stelle Dr. E. Anderheggen für seine sorgfältige Arbeit und die Ueberlassung des Kartendecks.

Eine allgemeine Bemerkung zur Präzision der numerischen Rechnung sei hier angebracht. Die Eingangsdaten und die Resultate aller Beispiele dieser Arbeit sind 2½ bis dreistellige Zahlen; an den Endresultaten werden mehr als 3 Stellen nur ausnahmsweise wiedergegeben, wenn gezeigt werden soll, dass die Rechnung bereits "zu genau" ist. Wir halten uns dabei an das G a u s s ' sche Wort, wonach sich der Mangel an mathematischer Bildung durch nichts so auffallend zu erkennen gebe wie durch masslose Schärfe im Zahlenrechnen.

Daraus darf nun k e i n e s f a l l s geschlossen werden, die Rechnung selbst könne mit so kleiner Stellenzahl abgewickelt werden. Im Verlaufe umfangreicher numerischer Prozesse können sehr grosse Verschiebungen an der Anzahl der bedeutsamen Ziffern auftreten. Ein banales Modell für einen solchen Vorgang ist die Addition vieler positiver, ungenauer Zahlen, deren Fehler normal verteilt vorausgesetzt seien. Dann steigt der mittlere Fehler an der Summe mit

der **W u r z e l** aus der Zahl der **Summanden**. Sei z.B. die Grössenordnung der (positiven) **Summanden** 1., der mittlere Fehler der einzelnen Zahl .01 und die Zahl der **Summanden** 10000. Der mittlere Fehler an der **Summe** ist

$$m_s = 0.01 * \sqrt{10^4} = 1. :$$

und die **Summe** hat vier bedeutsame Ziffern, gegenüber 2 bei den **Summanden**. Aus der Erfahrung mit Rechnern verschiedener **Stellenzahl** lässt sich indirekt schliessen, dass an **statischen Berechnungen** im Bereich von  $N = 5000$  Unbekannten bereits eine Verschiebung der relativen Genauigkeit um mehr als 5 Zehnerpotenzen möglich ist. Weil die gewonnen Genauigkeit an den "differentiellen" **Endresultaten** (Spannungen) durch kleine Differenzen grosser Zahlen wieder verloren geht, entscheidet die **Stellenzahl** des eingesetzten Rechners darüber, ob man überhaupt **Resultate** bekommt.

Die nominelle **Problemgrösse** des letzten Beispiels (4.4) war durch die Anwendung eines repetitiven **Substrukturaufbaus** mit total 9 Stufen höher als 50000. Da sich keine **Anzeichen numerischen Versagens** zeigten, darf angenommen werden, dass das vorgeschlagene **Verfahren** in Verbindung mit der 15-stelligen **Arithmetik** der CDC - 6000 in praktisch genügend weiten Grenzen **numerisch brauchbar** ist. **Einschränkend** muss dazu allerdings gesagt werden, dass über die **Auswirkung** der vielen **Repetitionen** auf die **Rundungsfehler** nichts bekannt ist. Es ist denkbar, dass bei **unregelmässigen Tragwerken** eine **ungünstigere Situation** vorliegt.

## 4.1 Präzisionstests

### 4.11 Das allgemeine Viereckselement

Alle Beispiele dieser Arbeit stützen sich auf ein allgemeines Vierecks-"Scheibenstück" nach der Theorie in (2.1). Die Spannungsfunktion im Inneren wird über vier Dreieckselemente mit gemeinsamer Spitze im Flächenschwerpunkt durch die Ansatzfunktion (2.002) aufgespannt. Auf dem äusseren Rand wird auf Kraftgrössen (2.018) transformiert. Für die Schubspannung ist sowohl der quadratische Verlauf (2.018a) wie der allgemeine kubische Ansatz (2.018) ausgeprüft worden; der zweite ist allerdings ausser in den kleinen Beispielen 4.12 und 4.14 nie zur Verwendung gelangt.

Für eine ausgedehntere Verwendung des Verfahrens an u n r e - g e l m ä s s i g e n Tragwerken wäre es vom Standpunkt der Rechenkosten empfehlenswert, aus den Dreiecks- und Viereckselementen von [43] weitere, grössere Scheibenstücke aufzubauen; wie wir zeigten, sollte der Uebergang zu Kraftgrössen an den Rändern einfach zusammenhängender, aber möglichst grosser Scheibenstücke vorgenommen werden. Im Rahmen der hier dargestellten Beispiele war dieser Gesichtspunkt nicht massgebend, weil ausnahmslos vielstufige repetitive Substrukturtechnik angewendet wurde.

Zur Prüfung der numerischen Präzision wurden verschiedene Formen des allgemeinen Vierecks in ein lineares, integrierbares Spannungsfeld

$$\begin{aligned}\sigma_x &= c_2 + c_3 x + d_3 y \\ \sigma_y &= a_2 + a_3 x + b_3 y \\ \tau_{xy} &= -b_2 - b_3 x - c_3 y\end{aligned}\tag{4.001}$$

mit den zugeordneten Verschiebungen

$$\begin{aligned}
 u(x,y) = \frac{1}{E} & \left[ (c_2 - \nu a_2) x - (1 + \nu) b_2 y \right. \\
 & + (c_3 - \nu a_3) \frac{x^2}{2} \\
 & + (d_3 - \nu b_3) xy \\
 & \left. - ((2 + \nu) c_3 + a_3) \frac{y^2}{2} \right] \\
 & + u_0 + \omega y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(x,y) = \frac{1}{E} & \left[ (a_2 - \nu c_2) y - (1 + \nu) b_2 x \right. \\
 & + (b_3 - \nu d_3) \frac{y^2}{2} \\
 & + (a_3 - \nu c_3) xy \\
 & \left. - ((2 + \nu) b_3 + d_3) \frac{x^2}{2} \right] \\
 & + v_0 - \omega x
 \end{aligned}$$

(4.002)

eingebettet, dem das Element exakt folgen sollte. Weil die Multiplikatorvariablen speziell als Verschiebungsgrößen zu Normalkraft, Querkraft und Moment einer Seite gewählt waren, konnten in (2.023) die  $v_E$  einerseits mit (2.024) direkt aus dem Verschiebungsfeld bestimmt, andererseits aus der rechten Seite gebildet werden. Die Polynome von höchstens 5. Grad in (2.024) wurden durch die numerische Integrationsformel von Cotes mit den äquidistanten Stützwerten

$$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$$

ohne Approximationsfehler ausgewertet.



Der Test wurde durch Z i e h e n v o n Z u f a l l s - z a h l e n für die Koordination der Eckpunkte des Vierecks und die Koeffizienten des elastischen Felds automatisch über eine grosse Zahl von Beispielen erstreckt. Als Fehlermass wurde die relative Länge des Residienvektors in (2.035) eingeführt. Sie lag - mit rund 14.5-stelliger Arithmetik - bei  $10^{-12}$  für quadratähnliche Formen und erreichte  $10^{-10}$  bei einer extremen Form mit einem Streckungsverhältnis am spitzesten Teildreieck von

$$\frac{\text{Umkreisradius}}{\text{Inkreisradius}} \sim 20$$

Der Stellenverlust von  $2\sqrt{2}$  dezimalen Stellen in normalen Fällen deutet darauf hin, dass die Interpolation über allgemeine Dreiecksbereiche mit Polynomen höheren als 5. Grades numerische Klippen haben könnte.

#### 4.12 Hoher Biegeträger

Ein Biegeträger von gedrungener Form (Fig. 4.01) und rechteckigem Querschnitt mit gleichmässig verteilter Belastung und Balkenlagerung hat - bei entsprechender Verteilung der Reaktionen über die Endquerschnitte - die ebene Spannungsverteilung [42].

$$\sigma_x = -\frac{3P}{4c^3} \left( x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{3P}{4c^3} \left( \frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \quad (4.003)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3P}{4c^3} (c^2 - y^2) x$$

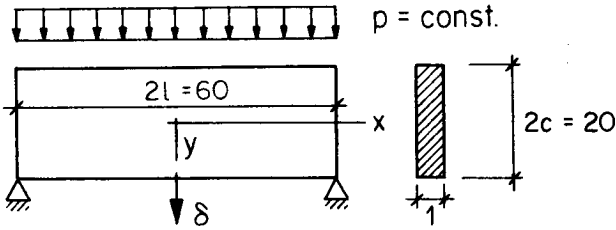
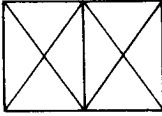
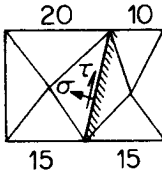


Fig. 4.01

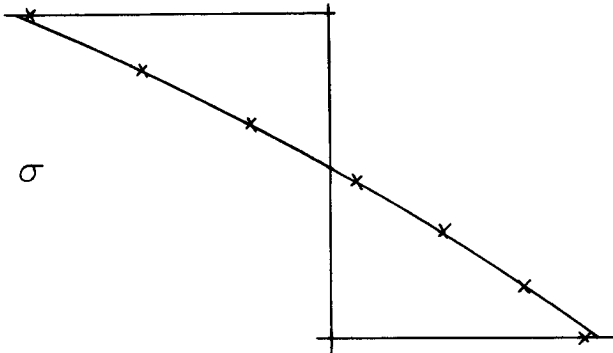


Rechtwinklige Teilung  
(exakt bis auf Rundungsfehler)

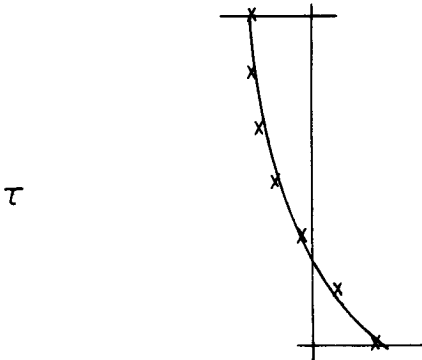


Schiefe Teilung, quadr. Schub

$\delta = 3.15230$  num.  
 $3.15225$  exakt



Num. x	Theorie
-5.72	-5.89
-3.53	-3.48
-1.47	-1.40
0.41	0.41
2.11	2.02
3.57	3.51
4.77	4.95



-1.18	-1.22
-1.18	-1.08
-1.02	-0.94
-0.71	-0.71
-0.23	-0.32
+0.40	0.31
1.19	1.24

Die Spannungen sind vom 3. Grad in  $x, y$  und werden durch den Elementansatz (2.1) unabhängig von der Netzteilung (im Rahmen der Rechengenauigkeit) e x a k t wiedergegeben, ebenso die Verschiebungen, wobei natürlich deren Definition (2.11) zu beachten ist.

Elemente mit quadratischem Schubspannungsansatz und rechteckiger Form sind ebenfalls in der Lage, dem Spannungsfeld (4.001) exakt zu folgen; bei allgemeiner Teilung und quadratischer Schubspannung muss dagegen ein Diskretisationsfehler entstehen. Fig. (4.01) zeigt die Verhältnisse im schiefen Schnitt zwischen den allgemeinen Viereckselementen.

#### 4.13 Durchlaufender Plattenbalken

Statisches System, Abmessungen, Randbedingungen, sowie die untersuchten Diskretisationen des Balkens gehen aus Fig. 4.02 hervor. Aus Symmetriegründen genügt es, einen Viertel eines Feldes in die Rechnung einzubeziehen. Der Steg wurde in allen Fällen ausser C durch Stabelemente (2.4) dargestellt.

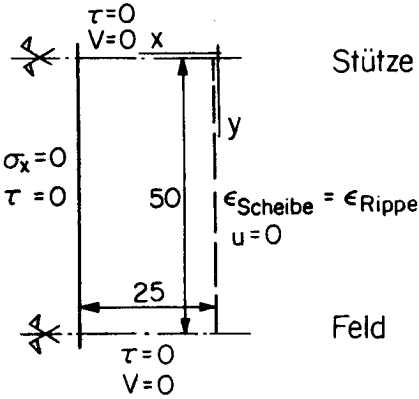
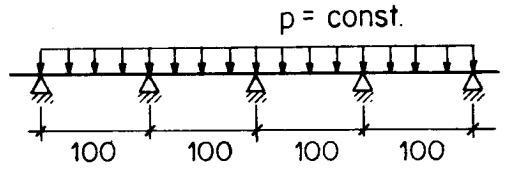
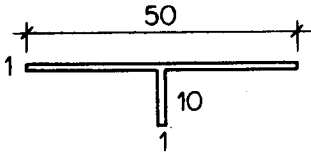
Die Vergleichswerte wurden aus der Fourierreihenlösung von Metzger [41] für diesen Fall gewonnen. Man beachte, dass die Lösung - im Gegensatz zur üblichen Annahme im Bauwesen - für  $\tau = 0$  im Gurtquerschnitt über der Stütze gilt. Die Stütze wirkt somit wie eine Einzellast auf den Querschnitt ohne Querscheibe. Eine solche Singularität ist numerisch in jedem Falle mühsam zu erfassen; bei der Fourierreihenlösung waren 100 Glieder mitzunehmen, um im Einspannungsquerschnitt Konvergenz auf 3 Stellen herbeizuführen. In der Finite-Element-Lösung müssen an solchen Stellen unbedingt die lokalen Ueberkontinuitätsbedingungen berücksichtigt werden:

Die Dehnung der Rippe muss jener der Gurtung entsprechen

$$\sigma_r = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad (4.004)$$

ohne diese Bedingung würde - bei der Einspannung - erst eine ausserordentlich feine Diskretisation eine ausreichende Näherung liefern. Tab. (4.03) zeigt die Spannungen am Uebergang vom Steg zum Flansch für die Feldmitte und den Einspannquerschnitt. Bei den Teilungen D, E, F ist (4.004) exakt eingeführt worden, bei A, B, C dagegen nicht.

Fig. 4.06 zeigt schliesslich Einzelheiten der Spannungsbilder für die Plattenbalken - Substruktur, die als Ausgangspunkt zu Beispiel 4.4 diene. Statisches System und Belastungen für den Test entsprechen Fig. 4.02. Auch hier wurden die Vergleichswerte nach [41] bestimmt. Nicht aufgezeichnete Spannungen - insbesondere jene im Feldquerschnitt - stimmen innerhalb der Zeichengenauigkeit mit der Reihenlösung überein. Die maximale Blechspannung im Feld ist z.B. - 0.8600 (Reihenlösung - 0.8591). Die massgebende Spannung in der Rippenoberkante bei der Einspannung ist  $\sigma_r = 3.51$  (Reihenlösung 3.42); die Abweichung beträgt 2.6 %. Da an der orthotropen Platte (4.4) weniger starke Spannungsgradienten auftreten, können dort im Maximum dieselben Fehler erwartet werden.



Stütze

Durchlaufender Platten -  
balken

Fig. 4.02

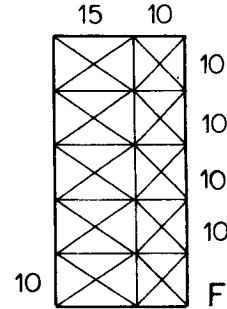
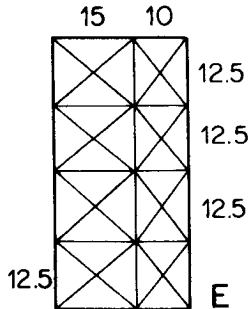
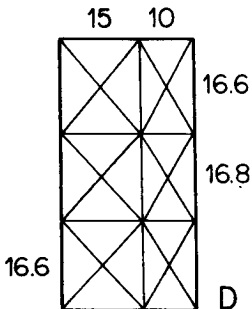
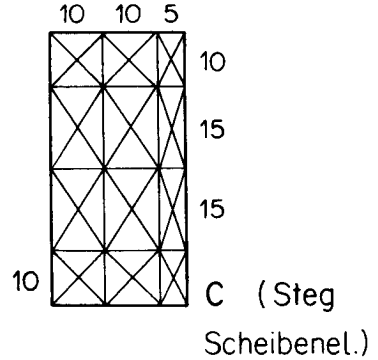
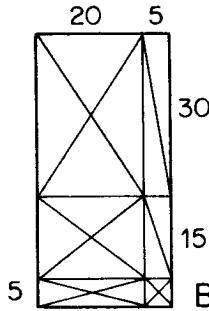
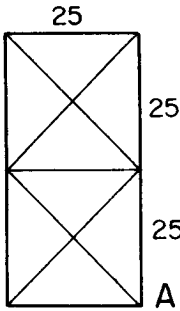


Tabelle 4.03	Durchlaufender Plattenbalken Feldquerschnitt				Spannungen an der Stegoberkante Einspannungsquerschnitt			
	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_T$	$\sigma_y - \nu \sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_T$	$\sigma_y - \nu \sigma_x$
A	-2.67	0.84	-2.36	-2.92	5.8	-1.59	15.2	6.3
B	-2.51	0.76	-2.71	-2.74	8.9	-2.18	11.5	9.5
C	-2.51	0.74	-2.69	-2.73	7.7	-1.96	13.3	8.3
Teilung								
D	-2.42	0.77	-2.65	exakt	11.5	-1.37	11.9	exakt
E	-2.50	0.74	-2.73	= $\sigma_T$	10.84	-1.57	11.31	= $\sigma_T$
F	-2.5132	0.7434	-2.7362	durch Ueberschnitt- nutzt	10.51	-1.76	11.04	durch Ueberschnitt- nutzt
Fourier - Reihenlösung (100 Glieder)	-2.5134	0.7422	-2.7361		10.13	-2.42	10.86	

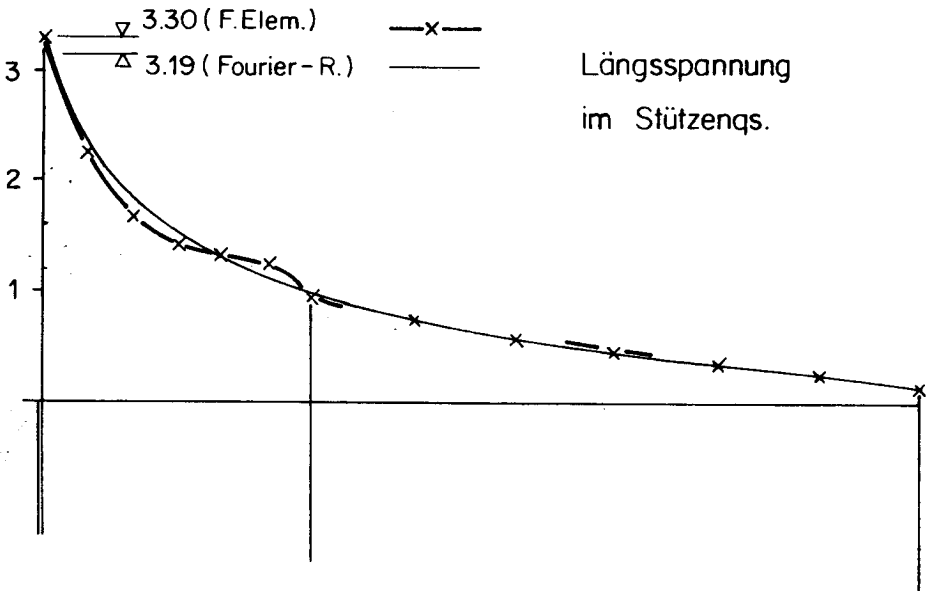
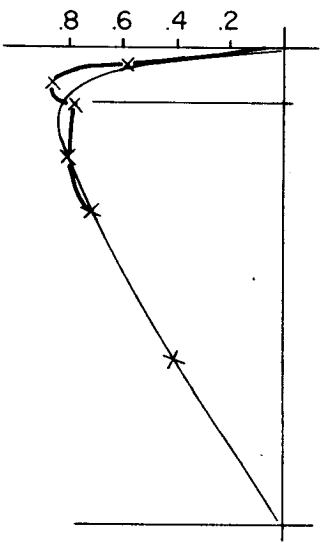


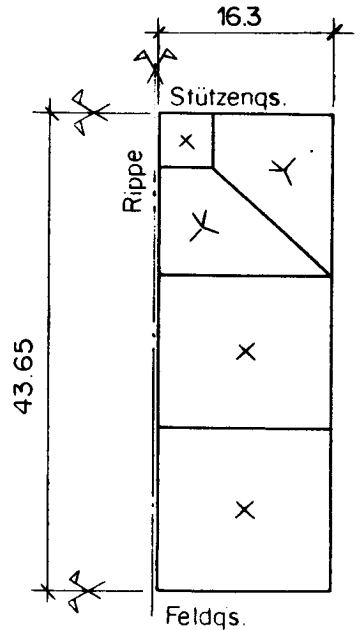
Fig. 4.06

Plattenbalken - Substruktur zu 4.4

(Einzeltest)



— Fourier - R.    —x— Fin. El.



#### 4.14 Gedrungener Stab starker Krümmung

Die Diskretisation gekrümmter Gebilde durch geradlinig begrenzte Elemente bedingt neben der Näherung für die Feldgrößen eine **D i s k r e t i s a t i o n d e s G e b i e t e s** . Mit Deformationsansätzen sind solche Näherungen üblich; die Resultate werden zwar ungenauer, fallen aber nicht aus dem Rahmen.

Gleichgewichtselemente sind in dieser Hinsicht weniger geeignet, indem die Randbedingungen an den **E c k e n** , welche durch **D i s k r e t i s a t i o n e n t s t e h e n** , eine Sonderbehandlung verlangen:

Routinemässiges Nullsetzen aller Randspannungen freier Ränder liefert an solchen Ecken einen homogenen Nullspannungszustand, der auch bei beliebiger Netzverfeinerung die Randfasern an der Mitwirkung hindert.

Als mögliche Auswege wurden drei Möglichkeiten für die Definition der Spannungs - Randbedingungen an solchen "Diskretisationsecken" geprüft:



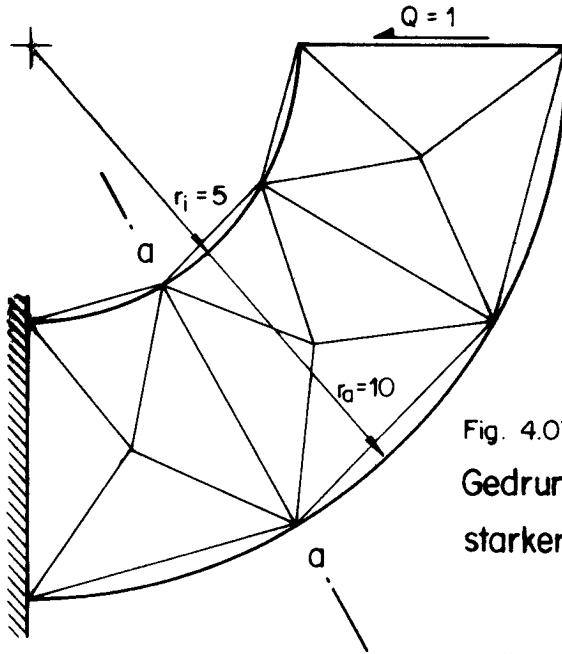


Fig. 4.07

Gedrungener Stab  
starker Krümmung

Randbedingungen an Ecken infolge Gebietsdiskretisation	Schnitt a-a		
	$\sigma_i$	$\sigma_a$	$\tau_{max}$
Keine besonderen Massnahmen ( $\sigma_i = \sigma_{min}$ , $\sigma_a = \sigma_{max}$ )	(-0.828)	(0.649)	0.075
Einachsiger Spannungszustand (I)	-1.001	1.205	0.075
Hydrostatischer Spz. (II)			
$\tau$ quadratisch	-0.844	0.538	0.075
$\tau$ kubisch	-0.860	0.511	
Schubeinspannung (III)	-0.969	0.431	0.159
Exakte Lösung	-1.116	0.558	0.078

- (I) Voraussetzung einachsigen Spannungszustands in der Richtung der Randtangenten vor der Gebietsdiskretisation
- (II) Voraussetzung eines hydrostatischen Spannungszustands
- (III) Voraussetzung einer örtlichen Schubeinspannung in radialer und in Randrichtung des diskretisierten Gebiets.

Annahmen dieser Art sind durch ihre Willkürlichkeit der Finite-Element-Technik (in der neueren Auffassung als Variante des Ritz'schen Verfahrens) durchaus fremd. Die Resultate eines Beispiels (Fig. 4.07) zeigen zudem, dass die erzielte Näherung in Anbetracht des einfachen Problems und der relativ hohen Ordnung des Elementansatzes ungenügend ist<sup>1</sup>. Zur Behandlung solcher Fälle sollten Scheibenelemente mit gekrümmten Rändern und stetigem Uebergang der Gebietstangenten des diskretisierten Gebiets entwickelt werden.

## 4.2 Bauteile

### 4.21 Eine Rahmenecke

In [40] hat Dubas mit Hilfe des Knotenlastverfahrens<sup>2</sup> ein Spannungsproblem an einer Rahmenecke aus einem Stockwerkrahmen untersucht. Da die Lösung in Handrechnung bestimmt wurde, konnte nur ein kurzer Ansatzbereich der angeschlossenen Stäbe in die Rechnung einbezogen werden; im Prinzip wurde angenommen, dass in den Stäben die Längsspannungen bis an den Rand der Rahmenecke linear verteilt seien. Auf Grund des

<sup>1</sup> Exakte Lösung nach [42]

<sup>2</sup> Ein Mehrstellen-Differenzenverfahren der Fehlerordnung 4; vgl. 2.008

St. Venant'schen Prinzips sollte natürlich diese Annahme erst in einigem Abstand von der Stabkreuzung getroffen werden.

Mit Hilfe der Gleichgewichtselemente von Abschnitt (2) wurde die Anordnung von Fig. 4.21 in einer groben und einer feinen Teilung untersucht. Im Falle der feinen Teilung wurden alle Ueberkontinuitätsbedingungen zwischen Scheiben und Flanschen berücksichtigt, mit Ausnahme jener an den einspringenden Ecken. Hier liegt eine Besonderheit vor (Fig. 4.22), indem die gewählte Idealisierung für  $\nu \neq 0$  einen eigentlichen Widerspruch hervorbringt:

Weil die Flanschen biegeweich vorausgesetzt sind, geht die Flanschspannung  $\sigma_r$  stetig durch den Knoten. Im Aeusseren der Rahmenecke herrscht ein Spannungszustand ohne Normalspannung quer zum Rand. Eine Gleichgewichtsbedingung in einer infinitesimalen Umgebung der einspringenden Ecke liefert somit

$$\sigma = \sigma_i$$

und die Kontinuität zwischen Flansch und Blech im Aeusseren verlangt

$$\sigma = \sigma_r$$

Andererseits hat man im Innern die Kontinuitätsbedingung

$$\sigma_r = \sigma_i (1 - \nu^2)$$

mit  $\nu=0.3$  also z.B.

$$\sigma_i = 1.43 \sigma_r$$

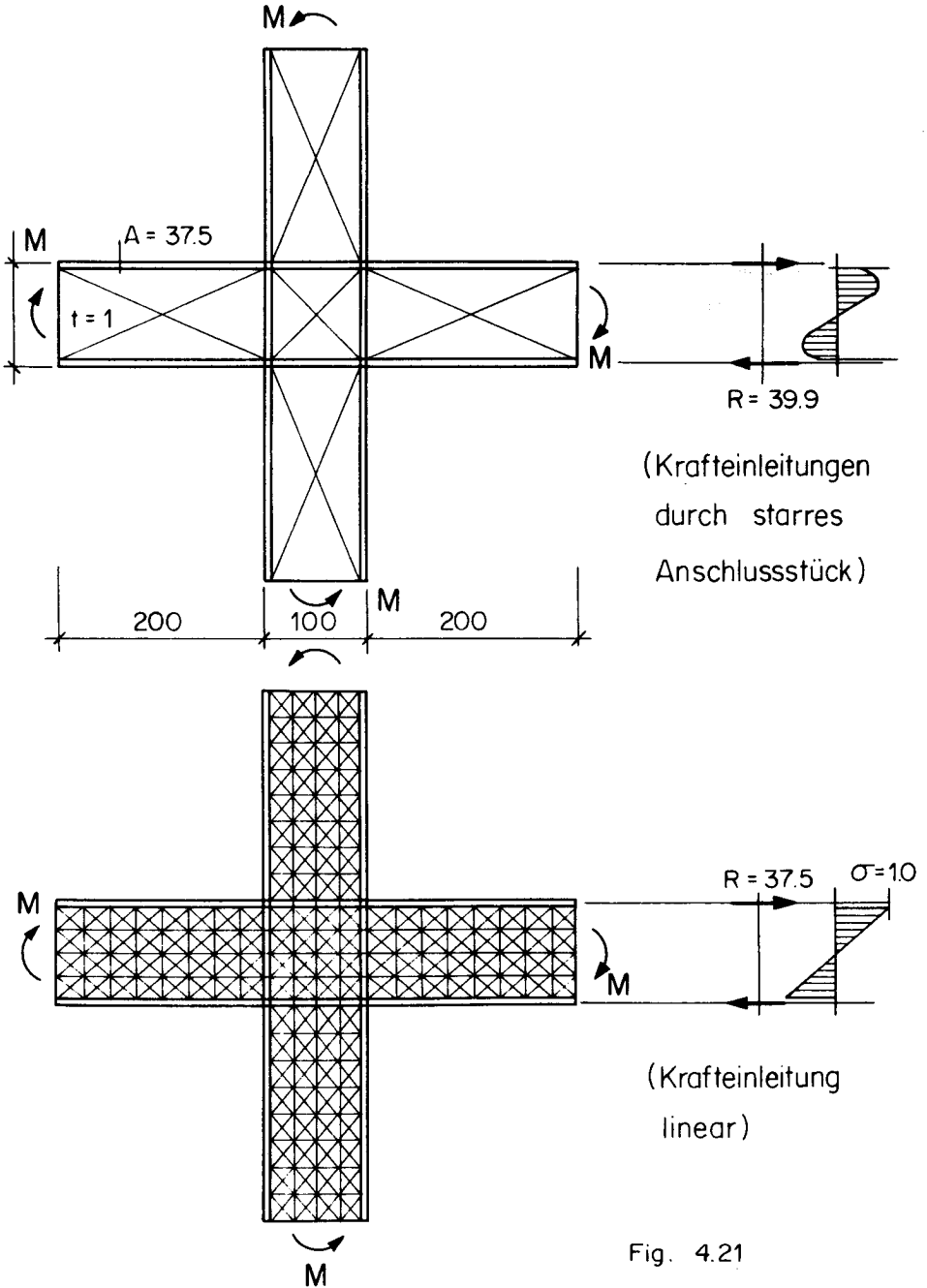


Fig. 4.21

Unser mechanisches Modell wird sich dem Widerspruch (in einer exakten analytischen Lösung) dadurch entziehen, dass die Schubspannungen im Eckbereich sehr hohe Werte annehmen. Die wirkliche Rahmenecke wird sich an diesen Punkten auf Grund des räumlichen Spannungszustands und der Möglichkeit des Spannungsabbaus durch lokales Fliessen anders verhalten; eine Voraussage ist schon deshalb aussichtslos, weil der betrachtete Punkt an einer Kreuzungsstelle mehrerer Schweissnähte liegt.

Die Resultate für die beiden Näherungen zeigt Fig. (4.23). Die Querkontraktionszahl ist zu  $\nu=0.3$  angenommen; die Resultate der feinen Teilung zeigen, dass der lokale Verträglichkeitswiderspruch an der einspringenden Ecke gross ist und mit der Feinerteilung sogar zunimmt, ist doch  $1.43\sigma_T = 1.63$  (gegen  $\sigma_i=0.811$  ).

Alle Spannungen sind ungeglättet aufgetragen; die Ueberkontinuitätsbedingungen gewährleisten zwar die Stetigkeit der Normalspannungen auch in Querrichtung, nicht aber deren glatten Verlauf.

In der Praxis des Stahlbaus<sup>1</sup> wird der Bemessung von Bauteilen aus Stahl unter statischer Belastung die Vergleichsspannung

$$\sigma_g = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

zugrundegelegt; ( $\sigma_g$  = einachsige Fliessspannung ist die von Mises'sche Fliessbedingung). Die Spannungen in rechteckigen Rahmenecken werden in der Praxis auf Grund eines sehr einfachen Gleichgewichtsmodells bestimmt, welches auf folgenden Annahmen beruht [40]:

<sup>1</sup> SIA-Norm 161

- Die Schubspannungen am Rande des Blechs der Rahmenecke sind konstant
- die zusätzlichen Schubspannungen aus den Längsspannungen der Trägerstege sind parabolisch verteilt.

Diese Annahme liefert hier als massgebende Stelle die Mitte der Rahmenecke, mit einer Vergleichsspannung

$$\sigma_{g0} = 2.60$$

Als nächste Näherung kann die Rechnung von Dubas [40] betrachtet werden; in Anbetracht der hohen Präzision des Knotenlastverfahrens ist auch dieses Modell praktisch ein Gleichgewichtsmodell; die Restkräfte im Sinne von (1.21) liegen nach Kontrollen unterhalb der Rechenschiebergengenauigkeit. Dagegen ist die Verträglichkeit gegenüber den angeschlossenen Trägern in Normalrichtung ganz ausser acht gelassen worden. Auch hier ist die massgebende Stelle die Mitte, mit

$$\sigma_{g1} = 2.48$$

Die grobe Diskretisation von Fig. 4.21 liefert

$$\sigma_{g2} = 2.32$$

und die feine Teilung mit Berücksichtigung von Ueberkontinuitätsbedingungen

$$\sigma_{g3} = 2.30$$

In beiden Fällen war auch hier die Schubspannung in der Mitte massgebend; bei der feinen Teilung erreicht die Vergleichsspan-

nung an den einspringenden Ecken aber bereits den Betrag

$$\sigma_{gE} = 2.25$$

Aus dem Verlauf der Schubspannungen im Schnitt a - a (Fig. 4.23b) und aus den vorangehenden Ueberlegungen zur Kontinuität in diesem Bereich folgt sofort, dass jede weitere Verfeinerung der Diskretisation die Ecke als massgebend erbringen würde, und dass die Vergleichsspannung (bei unverändertem mechanischem Modell) beliebig hoch gesteigert werden kann. Das heisst mit anderen Worten, dass an unserem mechanischen Modell unter Einschluss von Plastizität ein elastoplastischer Spannungsausgleich schon unter der Gebrauchslast eintritt, nach der das Blech auf Grund der praktisch üblichen Annahmen mit  $\sigma_{g0}$  bemessen wurde. Diese Tatsache ist als "Schlauheit des Materials" altbekannt und wohl ein Hauptgrund dafür, dass es überhaupt Stahl- (und Massiv-) bauten gibt, die noch nicht eingestürzt sind.

Das Beispiel liefert eine ermutigende Bestätigung der Arbeitshypothese des ersten Abschnitts dieser Arbeit. Es zeigt sich, dass schon die grösste Näherung ein Gleichgewichtsmodell ist, das - unter weiterhin bewusster Inanspruchnahme jener "Schlauheit des Materials" - eine bessere Materialausnützung erlaubt, als die üblichen Handnäherungen. Es ist selbstverständlich nicht der Sinn des vorgeschlagenen Verfahrens, solche einfache Fälle elektronisch zu rechnen; es gibt aber Bauteile des Stahlbaus mit allgemeineren Formen, welche die Auffindung geeigneter Gleichgewichtsmodelle von Hand kaum gestatten, die aber den hier entwickelten Elementen ohne weiteres zugänglich sind.

In (2.12) wurde auf den hohen Preis - in Variablen gemessen - hingewiesen, der für Gleichgewichtsmodelle im Vergleich zu verträglichen Elementen zu erbringen ist.

Dieser - in Verbindung mit der notwendigen Auflösung nicht-definierter Gleichungssysteme - hat bisher eine eingehende Prüfung der Gleichgewichtselemente verhindert. Nun ist zu bedenken, dass die Zählung der Variablen nach (2.12) auf den Fall der Spannungsanalyse ausgerichtet ist, wo die Elementteilung so weit getrieben wird, bis eine Annäherung an die exakte Lösung des mechanischen Modells mit elastischem Material erreicht wird.

Solche Lösungen sind für den Bauingenieur wertlos. Wenn aber eine grobe Teilung ausreicht, kann ein Methodenvergleich nur auf Grund direkter Gegenüberstellung durchgerechneter Beispiele im Lichte der praktischen Brauchbarkeit und der Rechenkosten stichhaltig sein.



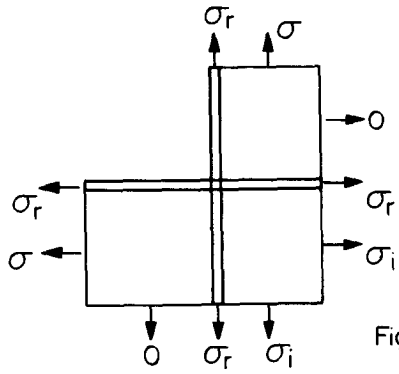
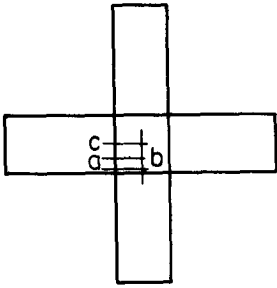


Fig. 4.22

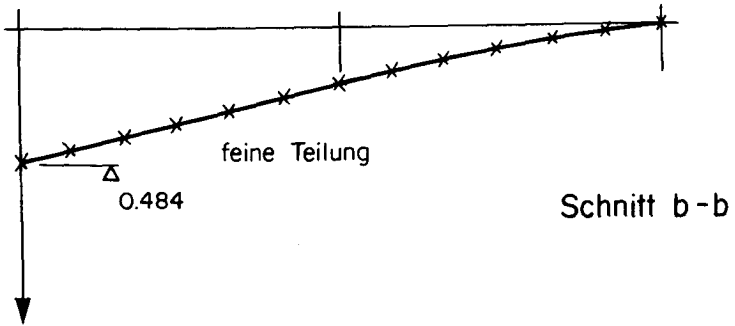
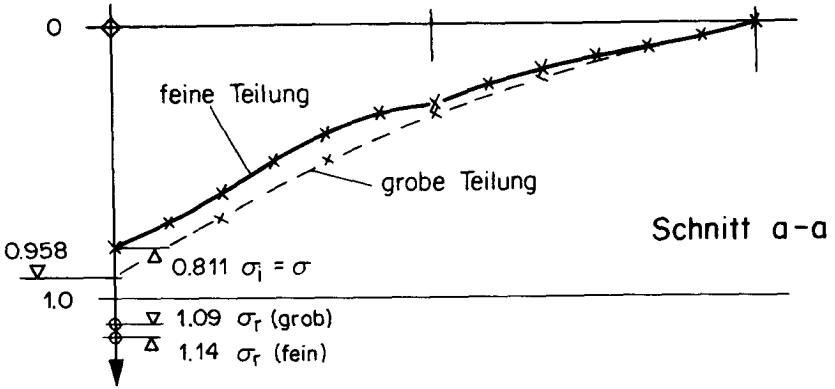
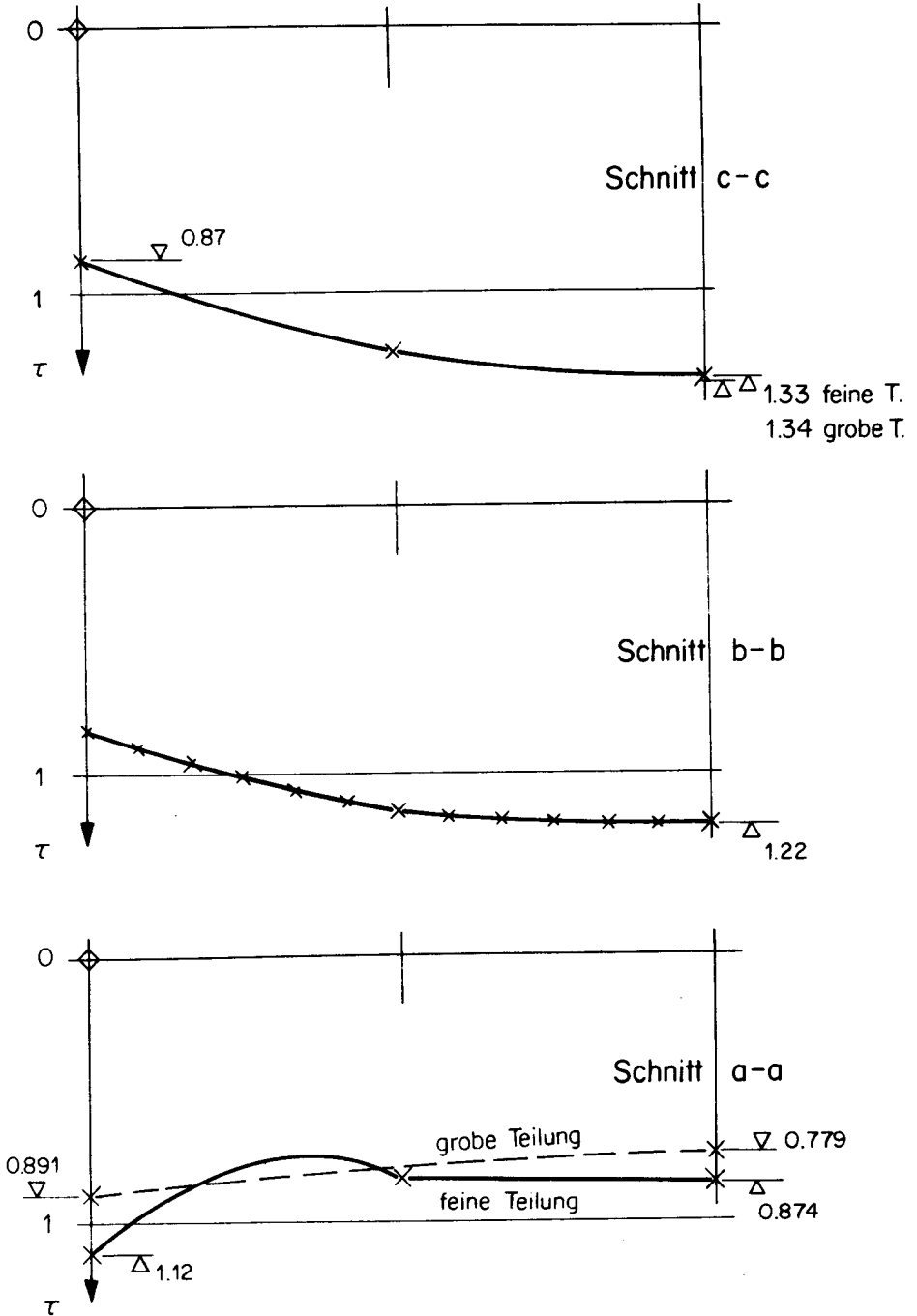


Fig. 4.23a

Normalspannungen

Fig. 4.23b Schubspannungen



#### 4.22 Untersuchung der Spannungen im Stützenbereich eines durchlaufenden Brückenhauptträgers

Es wurde ein Detail am Hauptträger des "Pont de la Madeleine" der N12 über die Saane bei Fribourg untersucht. Eine allgemeine technische Beschreibung dieses Verbundtragwerkes ist in [36] zu finden.

Aus den Konstruktionsplänen wurde das mechanische Modell von Fig. (4.25, 4.26) für den Stützenbereich des Hauptträgers mit Pfeilerquerscheibe abstrahiert. Es wurde ein Lastfall untersucht, der im Quersinn der Brücke symmetrisch ist. Die Wirkung der Fahrbahnplatte ist mit den Näherungen berücksichtigt, die auch der normalen statischen Berechnung zugrundeliegen. Insbesondere wurde starrer Verbund vorausgesetzt, der wirksame Modul des Betons mit  $n = 5$  angenommen und die Fahrbahn als biegesteifes Stabelement eingeführt.

Die Wirkung des rautenförmigen Windverbandes in der Untergurtebene wird vernachlässigt. Eine Ueberlegung mit Kraftmethode zeigt, dass der Beitrag  $Q$  des Verbandes zur Kraft in der Untergurtebene (Fig. 4.27)

$$|Q| < \frac{48Z}{Al^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} 2|P|$$

Mit

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = 0.69 \quad l = 712 \text{ cm} \quad A = 425 \text{ cm}^2$$
$$Z = 25.6 * 10^3 \text{ cm}^4$$

ist

$$\frac{|Q|}{2|P|} < 0.0083$$

Die kastenförmigen Beulsteifen wurden durch Flanschen gleicher Fläche ersetzt.

Die Schnittkräfte am Rande des untersuchten Teilbereichs wurden der normalen statischen Berechnung (als Stab mit variablem Trägheitsmoment) entnommen.

Einzelheiten der Diskretisation gehen aus Fig. (4.26) hervor. Der Hauptträger wurde auf einer Länge bis zu den ersten vertikalen Hauptbeulsteifen beiderseits der Stütze in die Rechnung einbezogen und in 6 Substrukturen unterteilt. Eine weitere Substruktur beschreibt die Hälfte der Querscheibe über dem Pfeiler. Pro Substruktur wurde nach ca. 500 inneren Variablen aufgelöst; die effektive Problemgrösse war 2000, die nominelle 3500. Selbstverständlich wäre eine zuverlässige Lösung der Aufgabe mit viel kleinerem Aufwand möglich; darauf wurde in diesem Fall verzichtet, um erste numerische Erfahrungen mit Problemen einer praktischen Grössenordnung an einem leicht überschaubaren Beispiel zu sammeln. Auch die numerisch ungünstige Lagerung als Kragarm (Fig. 4.25) wurde aus diesem Grunde gewählt. Ueber die numerischen Erfahrung wird zusammenfassend in (4.4) berichtet.

Fig. 4.28 zeigt die horizontalen Spannungen in einem Schnitt in kleinem Abstand von der Stütze. In der Darstellung ist der Unterschied zwischen den Blechspannungen und den Flanschspannungen zu beachten: Die eingeführten Uebergangsbedingungen berücksichtigen neben den Gleichgewichtsbedingungen durch die Elementränder zusätzlich die Ueberkontinuitätsbedingungen (Fig. 4.29)

$$\begin{aligned} E\epsilon_r &= \sigma_{x0} - \nu\sigma_{y0} \\ &= \sigma_{xu} - \nu\sigma_{yu} \\ &= \sigma_r \end{aligned}$$

an den Elementecken. Eine parallele Rechnung ohne diese (Fig. 4.30) zeigt nur geringe Abweichungen, was natürlich der relativ feinen Diskretisation zuzuschreiben ist.

Fig. 4.28 zeigt zum Vergleich auch die Spannungen nach der normalen Balkentheorie, mit und ohne Berücksichtigung eines Abzugs am Stützenmoment infolge einer "Verteilung" des Stützendrucks auf die Balkenaxe unter  $30^{\circ}$ , wie er in der Praxis des Stahlbaus üblich ist. Eine Gleichgewichtsbetrachtung für einen Schnitt unmittelbar neben dem Auflager zeigt allerdings, dass ein solcher Abzug der mechanischen Grundlage entbehrt: Das wirksame Moment in diesem Schnitt ist das volle Balkenmoment. Für die Unterkante des Balkens sind die Spannungen nach der Elastizitätstheorie sogar höher als jene nach der Balkentheorie ohne Abzug.

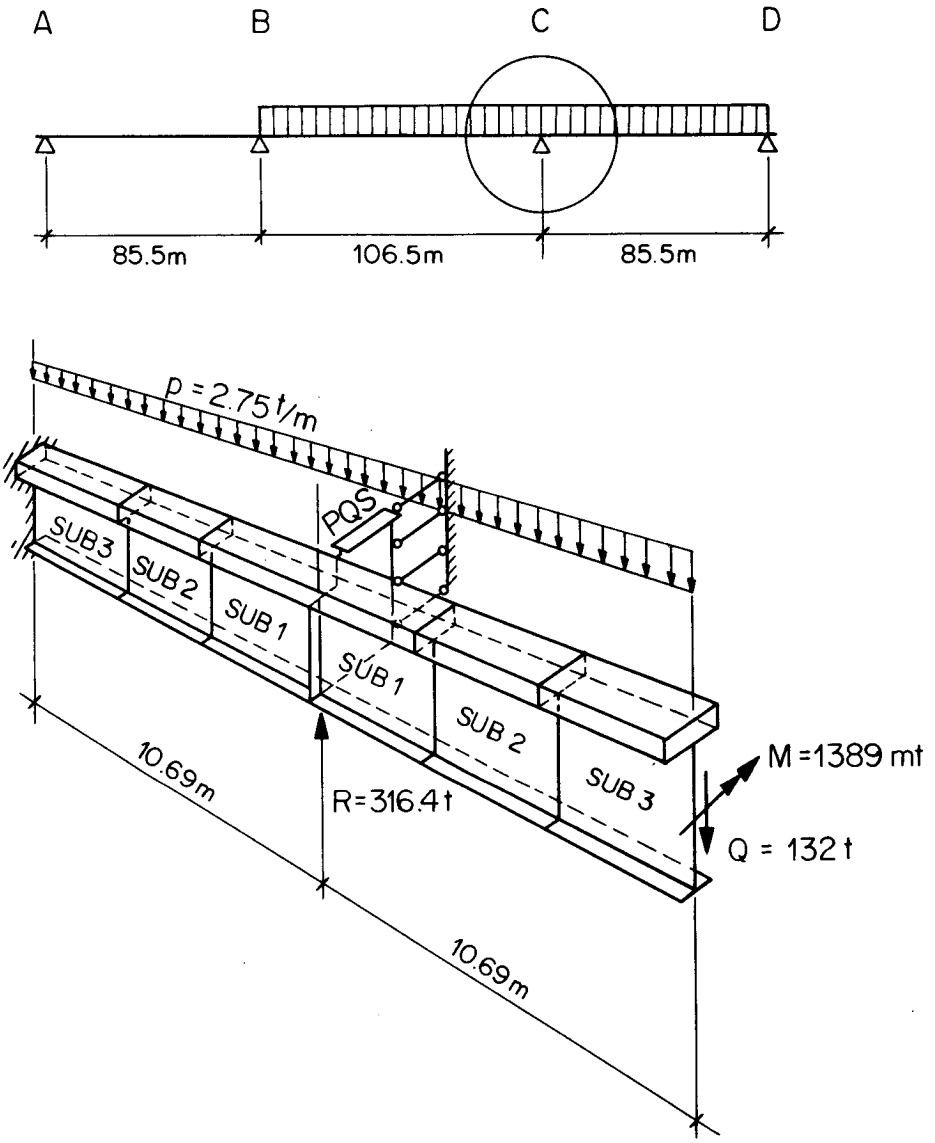
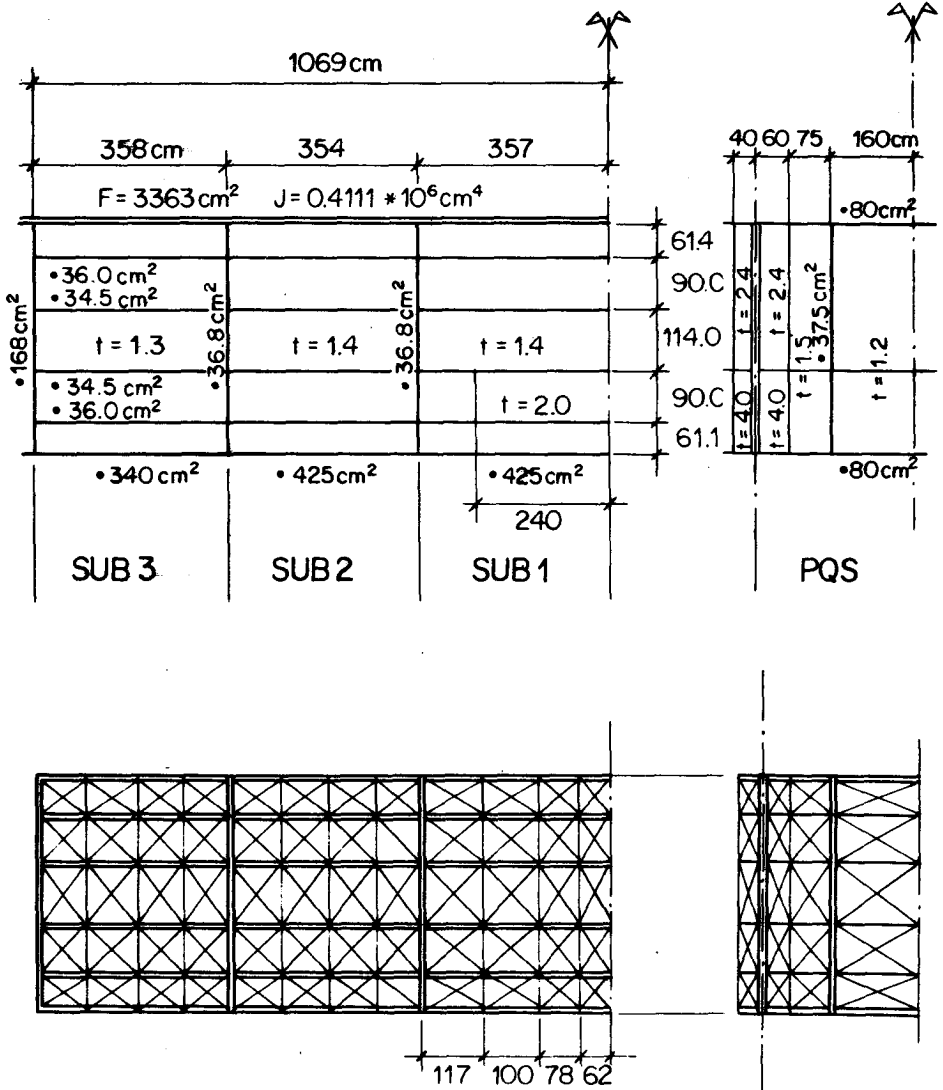


Fig. 4.25

Pont de la Madeleine , Stütze C  
Statisches System , Belastungen , Substrukturen



Pont de la Madeleine , Stütze C  
 Querschnittswerte und Diskretisation

Fig. 4.26

Fig. 4.28

Pont de la Madeleine

Längsspannungen im Hauptträger  
beim Pfeilerlager ( $a = 620$ )

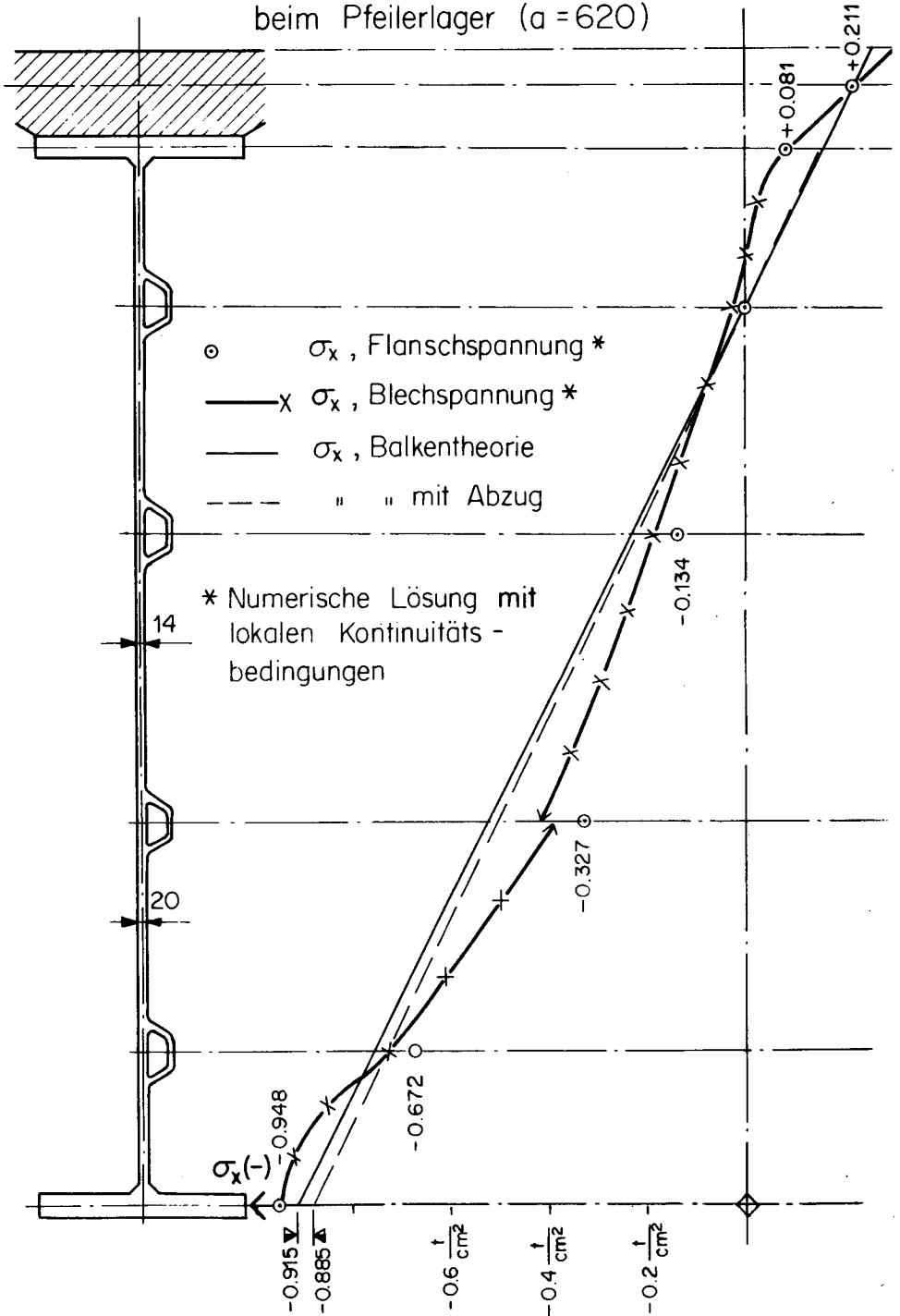




Fig. 4.27

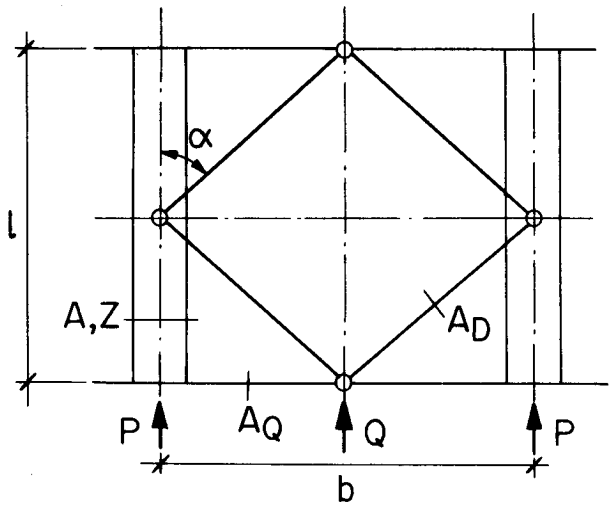


Fig. 4.29

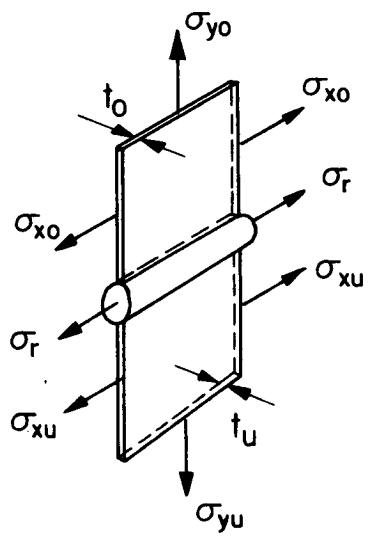


Fig. 4.30 Pont de la Madeleine

Längsspannungen im Hauptträger

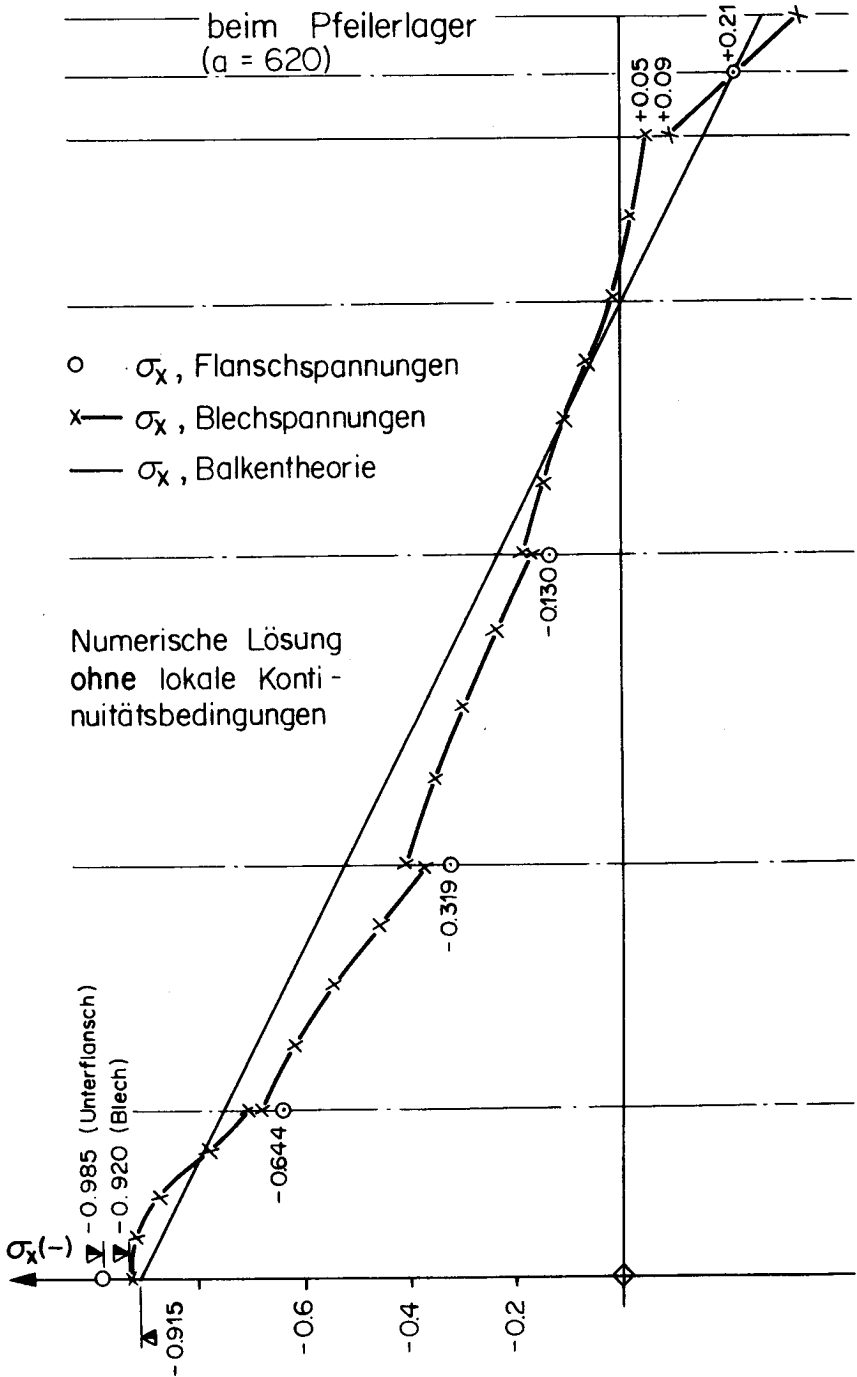
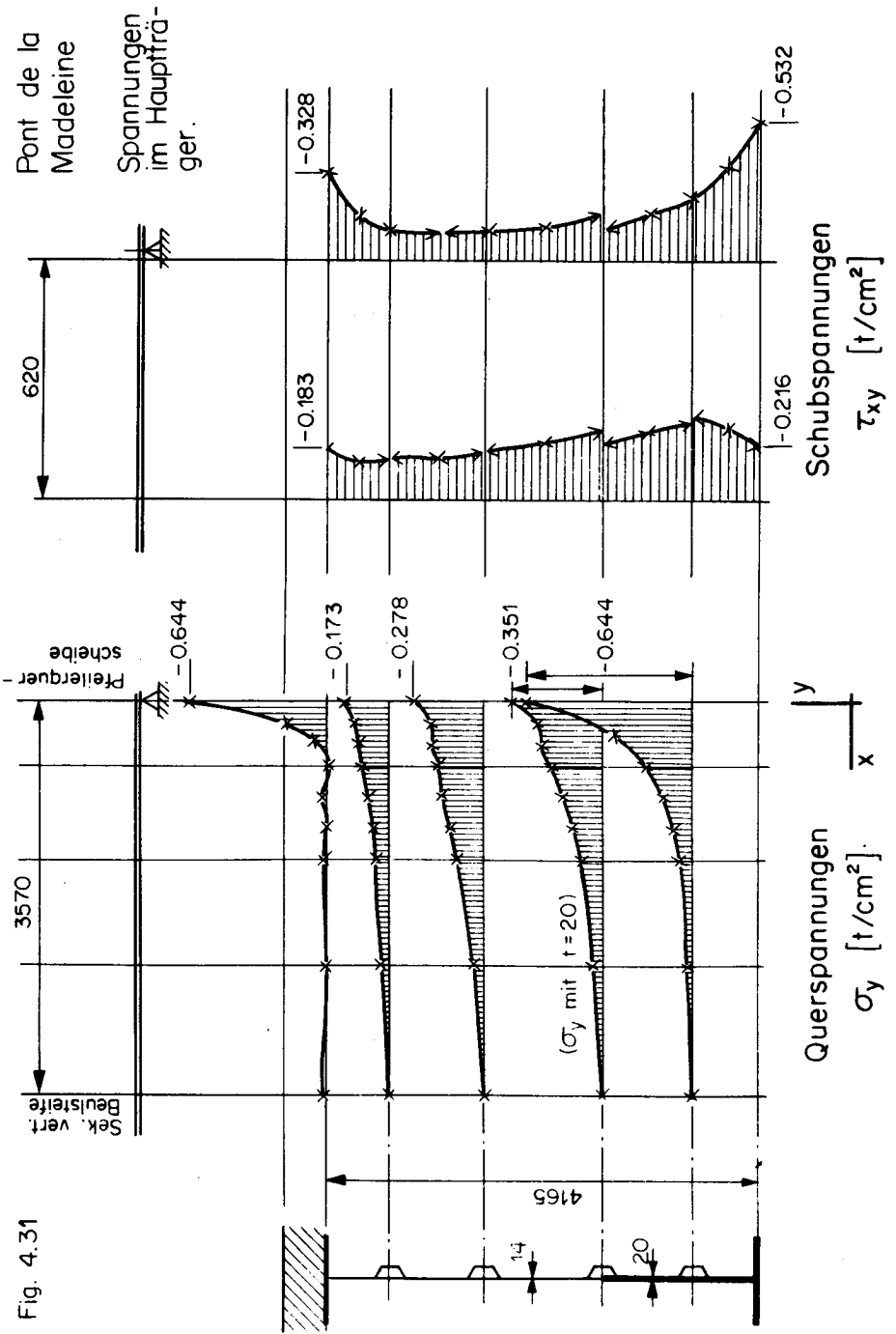


Fig. 4.31



#### 4.3 Torsion eines Balkenbrückenquerschnitts mit unterem Verband

In der Praxis des Stahl- und Verbundbrückenbaus werden die Längsspannungen aus Torsion bei geschlossenen Querschnitten mit einer fachwerkförmigen Scheibe normalerweise vernachlässigt [36]. Diese Vereinfachung ist in der Regel zulässig, weil schon eine schwache vierte Scheibe die Wölbspannungen des offenen Querschnitts erheblich verringert. Eine Abschätzung der Grösse der vernachlässigten Spannungen ist aber wünschbar, denn die Ersatzscheibenstärke des Verbandes an geraden Trägern liegt meist im Bereich von Hundertsteln derjenigen der übrigen Scheiben.

##### 4.31 Aufgabenstellung

Statisches System, Abmessungen und Querschnittswerte sind Fig. 4.31 zu entnehmen. Der Träger ist bei A eingespannt. Das Ende B ist frei. Das konstante Torsionsmoment wird hier durch ein Kräftepaar eingeleitet.

Variable Parameter der Untersuchung sind die Ersatzscheibenstärken von Wind- und Querverbänden. Für das Rautenfachwerk des Windverbandes erhält man aus energetischen Ueberlegungen analog [37]

$$t^* = \frac{(1+\nu) ab}{\frac{a^3}{3F_G} + \frac{d^3}{F_D}}$$

Als dimensionslosen Parameter wählen wir das Verhältnis dieser Ersatzstärke zu jener der Deckscheibe

$$\alpha_{wr} = \frac{t^*}{t_0}$$

Aehnlich findet man für die Querverbände

$$t_Q = \frac{(1+\nu)hb}{\frac{h^3}{4F_p} + \frac{b^3}{8F_u} + \frac{d_Q^3}{F_{DQ}}}$$

Dazu kommt ein Beitrag aus der Steifigkeit der Querrahmen, gebildet aus biegesteifen Querträgern und Pfosten:

$$t_{QR} = \frac{1+\nu}{bh} \cdot \frac{1}{\frac{b}{12Z_Q} + \frac{h}{6Z_r}}$$

Damit definieren wir den dimensionslosen Queraussteifungsgrad

$$\alpha_{Qv} = \frac{t_Q + t_{QR}}{a}$$

Die Querrahmensteifigkeit wurde nicht variiert; ihr Beitrag ist in allen Beispielen

$$\frac{t_{QR}}{a} = 3.8 * 10^{-6}$$

also klein im Verhältnis zum Beitrag normaler Querverbände. Diese Querrahmensteifigkeit ist auch angenommen in den Zwischenquerschnitten ohne Querverbände (äussere Knoten des Windverbandes).

#### 4.32 Diskretisation und Strukturaufbau

Ein Trägerabschnitt der Länge  $a$  wurde durch 4 Viereckselemente Q1 - Q4 aus je 4 Dreiecken dargestellt (Fig. 4.32). Unterflansch- und Querrahmenstäbe QB1 - QB6 sind Stabelemente (2.4); auch die Verbandsstäbe F1 - F8 sind einfache Sonderfälle dieses Elements. Besondere Knotenhilfselemente beschreiben die Knoten K1 - K5 an Querschotten. Die Ueberkontinuität der Längsdehnungen wird in den Endquerschnitten durch Hilfselemente L1 - L6 hergestellt. In den Knoten des Untergurts bedeutet dies, dass die Differenzkräfte aus dem Windverband in Form einer kubischen Verteilung nach (2.018) in den Hauptträger eingeleitet werden.

Alle 16 Abschnitte des Tragwerks wurden durch dieses Brückenabschnitts-Element dargestellt; die 2 unterschiedlichen Verbandsformen wurden beide ohne Elimination verbunden; in der 2. Stufe wurde dann die passende Form durch Elimination der entsprechenden Variablen "angewählt". Der Substrukturaufbau erfolgte "nach Potenzen von 2" in 6 Stufen, einschliesslich einer Hilfsstufe zur Bearbeitung von Eliminationsrückständen. Die Zahl der Variablen am einzelnen Brückenabschnitt war 190. Pro Querschnitt des Trägers auf höheren Substrukturstufen gingen 30 Variable ein (Fig. 4.33).

#### 4.33 Grundlagen der Auswertung

Als Vergleichslösung zur Gewinnung dimensionsloser Resultate eignet sich die gemischte Torsion des offenen Querschnitts, dem wir willkürlich die St. Venant'sche Torsionssteifigkeit

$$GK = G \frac{(2bh)^2}{\int \frac{ds}{t}}$$

des geschlossenen Kastens mit unterem Windverband zuordnen.  
Die Differentialgleichung

$$M_T = -EJ_\omega \varphi''' + GK \varphi'$$

der gemischten Torsion hat für unseren Fall die Lösung [38]

$$\varphi = \frac{\mu}{\alpha^3} \left[ \operatorname{tgh} \alpha (\cos h(\alpha \xi) - 1) - \sinh(\alpha \xi) + \alpha \xi \right] \quad (4.303)$$

mit der dimensionslosen Koordinate

$$\xi = \frac{x}{L}$$

(von der Einspannung gemessen) und den Konstanten

$$\alpha = L \sqrt{\frac{GK}{EJ_\omega}} \quad \mu = \frac{M_T L^3}{EJ_\omega}$$

$J_\omega$  bezeichnet das sektorielle Trägheitsmoment des offenen Querschnitts.

Daraus folgt das Bimoment bei der Einspannung

$$B_{(0)} = M_T L \cdot \frac{\operatorname{tgh} \alpha}{\alpha}$$

welches sich somit gegenüber dem Fall reiner Wölb torsion mit dem Faktor

$$\frac{\operatorname{tgh} \alpha}{\alpha}$$

multipliziert. Die maximale Längsspannung ist dann

$$\sigma_{\omega} = \sigma_{FW} \frac{\operatorname{tgh} \alpha}{\alpha} \quad (4.304)$$

wo  $\sigma_{FW}$  am Faltwerk mit 3 Scheiben oder nach der Spannungsformel der reinen Wölb torsion

$$\sigma_{FW} = \frac{M_T L}{J_{\omega}} \omega_G$$

zu bestimmen ist;  $\omega_G$  ist die sektorielle Koordinate des Untergurts am offenen Querschnitt. Der Schubmittelpunkt des offenen Querschnitts liegt im Abstand

$$e_{so} = \frac{b^2 F}{4 Z_H} e_s$$

über dem Deckblech.  $F$  ist die (materielle) Querschnittsfläche,  $Z_H$  das Trägheitsmoment um die Hochaxe,  $e_s$  der Abstand des Schwerpunkts unter dem Deckblech.

Das sektorielle Trägheitsmoment des offenen Querschnitts ist

$$J_{\omega} = \frac{t_o e_{so}^2 b^3}{12} + \frac{b^2}{2} \left[ e_{so}^2 (t_s h + F_G) - e_{so} (t_s h^2 + 2h F_G) + \frac{t_s h^3}{3} + h^2 F_G \right]$$



und die sektorielle Koordinate der Hauptträgerunterkante

$$\omega_G = \frac{b}{2} (h - e_{so})$$

Die Formänderungen spalten wir auf in Kastenverdrehung und Kastenverformung (Fig. 4.34)

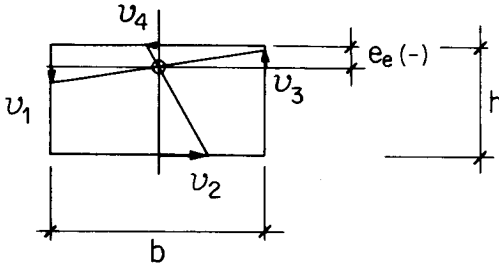


Fig. 4.34

Die Verschiebungen  $u_1 \dots u_4$  der Scheiben sind Mittelwerte aus den Resultaten für die Elemente des Querrahmens (Fig. 4.32).

Die elastische Linie liegt

$$e_e = -h \frac{v}{u_2 + u_4}$$

über dem Deckblech. Rotation und Kastenverformung sind definiert durch

$$2\varphi = \frac{u_1 + u_3}{b} + \frac{u_2 + u_4}{h}$$

$$2\chi = \frac{u_1 + u_3}{b} - \frac{u_2 + u_4}{h}$$

Als Vergleichsgrösse für die Lage der elastischen Linie brauchen wir den Schubmittelpunkt des geschlossenen Querschnitts. Dessen Bestimmung über den statisch unbestimmten Schubfluss ist z.B. [38] zu entnehmen. Die Rotation normieren wir mit (4.303) an der Spitze:

$$\varphi_n = \frac{M_T L}{GK} \left[ 1 - \frac{\operatorname{tgh} \alpha}{\alpha} \right] \quad (4.305)$$

Als Norm für die Kastenverformung wählen wir die Deformation eines einzelnen Querschnitts unter dem profilverformenden Anteil der Belastung am freien Ende:

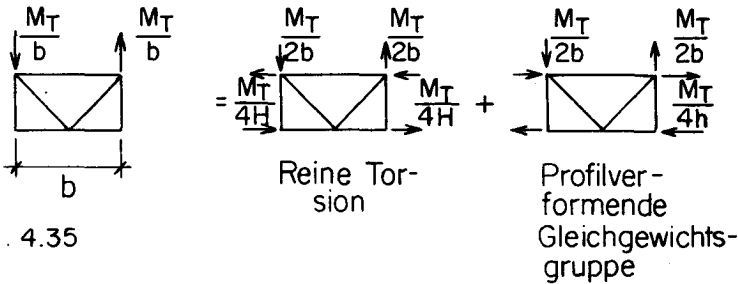


Fig. 4.35

$$\chi_n = \frac{M_T}{2bh} \cdot \frac{1}{(t_Q + t_{QR})G} \quad (4.306)$$

Die Vergleichsgrösse für die Schubspannungen folgt aus der Bredt'schen Formel

$$(\tau_m) = \frac{M_T}{2bh}$$

für St. Venant'sche Torsion. Am diskreten Windverband werden die Stabkräfte des Rautenfachwerkes

$$D_n = \frac{M_T}{2bh} d$$

Die Gurtkräfte des Hauptträgeruntergurts erhalten an den äusseren Knotenpunkten des Verbandes Differenzkräfte

$$\Delta G = \frac{2D}{d} a$$

welche lokale Längsspannungen verursachen.

Die Querbiegemomente der Hauptträgeruntergurtungen normieren wir mit

$$M_Q = \frac{M_T a}{8h}$$

entsprechend einer Aufnahme der ganzen Querkraft der unteren Scheibe durch die Gurtquerbiegung in einem Feld.

Die Stabkräfte der Querverbandsdiagonalen beziehen wir auf den Wert aus der profilverformenden Belastung des Querverbandes allein:

$$\frac{M_T}{2bh} d_Q$$

#### 4.34 Drei Einzelfälle

Insgesamt wurden 18 Kombiantionen der beiden Parameter untersucht. Wir greifen aus den Resultaten vorerst 3 Einzelfälle mit kräftiger Queraussteifung ( $\alpha_{QV} = 3.74 * 10^{-4}$ , entsprechend  $F_Q = 80 \text{ cm}^2$  in Fig. 4.31) heraus:

- =  $2.45 * 10^{-2}$  "Normaler" Windverband mit  $F_D = 40 \text{ cm}^2$
- =  $2.06 * 10^{-1}$  Sehr starker Windverband mit  $F_D = 400 \text{ cm}^2$
- =  $2.45 * 10^{-4}$  Verschwindend schwacher Windverband mit  $F_D = 0,4 \text{ cm}^2$

Den Verlauf der Torsionslängsspannungen in der Hauptträgerunterkante zeigt Fig. (4.36). Der Fall des sehr schwachen Verbandes ist nicht realistisch. Immerhin zeigt er, dass die Längsspannung bei der Einspannung wirklich gegen den Wert der gemischten Torsion des offenen Querschnitts  $\sigma_w$  (4.304) strebt.

Die Formänderungen des Trägers für die 3 Fälle zeigt Fig. (4.37). Aufgetragen sind für jeden Fall die Verdrehung  $\varphi$  (Norm: (4.305)), die Kastenverformung  $\chi$  (Norm: (4.306)) und die Lage der elastischen Linie (Norm: Schubmittelpunkt des geschlossenen Querschnitts). Der Verlauf der elastischen Linie im Falle starken Verbandes erklärt sich daraus, dass hier der Schubmittelpunkt des geschlossenen Querschnitts bereits im Kasteninnern liegt.

Fig. 4.38 zeigt die Schubspannungen in der Unterkante des Hauptträgers, (an der Stegwurzel) im Falle eines "normalen" Verbandes, ferner für denselben Wert  $\alpha_{wv} = 2.45 * 10^{-2}$  die Querbiegemomente des Unterflanschs und die Stabkräfte in Wind- und Querverband; als Bezugsgrößen der dimensionslosen Darstellung werden (4.307), (4.309), (4.308) und (4.310) verwendet. Schliesslich sind in Fig. 4.39 die Spannungsverteilungen über den Einspannquerschnitt und einen allgemeinen

Querschnitt für den Fall des normalen Verbandes dargestellt. Die Spitze der Schubspannung in der Symmetrieaxe des Schnitts  $\sigma$  ist selbstverständlich ein Diskretisationseffekt; er tritt nur bei der Einspannung so deutlich in Erscheinung. Man ruft sich bei dieser Gelegenheit in Erinnerung, dass die dargestellten Resultate nicht die elastizitätstheoretische Lösung des Problems wiedergeben, sondern lediglich einen möglichen Gleichgewichtszustand, der eine - freilich recht grosse - Zahl von diskreten Verträglichkeitsbedingungen erfüllt.

Trotzdem vermittelt unsere Lösung ein Bild vom Kräftespiel des Tragwerks, das den qualitativen Vorstellungen des Statikers in allen Teilen entspricht, und das im Wesentlichen numerisch zutrifft, wie die Grenzfälle zeigen.

Dieses Verhalten ist bei einer Diskretisation eines kontinuierlichen Tragwerks mit Artikulationen (Fachwerkstäbe, Querverbände) durch wenige Elemente in einer Richtung keineswegs selbstverständlich; es kann von ähnlich groben Deformationsansätzen erfahrungsgemäss nicht erwartet werden.

#### 4.35 Parametrische Darstellung der Resultate

Auf Grund von Fig. (4.36) lassen sich die Längsspannungen einteilen in

- Wölbspannungen bei verhinderter Längsverschiebung an der Einspannstelle.
- Spannungen infolge Kastenverformung im Bereich der Krafteinleitung.
- Lokale Krafteinleitungsspannungen des Windverbandes.

Die Spannungen der zwei ersten Punkte sind in Fig. 4.40 in Funktion der - logarithmisch aufgetragenen - Windverbandskennzahl  $\alpha_{wv}$  dargestellt. Scharparameter ist der Queraussteifungsgrad  $\alpha_{qv}$ . Man beachte, dass die aufgetragenen Werte mit der variablen Wölbspannung  $\sigma_{\omega}$  der gemischten Torsion dividiert sind; dieser Wert ist darunter in Funktion von  $\sigma_{FW}$  aufgezeichnet.

Die lokalen Spannungen aus den Windverbandsstabkräften entsprechen der halben Höhe der Sprünge in Fig. 4.36. Aufgetragen sind die maximalen Werte, die im Bereich der Balkenmitte auftreten. Diese Spannungen hängen kaum von den Parametern ab und betragen an unserem Querschnitt ungefähr 70 % der Längsspannung an einem kurzen Falwerk von der Länge eines halben Rautenfeldes bei derselben Belastung und Lagerung.

Fig. 4.41 zeigt die maximalen Schubspannungen in Funktion der Windverbandsstärke. Auch hier ist es sinnvoll, die Schubspannungen zu unterteilen in solche

- im Einspannquerschnitt (ausgezogene Linien)
- im Bereich des freien Endes; es handelt sich immer um die Schubspannung an der unteren Stegwurzel beim letzten äusseren Rautenknoten, siehe auch Fig. 4.38 (unterbrochene Linien).
- bei den Fachwerkknoten im Bereich der Trägermitte. Diese Schubspannungen sind unabhängig von den Parametern ca.  $1.8 * \tau_m$ .

#### 4.36 Folgerungen

Gerade Brückenträger an Verbundbrücken mit der untersuchten Querschnittsform haben in der Regel Windverbände in der Grössenordnung  $\alpha_{wv} \sim 10^{-2}$  und einen Queraussteifungsgrad  $\alpha_{qv} \sim 10^{-4}$ . An solchen Tragwerken sind die Torsionslängs-

spannungen immer Nebenspannungen; obere Schranken für diese sind gegeben durch den grösseren der Werte  $\sigma_{\omega}$  (4.304) und

$$\sigma_{FW} \cdot \frac{d}{L}$$

mit den Bezeichnungen von Fig. 4.31. Die Schubspannungen können den 2.5 - fachen Wert der St. Venant'schen Schubspannung erreichen.

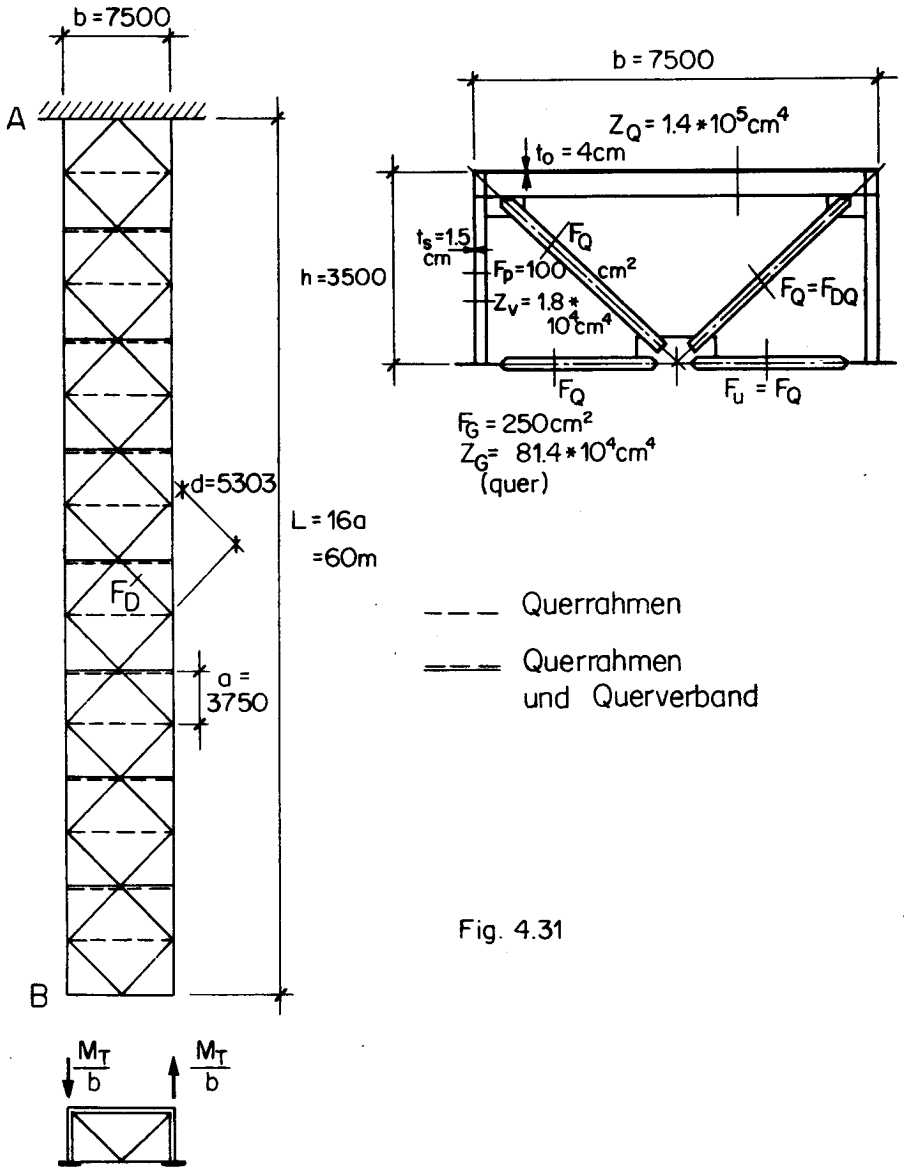


Fig. 4.31



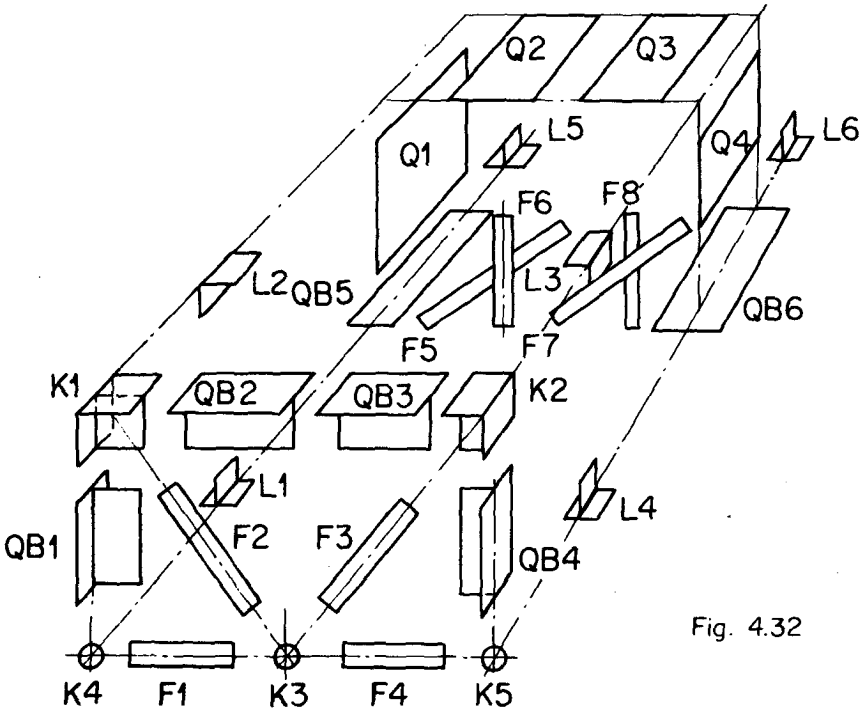


Fig. 4.32

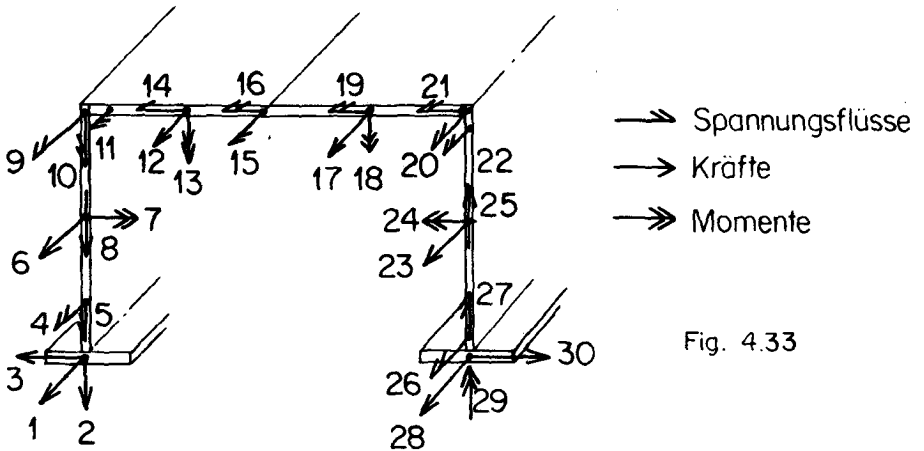


Fig. 4.33

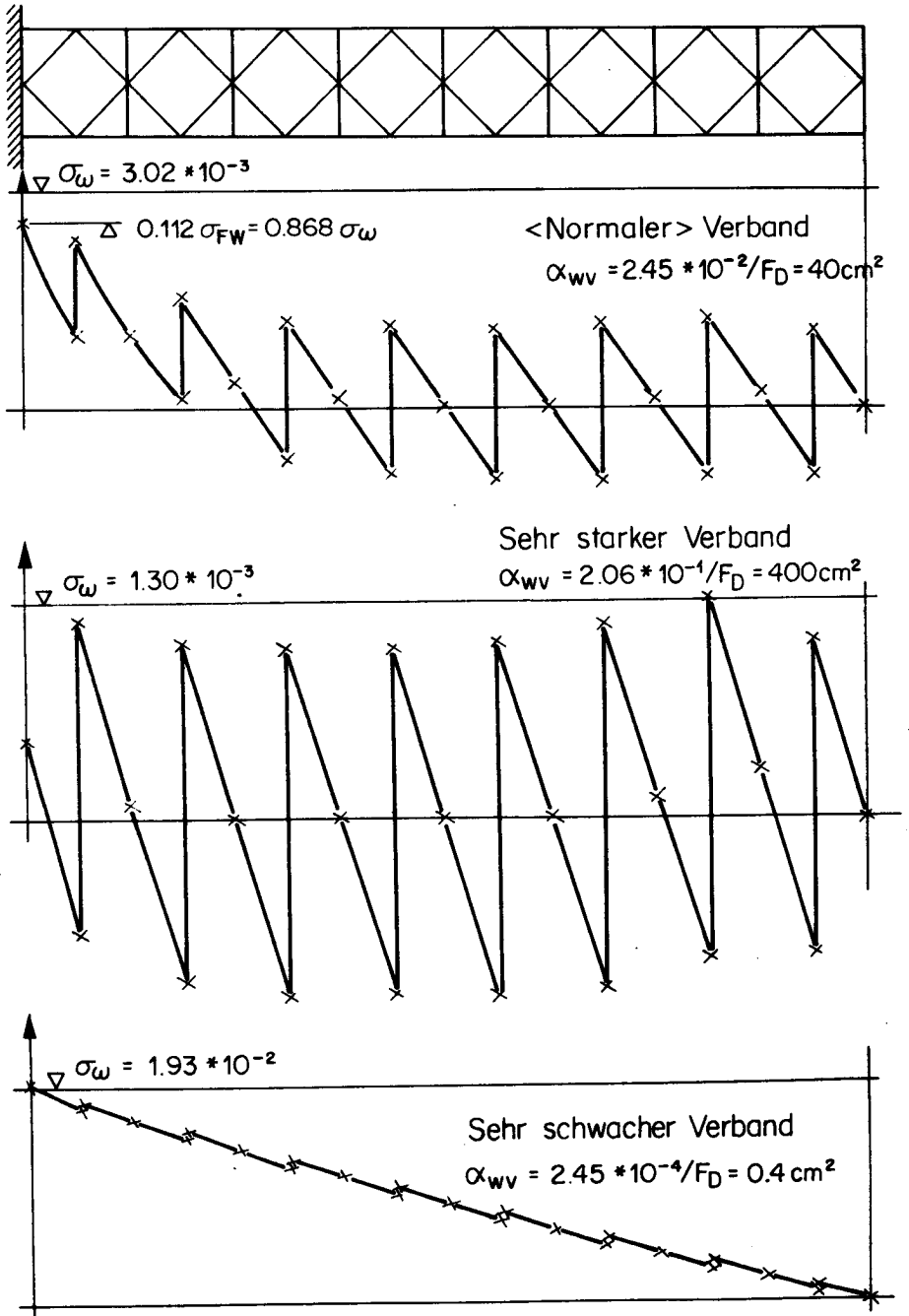


Fig. 4.36

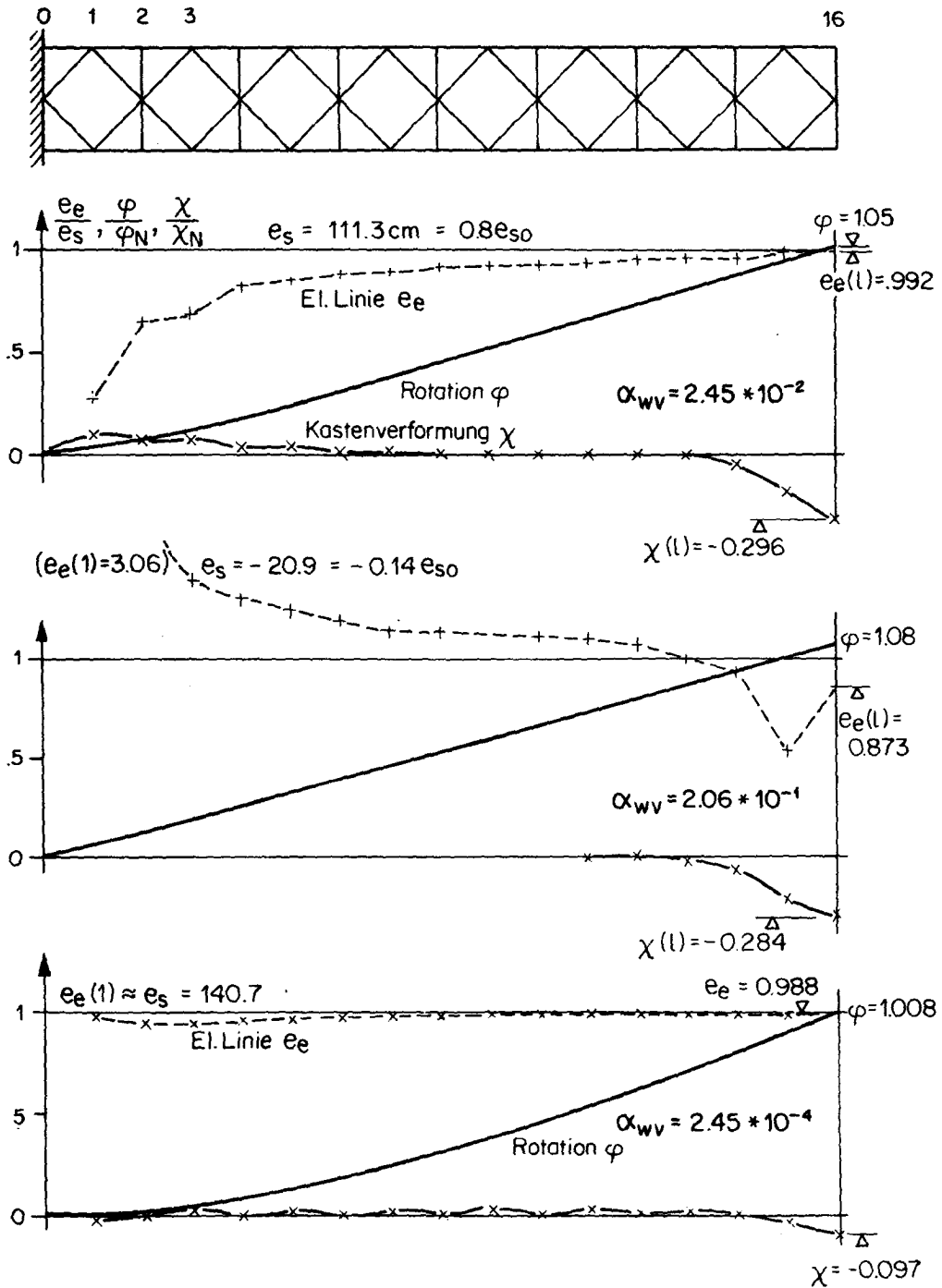


Fig. 4.37

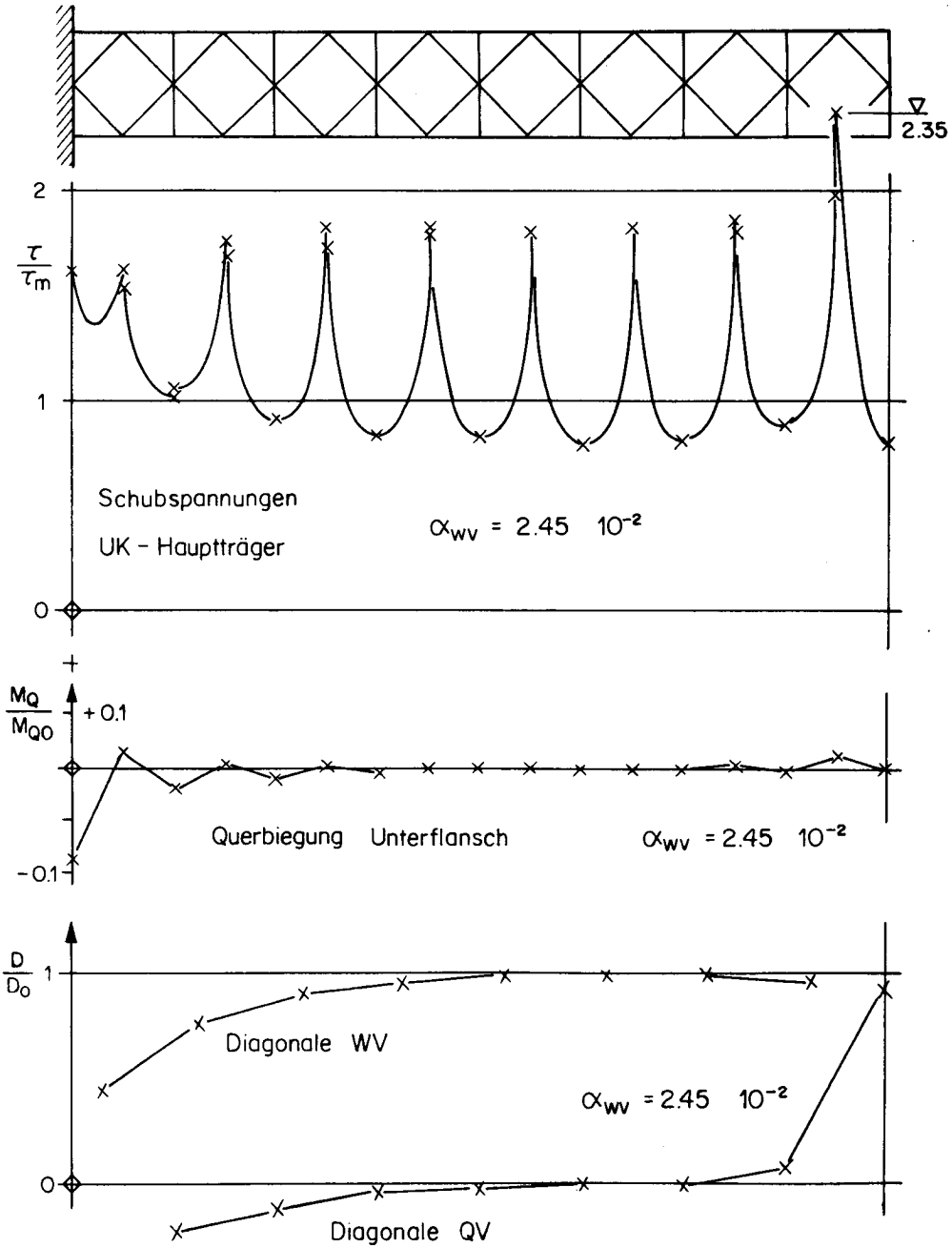


Fig. 4.38

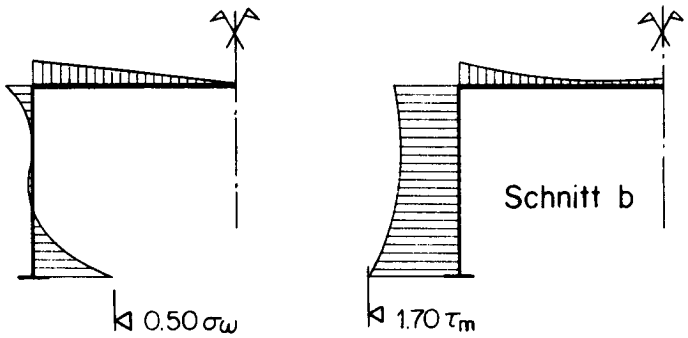
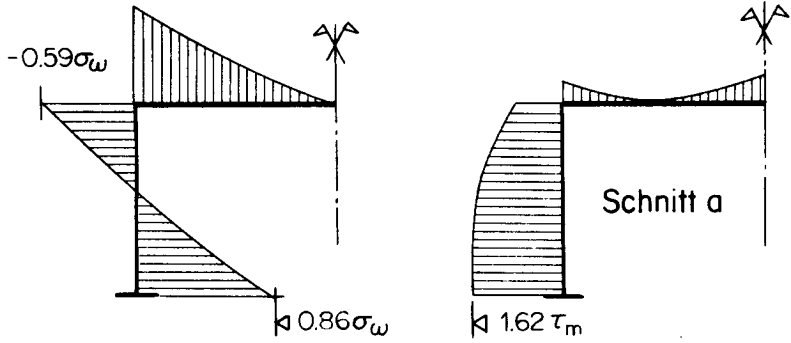
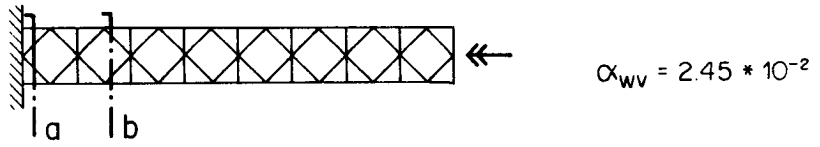
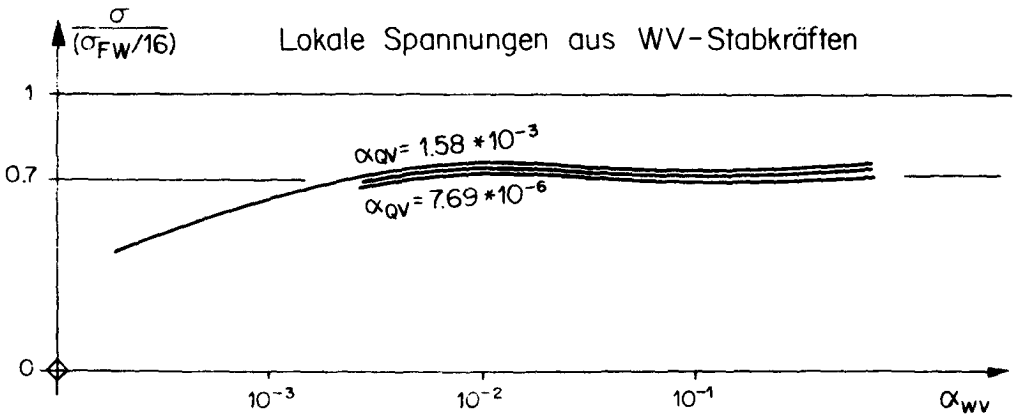
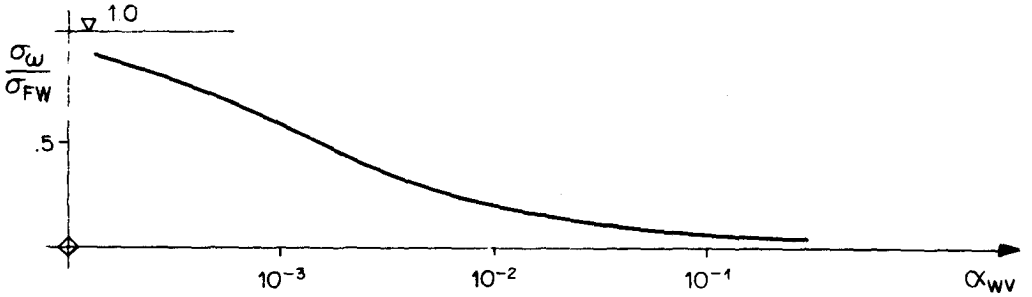
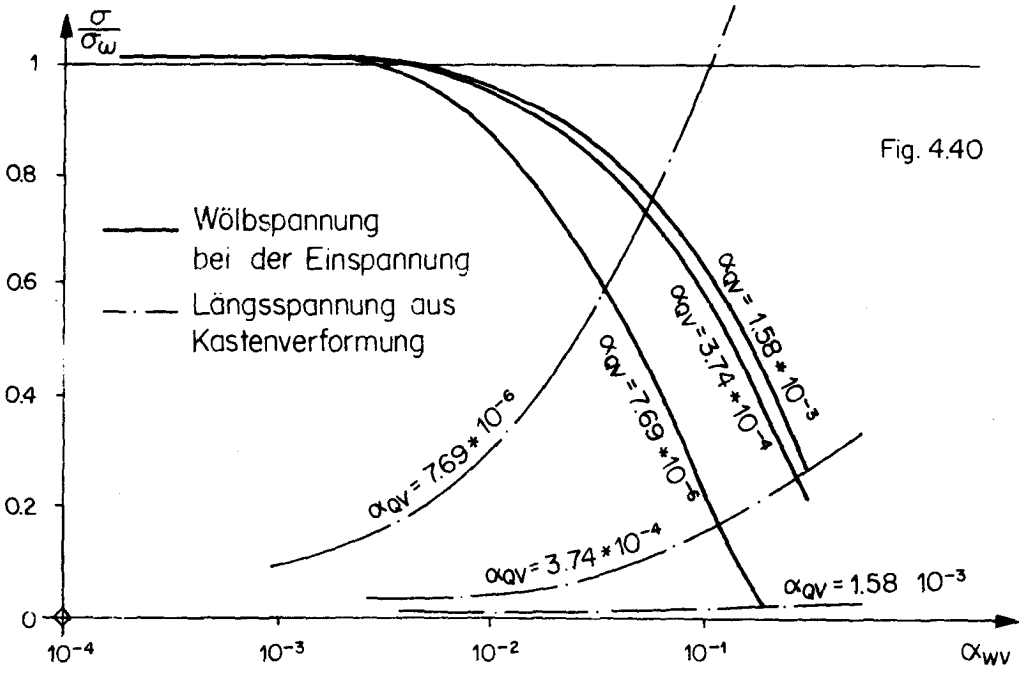


Fig. 4.39

Fig. 4.40



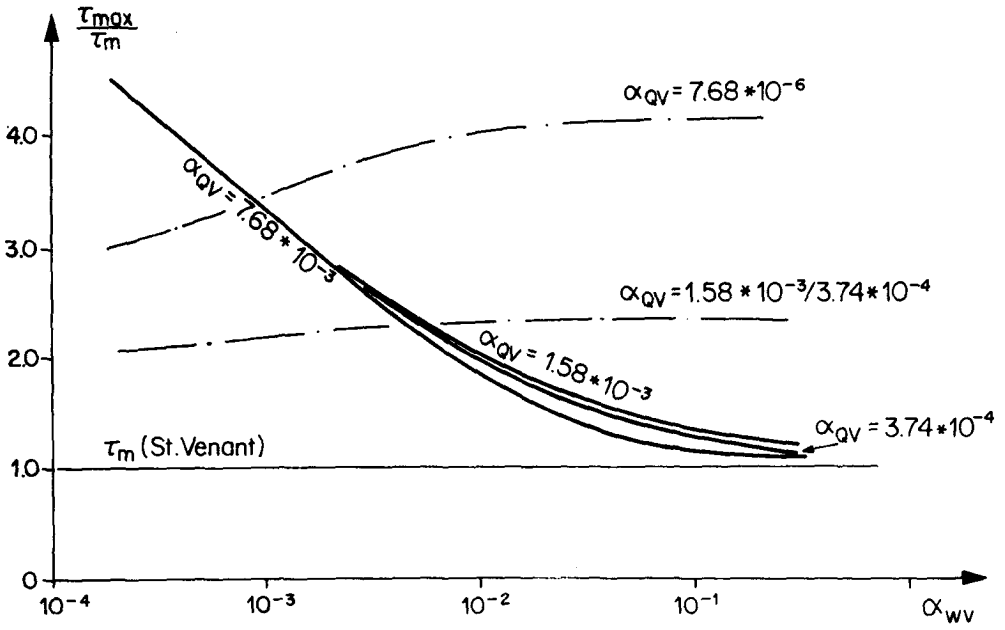


Fig. 4.41

#### 4.4 Orthotrope Stahlfahrbahnplatte

---

Untersucht wurde eine Stahlfahrbahn mit offenen, torsionsweichen Längsträgern unter einer Belastung durch einen Schwerlastwagen (Fig. 4.42) in massgebender Stellung für die Querträgermomente. Das Beispiel stimmt in Geometrie und Querschnittswerten überein mit dem ersten Zahlenbeispiel in [39]. Die Randbedingungen für den hier untersuchten Abschnitt der Fahrbahnplatte entsprechen einer periodischen Belastung durch Schwerlastwagen im achtfachen Querträgerabstand; die nächst benachbarten Achsgruppen entlasten den mittleren Querträger (nach dem Trägerrostverfahren) um 9.2 %. Für den Vergleich wurden die Resultate von [39] um diesen Betrag korrigiert.

Einen Ueberblick über den Substrukturaufbau gibt Fig. 4.43. Die Grundstruktur ist in (4.13) für Balkenrandbedingungen geprüft worden. Sie ist zusammengesetzt aus allgemeinen Viereckselementen  $Q1 \div Q5$  nach (4.11), Stabelementen  $QB1 \div QB6$  mit Scheibkantenelementen (2.31) und Hilfselementen  $L1 \div L8$  zur Herstellung der (Ueber)-Kontinuität zwischen Scheibe und Rippenoberkanten. Das Hilfselement  $QJ$  ist nur von Bedeutung bei schiefer Kreuzung der Rippen; die Problemvorbereitung und Dateneingabe wurde so angeordnet, dass für diesen allgemeineren Fall nur die Elementkoordinaten im lokalen Koordinatensystem der Grundstruktur geändert werden müssen. Mit Einschluss der Variablen infolge dieser - hier unnötigen - Allgemeinheit hat die Grundstruktur total 243 Variable; davon waren rund 100 Aeussere. Die Belastungen wurden in einfachster Weise statisch äquivalent auf die nächsten Längs- oder Querrippen aufgebracht, für die mittlere Achse z.B. in Form gleichmässiger verteilter Linienlasten auf den Querträger und die Längsrippenansätze innerhalb der belasteten Flächen. Die Vernachlässigung der



Plattensteifigkeit dürfte für das vorliegende System mit starken Querträgern und den untersuchten Lastfällen unwesentlich sein. Zur Prüfung der massgebenden Lastfälle für Längsrippenbeanspruchung und Blechspannungen müssten dagegen im Bereich der Belastungen Plattenelemente verwendet werden.

Der weitere Aufbau ist in Fig. 4.43 unten schematisch angedeutet. Aus der Grundsubstruktur und ihrem symmetrischen Zwilling wurde in weiteren 8 Stufen die symmetrische Hälfte der Platte aufgebaut im Sinne der Substrukturtechnik von Abschnitt 3. Jede Stufe enthält dabei eine einfache oder mehrfache Repetition. Es scheint angebracht, an dieser Stelle einige Worte über die Arbeitstechnik bei diesem Vorgang zu sagen, um (3.13) zu illustrieren.

Dem Aufbau der Grundsubstruktur (Fig. 4.43 oben) aus Scheibenstücken, Scheibenkanten- und Stabelementen nach (3.025) muss die Bildung der  ${}^{(1)}a_E$  (und  ${}^{(1)}b_E$ ) Matrizen aus Eingabedaten vorangehen. Diese Beschreibung der Zusammenhangsbedingungen ist bei jedem allgemeinen statischen Programm in irgendeiner Form vorzunehmen; in BASAR stützt sich die entsprechende Konvention auf allen Stufen auf folgende Angaben an das Programm:

- (a) Einer Definition von Variablengruppen für jeden Elementtyp; z.B. die Gruppe der Kräfte und Spannungsflüsse an einer Kante. Zur Definition gehört die Angabe der zugehörigen Nummern in den Elementmatrizen, sowie die Festlegung von "Anordnungsmustern" für die Variablen der Gruppe; diese beziehen sich auf die Reihenfolge und die vorzunehmenden Vorzeichenwechsel bei der Assemblierung.

- (b) Einer Beschreibung der Zusammenhangsbedingungen mit Hilfe der zuvor definierten Variablengruppen und Anordnungsmuster. Dabei ist auch anzugeben, welche Variablen in der höheren Stufe vorerst als innere bzw. äussere gelten sollen.

Dem Kenner mag das Fehlen einer globalen Knotennummerierung auffallen. Im konkreten Fall der Stufe 2 in (Fig. 4.43) waren rund 100 der 243 Variablen von vornherein als äussere bezeichnet, darunter alle Randkräfte (z.B. (a) in Fig. 4.43) und gewisse Verschiebungen (b) für später einzuführende Lagerungsbedingungen. Dagegen war nicht dafür gesorgt, dass alle inneren Variablen der Stufe 2 auch eliminiert werden konnten; von den rund 150 anfänglich inneren Variablen hat die Eliminationsroutine 18 als nicht eliminierbar ausgeschieden. Wir greifen aus dieser Gruppe folgende typische Vertreter heraus, wobei sich die Bezeichnungen auf Fig. (4.43) beziehen:

- (c) an QB4 ; die Multiplikatoren für das horizontale Gleichgewicht: Kraft quer zur Stabebene und Moment um die Hochaxe können nicht eliminiert werden.

G r u n d : technisch (Partition).

Die Lager (b) genügen nicht zu einer statisch bestimmten Lagerung, so dass die Nichtelimination der Verschiebung in y - Richtung auch aus dieser Ursache möglich wäre.

- (d) an Q5 ; der Multiplikator des Elements für das Gleichgewicht in der z - Richtung kann nicht eliminiert werden.

G r u n d : Es fehlt eine statisch bestimmte Lagerung in z - Richtung. Da diese Variable ganz am Schluss des Eliminationsprozesses angetroffen wurde, steht die Ursache mit Sicherheit fest.

(e) an Q3 : der lokale Multiplikator für die Spannungen gemäss (2.019) kann nicht eliminiert werden.

G r u n d : Diese Gleichung ist abhängig; weil die Schubspannung (f) an dieser Ecke von Q2 und Q3 dieselbe Variable ist, sagt die Multiplikatorgleichung dasselbe aus wie jene der anliegenden Ecke von Q2 .

Abhängige Gleichungen wie (e) könnten an sich durch eine entsprechende Selektion beim Aufbau der Substruktur umgangen werden. Dies kompliziert aber die Beschreibung der Zusammenhangsbedingungen und verhindert u.U. ihre sonst mögliche Erzeugung durch Programme. (Es hat sich nebenbei gezeigt, dass solche bekannte abhängige Gleichungen empfindliche F e h l e r - a n z e i g e r für Datenfehler sind.)

Die 18 neu gebildeten äusseren Variablen w e r d e n d u r c h d a s P r o g r a m m einer Variablengruppe mit festem symbolischem Namen (XPARAM) und festem sequentiellem Anordnungsmuster im Sinne von (a) zugeordnet. Das neue Element der Stufe 2 erhält die Rolle eines E l e m e n t t y p s , dessen einzelnen Vertreter beim weiteren Aufbau die Repetitionen des Elements sind. Die Beschreibung der neuen Zusammenhangsbedingungen (b) stützt sich auf Variablengruppen mit den anfänglich äusseren Variablen und auf die symbolische Variablengruppe XPARAM jedes Elements der Stufe 2, deren konkreter Inhalt dem Programm bekannt ist. Die automatische Mitnahme a l l e r Eliminationsrückstände in die höhere Stufe führt natürlich über mehrere Stufen hinweg zu einer Anhäufung echt abhängiger Variablen vom Typus (e). An unserem konkreten Beispiel ist dieses Problem von Hand gelöst worden: Es war ohnehin notwendig, die Rechnung nach jeweils 1 oder 2 Stufen zu unterbrechen und Zwischentests mit den neugebildeten Elementen vorzunehmen; dabei wurden die Eliminationsrückstände gesichtet und die XPARAM - Gruppen ent-

sprechend bereinigt.<sup>1</sup> Tab. 4.44 zeigt eine Zusammenfassung des Ablaufs über die Stufen von Fig. (4.43). Im Ganzen ist die Grundsubstruktur mit rund 120 inneren und 120 äusseren Variablen 384 mal wiederholt worden.

Substruktur Name	Stufe	Substrukturvar. total	anfänglich Aeussere	erzeugtes XPARAM	davon weiter verwendet
OPELEM/R	2	243	100	18	(alle)
OPELMR	3	171	120	23	13
NORMST	4	396	250	28	(alle)
NORMP3	5	591	300	61	37
NORMS3	6	569	440	47	33
NORMS6	7	673	450	4*	1
NORM12	8	671	450	4	1
NORM24	9	262	-	4	(alle)
(Hilfsstufe)10		4	-	3	-

Einen Auszug aus den Resultaten zeigen die Figuren 4.45 - 4.47. In 4.45 ist der Verlauf der Zugspannungen an der Unterkante des mittleren Querträgers aufgetragen. Der Vergleichswert aus [39] ist mit der zuvor erwähnten Korrektur für die Randbedingungen von 9.2 % versehen. Angesichts der Tatsache, dass die Näherung [39] für offene Längsträger auf Grund einer Balkenrostrechnung mit Einführung "mitwirkender" Querschnitte bestimmt wird, ist die enge numerische Uebereinstimmung wohl Zufall.

Eine parallele Rechnung mit den Einflussfeldern von Krug/Stein für orthotrope Platten (bei Vernachlässigung der exzentrischen Lage des Deckblechs und der diskreten Struktur mit  $\kappa = 0.3$ ) ergibt einen rund 15 % tieferen Wert.

<sup>1</sup> Diese Massnahme ist verantwortlich für die Reduktion der Anzahl der nicht eliminierbaren Variablen ab Stufe 7 in Tab. 4.44 (\*)

Fig. 4.46 zeigt die Längsspannungen im Blech über dem mittleren Querträger. Auch hier erweist sich die Balkenrostlösung als ausserordentlich gute Näherung; die globale Korrektur für die globale Korrektur für die Randbedingungen ist natürlich nicht ganz korrekt, so dass der wirkliche Balkenrostwert sogar noch näher am Resultat der Finite-Element-Rechnung liegt, die nach (4.13) für diese Spannungen Fehlergrenzen von 2 bis 3 % haben muss.

Fig. 4.47 zeigt schliesslich einen Ausschnitt aus dem lokalen Spannungsbild in einem Längsschnitt, der in Fig. 4.46 als (a) eingetragen ist. Die Aeste der Kurven in 4.46 und 4.47 sind für die einzelnen Scheibenelemente im Laufe der selektiven Rekursion direkt mit dem Zeilendrucker ausgedruckt worden.

Das vorliegende Beispiel würde bei direkter Auflösung ohne Substrukturtechnik auf ein lineares Gleichungssystem mit mehr als 50'000 Unbekannten führen. Es stellen sich die Fragen nach den Einflüssen von Eingangs- und Rundungsfehlern auf das Endresultat.

Die Eingangsdaten baustatischer Berechnung sind 2 bis 3-stellige Zahlen; genaueres ist über die Tragwerte nicht bekannt. Die reale Erfahrung zeigt, dass Aenderungen innerhalb dieser Fehlergrenzen im stabilen Bereich ebenso unbedeutende Auswirkungen auf den Spannungszustand haben. Wenn das numerische Modell (Fig. 1.01) diese Eigenschaften nicht hat, so ist es entweder falsch (z.B. infolge zu kleiner Stellenzahl oder einer Missachtung der Tatsache, dass die relative Genauigkeit von Zwischenresultaten bei der **A u f s t e l l u n g** des Gleichungssystems höher sein kann als jene der Eingangsdaten) oder es beruht auf einem Diskretisationsvorgang, der zuwenig von den Eigenschaften des mechanischen Modells erfasst. Solche Empfindlichkeit gegen Eingangsfehler wird **s c h l e c h t e K o n -**

d i t i o n genannt. Die Auswirkungen schlechter Kondition sind durch Einsetzen der Lösung in das Gleichungssystem nicht feststellbar, denn der Fehler gegenüber dem mechanischen Modell wurde nicht beim Auflösen gemacht. Die einzige Kontrollmöglichkeit ist ein Vergleich mit Resultaten aus einem anderen Verfahren, angewendet auf dasselbe mechanische Modell. Solche Vergleiche sind bei allen Beispielen dieser Arbeit angestellt worden und haben in keinem Fall Hinweise auf schlechte Kondition geliefert. Die Erfahrung zeigt übrigens, dass für die Prüfung der Kondition bei grossen linearen Systemen keine sehr feinen Vergleiche nötig sind; in der Regel sind solche Fälle auf den ersten Blick zu erkennen.

Der Einfluss der R u n d u n g s f e h l e r auf die Resultate kann durch Einsetzen der Lösungen in die Gleichungssysteme geprüft werden. Bei Gauss'schen Verfahren für positiv definite Systeme ist die Gutartigkeit [44] a priori theoretisch bewiesen. Die Auflösung nach (3.2) dieser Arbeit entspricht annähernd der Auflösung zweier definiter Systeme nacheinander.

Bei mehrstufiger Substrukturtechnik ist eine v o l l e Einsetzkontrolle nur mit grossem Aufwand möglich, denn das Gesamtsystem wird nie aufgestellt. Am vorliegenden Beispiel ergaben Stichproben und Symmetriekontrollen Rundungsfehlereinflüsse vom Betrag  $10^{-11}$ , bei einem mittleren Spannungsniveau von rund  $10^{-1}$ . Der Verlust von nur 2 weiteren Stellen (vgl. 4.11) durch die Auflösung an diesem relativ grossen System ist erstaunlich. Endgültige Schlüsse können daraus nicht gezogen werden, aber ein gewisses Vertrauen bei der Anwendung im Bereich kleinerer Systeme ist gerechtfertigt, sofern Rechner ähnlich hoher Stellenzahl verwendet werden.

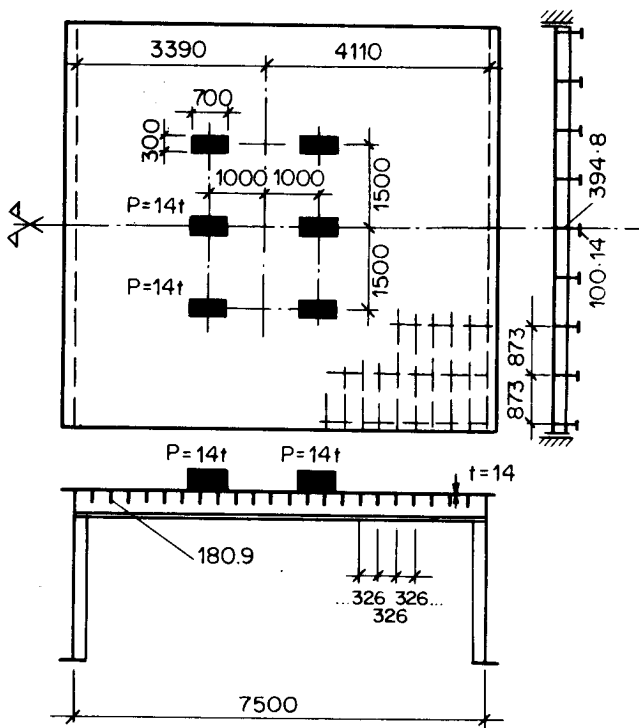
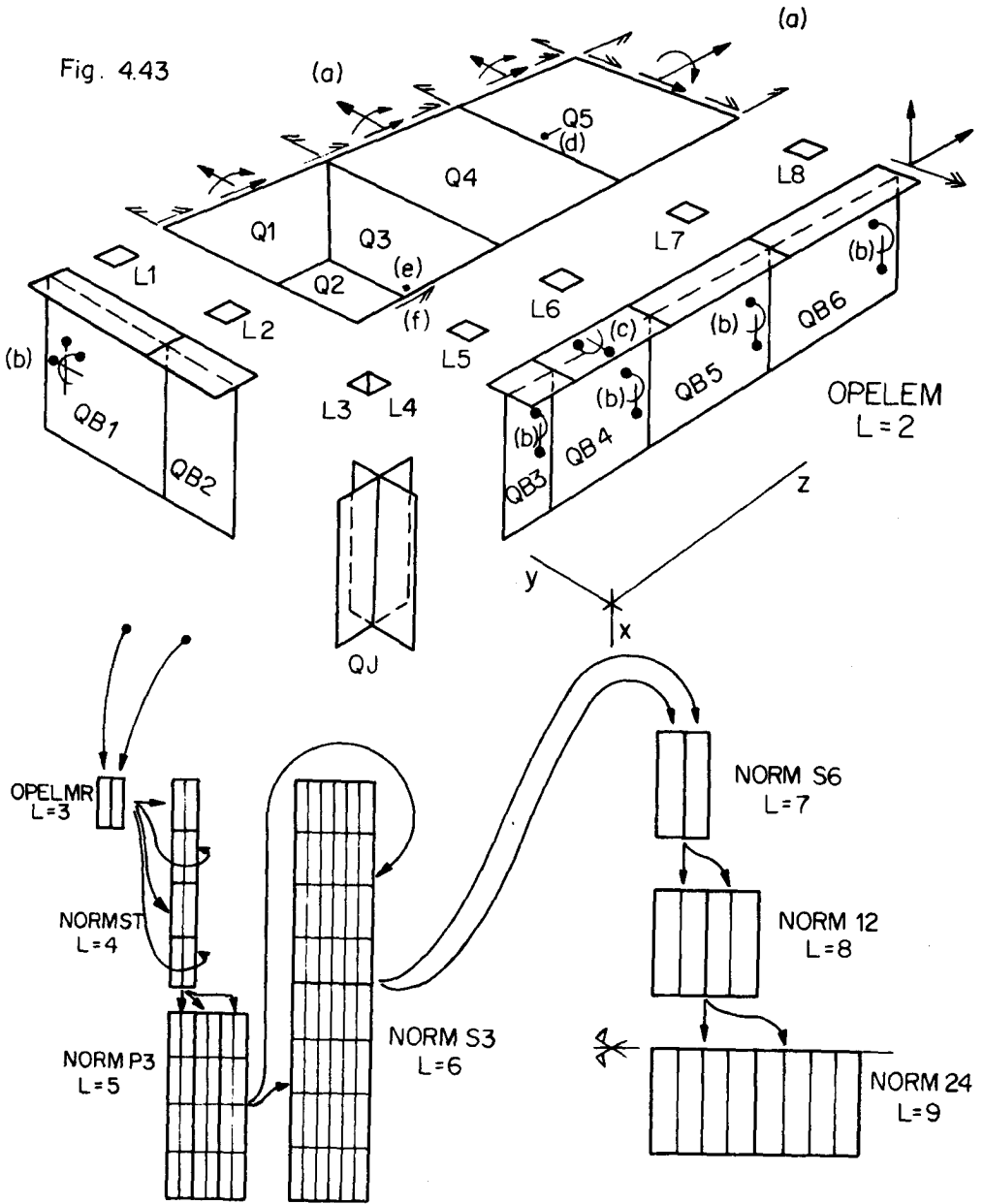
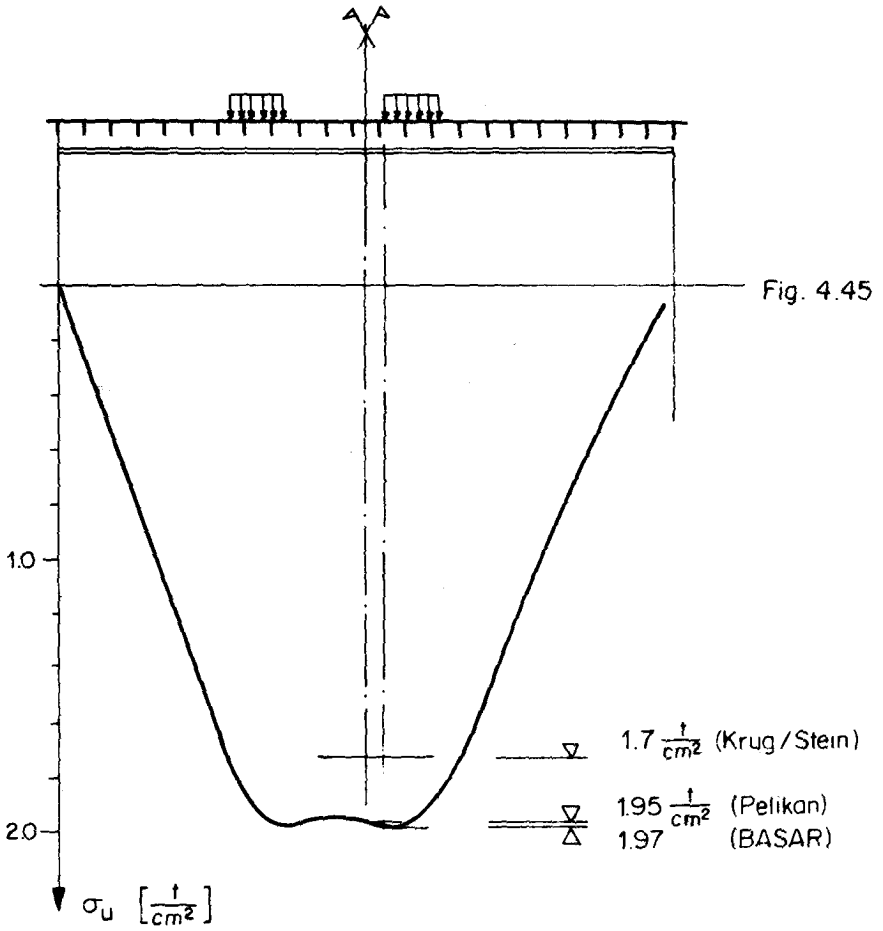


Fig. 4.42

Fig. 4.43







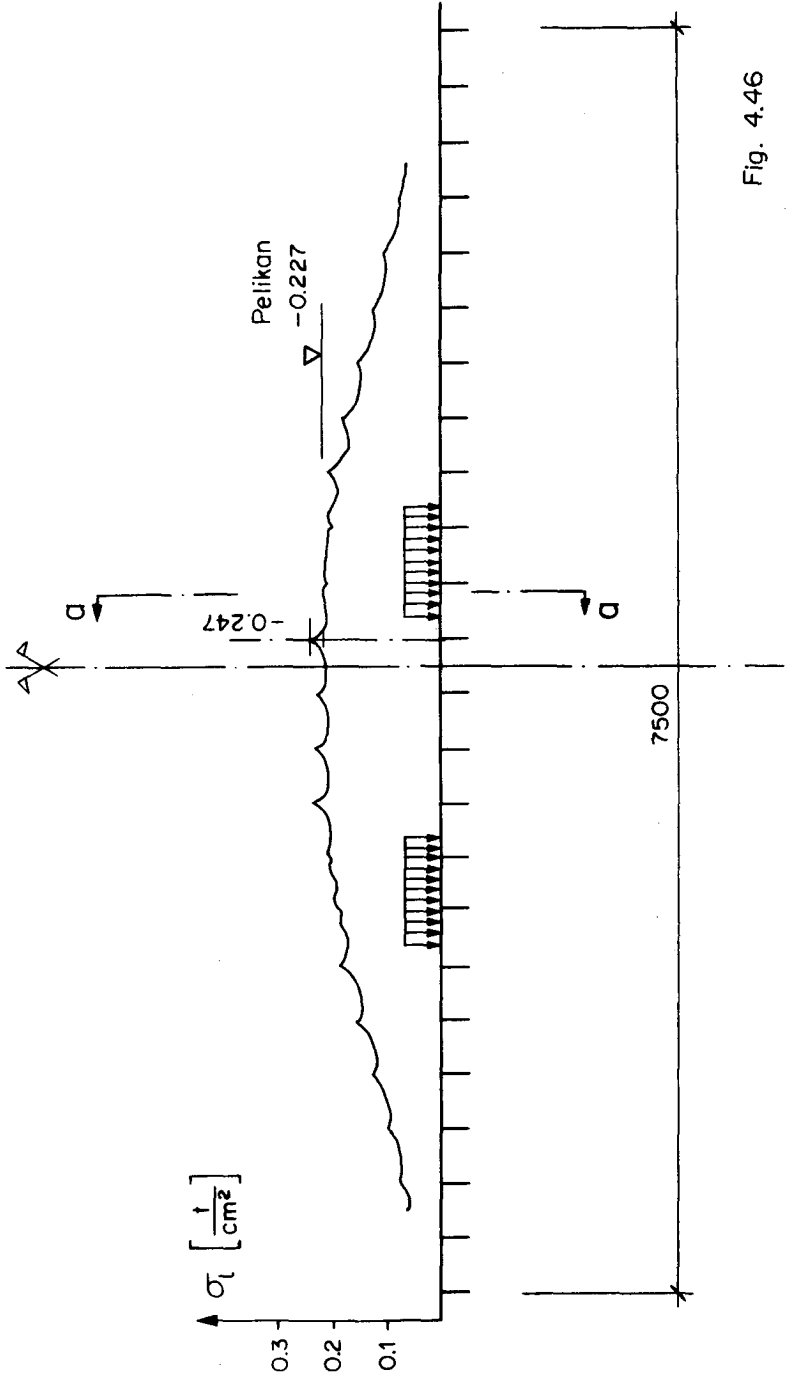


Fig. 4.46

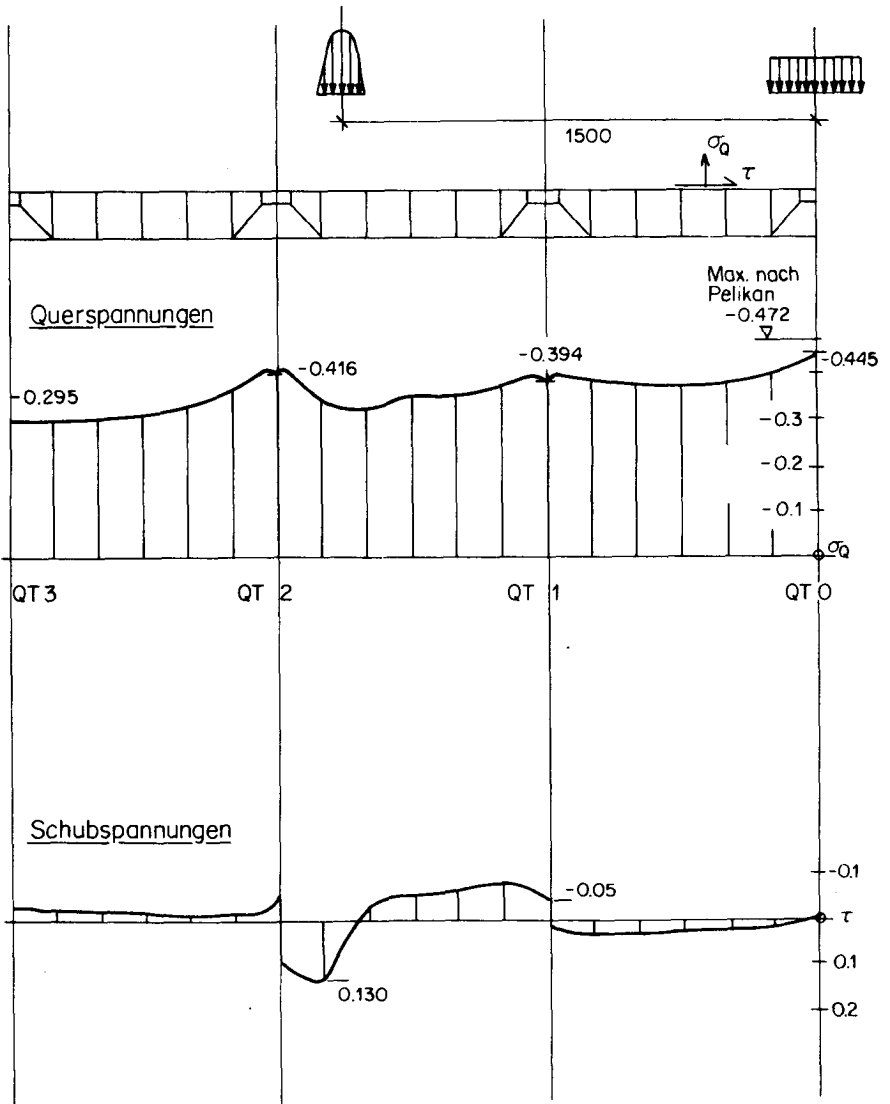


Fig. 4.47 Quer - und Schubspannungen im Blech Schnitt a-a

LITERATUR

- [1] Bosshard W.:  
"BASAR. Eingabekonvention und Programmbeschreibung"  
Institut für Baustatik und Stahlbau, ETH, Zürich (1972)
- [2] de Veubeke B.F., Zienkiewicz O.C.:  
"Strain Energy Bounds in Finite Element Analysis by  
Slab Analogy"  
J. of Strain Analysis, Vol. 2, No. 4, 1967, pp. 265 - 271
- [3] Mikhlin / Smolitskiy:  
"Approximate Methods for Solution of Differential and  
Integral Equations"  
American Elsevier, New York 1967
- [4] Pin Tong, Pian T.H.H.:  
"A Variational Principle and the Convergence of a Finite-  
Element Method Based on Assumed Stress Distribution"  
Int. J. Solids Structures, 1969, Vol. 5, pp. 463 - 472
- [5] Pian T.H.H., Pin Tong:  
"Basis of Finite Element Methods for Solid Continua"  
Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 1, pp. 3 - 28 (1969)
- [6] Bosshard W.:  
"Ein neues, vollverträgliches endliches Element für  
Plattenbiegung"  
Abhandlungen IVBH, Band I, Zürich 1968

- [7] Bell K.:  
"A Refined Triangular Plate Bending Finite Element"  
Int. J. Num. Meth. Eng. 1, 101 - 122 (1969). Auch in:  
"Analysis of thin Plates in Bending Using Triangular  
Finite Elements"  
Division of Structural Mechanics, The Technical Uni-  
versity of Norway, Trondheim, Feb. 1968
- [8] Visser W.:  
"The Finite Element Method in Deformation and Heat  
Conducting Problems"  
Diss. T.H. Delft, März 1968
- [9] Zlâmal M.:  
"On the Finite Element Method"  
Numer. Math. 12, 394 - 409 (1968)
- [10] Argyris H.H., Fried I., Scharpf D.W.:  
"The TUBA Family of Plate Elements for the Matrix  
Displacement Method"  
Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol. 72,  
August 1968
- [11] Goel J.-J.,:  
"Utilisation numérique de la méthode de Ritz, application  
au calcul de plaque"; Thèse de doctorat, Ecole poly-  
technique de l'Université de Lausanne, 1968.
- [12] Cowper G.R., Kosko E., Lindberg G.M., Olson M.D.:  
"Formulation of a New Triangular Plate Bending Element"  
Can. Aerospace Inst. Trans. 1,86 (1968)

- [13] Butlin G.A., Ford R.:  
"A Compatible Triangular Plate Bending Finite Element"  
University of Leicester, Eng. Dep. Report 68 - 15, 1968  
See also Int. J. Solids Structures, 6, 3, 323 - 333  
(1970)
- [14] Argyris J.H., Buck K.E.:  
"A Sequel to Technical Note 14 on the Tuba Family of  
Plate Elements"  
Journal Roy. Aeron. Soc. Vol. 72, 977-983 (1968)
- [15] Bergan P.G.:  
"Analysis of Plane Stress by the Finite Element Method.  
Triangular Element with 6 Parameters in each Node".  
Division of Structural Mechanics, The Technical Uni-  
versity of Norway, 1967
- [16] Andruszewicz S.:  
"Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Rahmentrag-  
werke vom Standpunkt der zweckmässigsten Wahl der Ueber-  
zähligen"  
Forscherarbeiten auf dem Gebiet des Eisenbetons, Heft  
XLIV, Seite 57; W. Ernst + Sohn, Berlin 1935.
- [17] Dallison K.J.:  
"Stress Analysis of Circular Frames in a Non-tapering  
Fuselage"  
J. Roy. Aeron. Soc. Vol. LVII, 1953, pp.151-176
- [18] Irons + Draper:  
"Lagrange Multiplier Techniques in Structural Analysis"  
Journal AIAA 3, 1965, pp. 1172-1175

- [19] Denke P.H.:  
"A Matrix Method of Structural Analysis"  
Proc. Second US National Congress of Appl. Mech.,  
ASME, pp. 445-451, June 1954
- [20] Robinson and Regl:  
"An Automated Matrix Analysis for general Plane Frames"  
J. Am. Helicopter Soc. 8, Oct.1963
- [21] S.W. Key:  
"A Convergence Investigation on the Direct Stiffness  
Method"  
Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, Seattle, 1966  
Dissertation Abstracts.Order No. 66-12.014
- [22] de Veubecke B.F.:  
"Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis"  
AGARDograph 72, Pergamon Press (1964) und:  
"Bending and stretching of Plates, special models for  
upper and lower bounds"  
I. Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-  
Patterson AF-Base, Oct. 1965
- [23] Morley L.S.D.:  
"A triangular equilibrium element with linearly varying  
bending moments for plate bending problems"  
J. Roy. Aeron. Soc. 71, 715-719 (1967)
- [24] Anderheggen E.:  
"Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis"  
I. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, August 1969 pp. 841-857
- [25] de Veubeke B.F., Sander G.:  
"An Equilibrium Model for Plate Bending"  
Int. J. Solids Struct. Vol. 4, No. 4. 1968 pp. 447-468

- [26] Watwood V.B. Jr., Hartz B.J.:  
"An Equilibrium Stress Field Model for Finite Element Solutions of Two-Dimensional Elastostatic problems"  
Int. J. Solids Structures, 1968, Vol. 4, pp. 857-873
- [27] Sander G.:  
"Application of the Dual Analysis Principle"  
Paper presented at IUTAM Colloquium on "High Speed Computing of Elastic Structures" Liège, Belgium,  
August 23 - 28, 1970
- [28] Washizu K.:  
"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"  
Pergamon 1968
- [29] Zurmühl:  
"Matrizen"  
Springer 1950
- [30] Felippa C.A.:  
"Refined Finite Element Analysis of Two-Dimensional Structures"  
Univ. of California, Dep. of Civil Eng., Report No. 66-22 (1966)
- [31] Argyris J.H., Bosshard W., Fried I., Hilber H.M.:  
"A Fully Compatible Plate Bending Element"  
ISD Report No. 42, Dec. 1967
- [32] Przemienieckj J.S.:  
"Matrix Structural Analysis of Substructures"  
AIAA Journal Vol. 1, No. 1, Jan 1963



- [33] Almond J.C., Skagestein G.M.:  
"Systematic Operations on Recursively Partitioned  
Matrices"  
RRZ-Report No. 12, Regionales Rechenzentrum Stuttgart,  
7 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 27
- [34] Jensen H.G., Parks G.A.:  
"Efficient Solutions for Linear Matrix Equations"  
Proc. of the American Society of Civil Engineers  
Journal of the Structural Division Vol. 96 No. ST1  
Jan. 1970
- [35] Comm. ACM 7 (1964) 10, p. 590-625
- [36] Dubas P., Hauri H.:  
"Die Autobahnbrücke über die Saane bei Freiburg"  
Schweizerische Bauzeitung 84, Heft 1, 1966
- [37] Kollbrunner C.F., Basler K.:  
"Torsion"  
Springer 1966
- [38] Czerwenka G., Schnell U.W.:  
"Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I"  
B.I - Hochschultaschenbücher 124/124a
- [39] Pelikan W., Esslinger M.:  
"Die Stahlfahrbahn; Berechnung und Konstruktion"  
M.A.N.-Forschungsheft Nr. 7/1957
- [40] Dubas P.:  
"Deux problèmes relatifs à l'étude des portiques  
étagés multiples"  
Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau,  
6. Kongress, Stockholm 1960 (Vorbericht).

- [41] Metzer W.:  
"Die mittragende Breite"  
Diss. TH Aachen, 1925
- [42] Timoshenko and Goodier:  
"Theory of Elasticity"  
Mc Graw-Hill/Kogakusha, Tokyo 1951.
- [43] Anderheggen E.:  
"Programme zur Methode der Finiten Elemente"  
Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 23, 1969.
- [44] Bauer F.L.:  
"Genauigkeitsfragen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme"  
ZAMM 46, Heft 7/1966 (409 - 421).