

Einfluss von Verschiebungen und verschiedenen Lagerungen auf das Tragverhalten von Stahlbetonstützen

Working Paper

Author(s):

Grenacher, Mathis

Publication date:

1976

Permanent link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-000747246>

Rights / license:

In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:

Bericht / Institut für Baustatik und Konstruktion ETH Zürich 61

**Einfluss von Verschiebungen und
verschiedenen Lagerungen auf das
Tragverhalten von Stahlbetonstützen**

Mathis Grenacher

Februar 1976
Bericht Nr. 61

**Einfluss von Verschiebungen und verschiedenen Lagerungen
auf das Tragverhalten von Stahlbetonstützen**

von

Dr. sc. techn. Mathis Grenacher

Institut für Baustatik und Konstruktion
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Zürich
Februar 1976

VORWORT

Bei langen, mehrfeldrigen Balkenbrücken aus Stahlbeton und Spannbeton werden im allgemeinen an den Stützenenden mehr oder weniger komplizierte Gelenkkonstruktionen eingebaut. Dadurch sollen Horizontalverschiebungen aus Temperatur, Kriechen und Schwinden möglichst zwängungsfrei aufgenommen werden. Solche Massnahmen werden mit elastizitätstheoretischen Ueberlegungen begründet.

In der vorliegenden Arbeit, welche als Dissertation ausgearbeitet wurde, untersucht Herr Grenacher den Einfluss solcher Gelenke auf die Tragfähigkeit und Stabilität. Er zeigt theoretisch, dass in vielen Fällen wohl die Zwängungsspannungen abgebaut, hingegen sowohl Tragfähigkeit wie auch Stabilität und damit die Sicherheit vermindert werden.

Es wäre erfreulich, wenn diese theoretischen Ergebnisse durch einige Versuche überprüft werden könnten, um nachher in der Praxis Anwendung zu finden. Die Elimination unnötiger Gelenke wird zu sichereren und wirtschaftlicheren Konstruktionen führen.

Zürich, Februar 1976

Prof. Dr. B. Thürlimann

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. PROBLEMSTELLUNG UND ZIELSETZUNG	1
2. VERFORMUNGSFAEHIGKEIT EINER EINFACHEN MODELLSTUETZE	6
2.1 Einfluss der Momenten-Krümmungs-Beziehung	6
2.2 Einfluss der Elementlänge auf die Berechnung	11
2.3 Folgerungen für die Untersuchungen von Stahlbetonstützen	13
3. SPANNUNGS-VERFORMUNGS-VERHALTEN VON STAHLBETON	14
3.1 Experimentelle Untersuchungen des Spannungs-Stauchungs- Verhaltens von Beton	14
3.2 Analytische Darstellung des Spannungs-Stauchungs-Verhaltens von Beton	20
3.3 Spannungs-Verformungs-Verhalten von Armierungsstahl	23
3.4 Zusammenfassung	25
4. MOMENTEN-KRUEMMUNGS-VERHALTEN	27
4.1 Dimensionslose Darstellung	27
4.2 Berechnungsgrundlagen	29
4.3 Diskussion des Momenten-Krümmungs-Verhaltens	30
5. BERECHNUNG VON STAHLBETONSTUETZEN	39
5.1 Linear-elastische Analyse	39
5.2 Nichtlineare, elastisch-plastische Analyse	44
6. EINGESPANNTE STAHLBETONSTUETZEN MIT AUFGEZWUNGENEN VERFORMUNGEN	49
6.1 Stützen mit elastischem Materialverhalten	49
6.2 Unelastisches Verformungsverhalten von Stahlbetonstützen unter der Annahme einer parabolisch-geraden Beton-Charakteristik	51
6.3 Unelastisches Verformungsverhalten von Stahlbetonstützen unter der Annahme einer parabolischen Beton-Charakteristik	55
7. ROTATIONSFAEHIGKEIT VON PLASTISCHEN GELENKEN BEI EINGESPANNTEN STUETZEN	60
7.1 Allgemeines	60
7.2 Ausbildung des plastischen Gelenkes	65
7.3 Rotation des plastischen Gelenkes und entsprechende Stützenkopfverschiebung Δ_p	67

	Seite
8. EINFLUSS DER STUETZENLAGERUNG AUF DIE STABILITAET VON STAHLBETONSTUETZEN	73
8.1 Stabilität der Einzelstütze	73
8.2 Gesamtstabilität	77
SCHLUSSFOLGERUNGEN UND ZUSAMMENFASSUNG	82
CONCLUSIONS ET RESUME	84
CONCLUSIONS AND SUMMARY	86
ANHANG: COMPUTER-PROGRAMM FUER DIE BERECHNUNG UNELASTISCHER RAHMEN NACH DER THEORIE 2. ORDNUNG	88
BEZEICHNUNGEN	98
LITERATURVERZEICHNIS	101

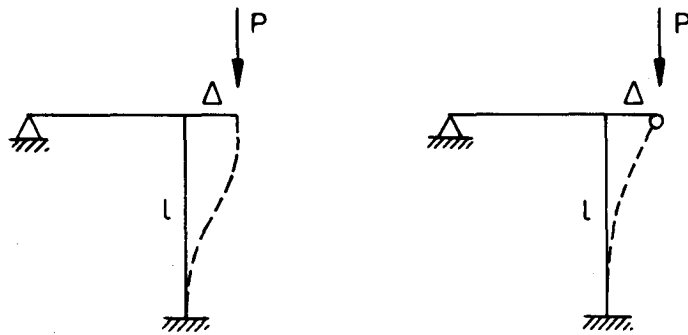
1. PROBLEMSTELLUNG UND ZIELSETZUNG

Die Frage der Stützenlagerung ist bei vielen Stahlbetonkonstruktionen eines der vordringlichsten Probleme. Zum Beispiel bei Brücken mit grossen Spannweiten sind die auftretenden Horizontalverschiebungen infolge Vorspannung, Kriechen, Schwinden, Temperaturänderungen, usw. von entscheidender Bedeutung für die Wahl der Lagerung der Stützen. Grosse horizontale Stützenkopfverschiebungen stellen bei eingespannten Stützen hohe Anforderungen an die Rotationsfähigkeit der Einspannbereiche oder machen Gelenkanschlüsse notwendig. Wird die Art der Stützenlagerung aufgrund elastischer Untersuchungen unter Einhaltung irgendwelcher zulässiger Spannungen bestimmt, so bedingen schon relativ kleine Verschiebungen Gelenkkonstruktionen. Diese haben aber verschiedene Nachteile:

- Sie stellen konstruktive Probleme und sind dementsprechend teuer.
- Je nach Konstruktionsart erfordern sie einigen Aufwand für den Unterhalt.
- Gelenke haben eine geringere Gesamtstabilität zur Folge und schwächen daher die Konstruktion.

Im Zusammenhang mit dem Problem der Lagerung bei aufgezwungenen Stützenkopfverschiebungen ist deshalb die Verformungsfähigkeit von Stahlbetonstützen zu untersuchen. Sie ist vor allem durch das Momenten-Krümmungs-Verhalten der Querschnitte beeinflusst. Die materialabhängigen Querschnittseigenschaften sind grossen Streuungen unterworfen. Diese Arbeit soll deshalb den Einfluss von verschiedenen extremen Materialeigenschaften, die das wirkliche Verhalten einschliessen, untersuchen. Es werden auch konstruktiv notwendige Massnahmen diskutiert, die zur Erreichung eines bestimmten Materialverhaltens erforderlich sind.

Im weiteren werden zur Illustration zwei Stützen 1 und 2, wie sie in Bild 1.1 gezeigt sind, miteinander verglichen. Die Stütze 1 ist beidseitig eingespannt, die Stütze 2 hingegen ist einseitig gelenkig gelagert. Von besonderem Interesse ist einerseits der Einfluss der mit unterschiedlicher Beanspruchung veränderlichen Biegesteifigkeit (Kapitel 6) und andererseits die Ausdehnung und damit auch die Rotationsfähigkeit des plastischen Gelenkes bei der Einspannung (Kapitel 7). Der Einfluss der beiden Lagerungen auf die Stabilität des Tragwerkes ist in Kapitel 8 diskutiert.



Stütze 1

Stütze 2

beidseitig eingespannt

einseitig gelenkig

Bild 1.1: Mögliche Stützenlagerungen

Die Berechnung des Trag*- und Verformungsverhaltens von schlanken Stützen führt zu Gleichgewichtsproblemen mit oder ohne Verzweigung. Die in Bild 1.2 gezeigte, zentrisch belastete Stütze zeichnet sich durch eine Verzweigung des Gleichgewichtes aus.

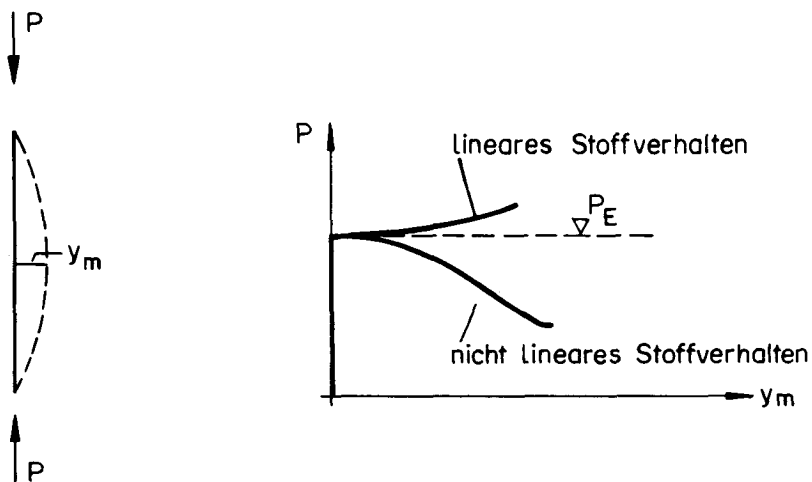


Bild 1.2: Zentrisch belastete Stütze

*) Der Begriff "Traglast" wird in dieser Arbeit nicht im Sinne der einfachen Plastizitätstheorie verwendet. Die Traglast ist vielmehr im eigentlichen Sinne des Wortes die maximale Last, der die Stütze widerstehen kann, bevor sie instabil wird oder durch Materialversagen die Tragfähigkeit verliert.

Es handelt sich dabei um ein Eigenwertproblem. Infolge des Einflusses der Verformungen auf das Gleichgewicht nehmen die Auslenkungen oberhalb der Eulerlast auch bei linearem Stoffverhalten nicht proportional zu den Lasten zu. In der Praxis muss immer mit unbeabsichtigten Exzentrizitäten und Imperfektionen gerechnet werden. Diese haben eine nicht zu vernachlässigende Verminderung der Traglast zur Folge. Es handelt sich im allgemeinen nicht um Verzweigungs-, sondern um Maximaprobleme. Bild 1.3 zeigt das Verhalten einer unter gleicher Exzentrizität belasteten Stütze. Lineares Stoffverhalten führt zu einer asymptotischen Annäherung an die elastische Knicklast. Für die praktische Anwendung kann man eine Grenzspannung definieren, die nicht überschritten werden darf. Nichtlineares Stoffverhalten kann zu einem Stabilitätsproblem führen, wenn die Last-Auslenkungskurve nach einem Maximum wieder abnimmt.

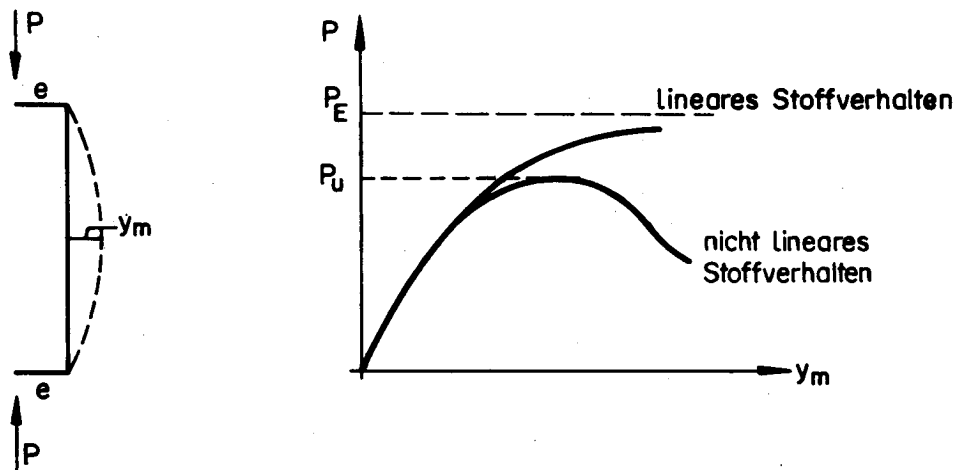


Bild 1.3: Exzentrisch belastete Stütze

Grundlage für die Berechnung von Stahlbetonstützen ist die Formulierung der Stoffgesetze (Kapitel 3) und die Ermittlung der Last-Verformungseigenschaften der Querschnitte (Kapitel 4). R.F. Warner und J.G. McGregor haben dieses Vorgehen in [1] umfassend beschrieben. Die Stoffgesetze für Beton und Armierungsstahl sind in den Bildern 1.4 und 1.5 dargestellt. Die nichtlineare unelastische Beziehung für unarmierten Beton kann näherungsweise zum Beispiel als nichtlineare elastisch-plastische Beziehung analytisch erfasst werden. Bei der Armierung wird zwischen kaltverformtem und naturhartem Stahl unterschieden. Mit den gegebenen Stoffgesetzen können die Last-Verformungseigenschaften der Querschnitte bestimmt werden. Schematisch sind die Momen-

ten-Krümmungs-Beziehungen für verschiedene Achsiallasten in Bild 1.6 gegeben. Diese Kurven haben je nach der Grösse der Achsiallast ein mehr oder weniger

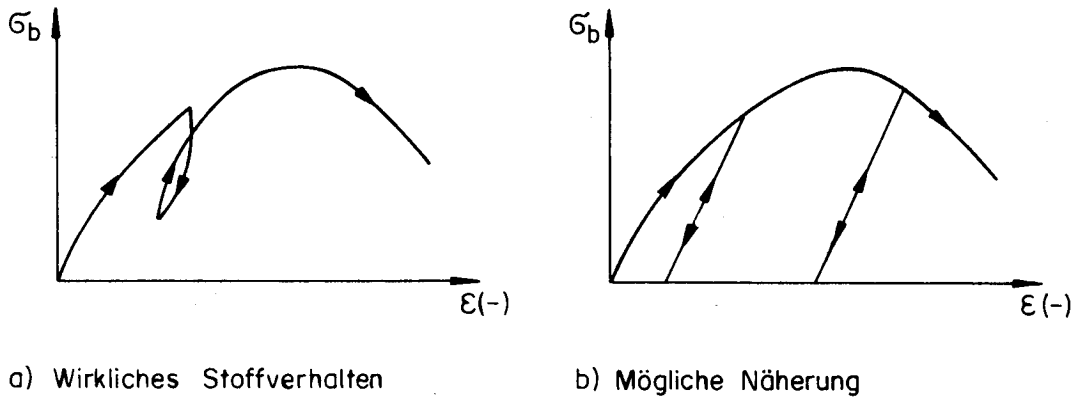


Bild 1.4 : Spannungs - Stauchungs-Diagramm von unarmiertem Beton

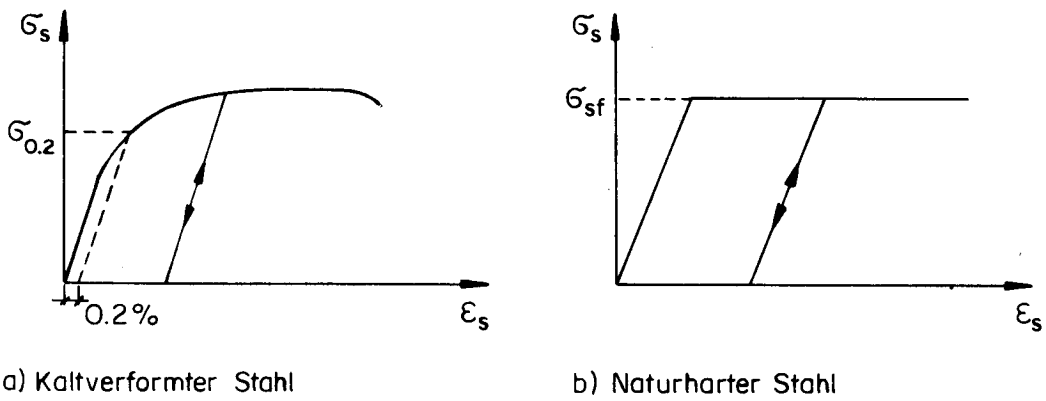


Bild 1.5 : Spannungs - Dehnungs-Diagramm von Armierungsstahl

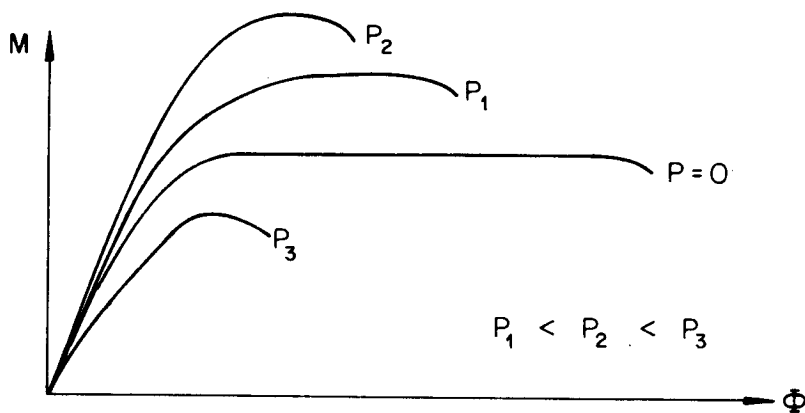


Bild 1.6: Momenten - Krümmungs - Beziehungen

ausgeprägtes Maximum, nach welchem M mit zunehmendem ϕ wieder abfällt. Die maximalen Momente und die entsprechenden Normalkräfte können für einen gegebenen Querschnitt in einem N - M -Interaktionsdiagramm (Bild 1.7) dargestellt werden. Es bildet die Grundlage für die Bruchbemessung. In Bild 1.7 sind auch mögliche N - M -Beziehungen im massgebenden Schnitt einer exzentrisch belasteten Stütze eingezeichnet. In dieser Darstellung lässt sich ein Materialversagen eindeutig vom Stabilitätsversagen unterscheiden.

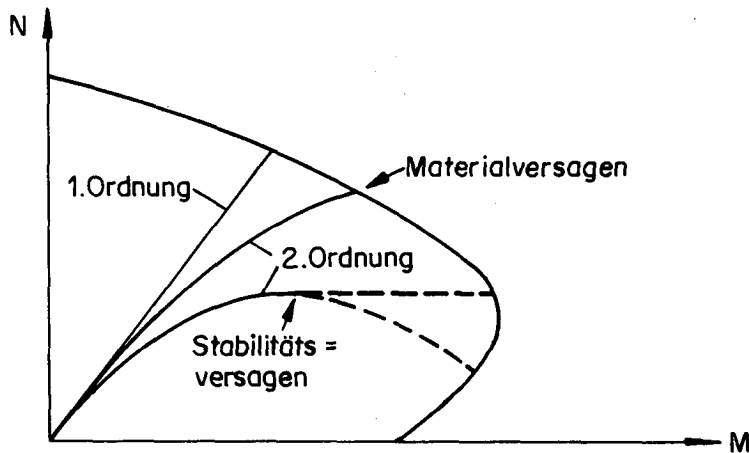


Bild 1.7 : Normalkraft - Momenten - Interaktionsdiagramm

Die Traglast- und Verformungsberechnung von Stahlbetondruckgliedern stellt zwei grundsätzliche Probleme:

- Das Materialverhalten ist nicht linear.
- Der Einfluss der Verformungen auf das Gleichgewicht bewirkt eine geometrische Nichtlinearität (Theorie 2. Ordnung).

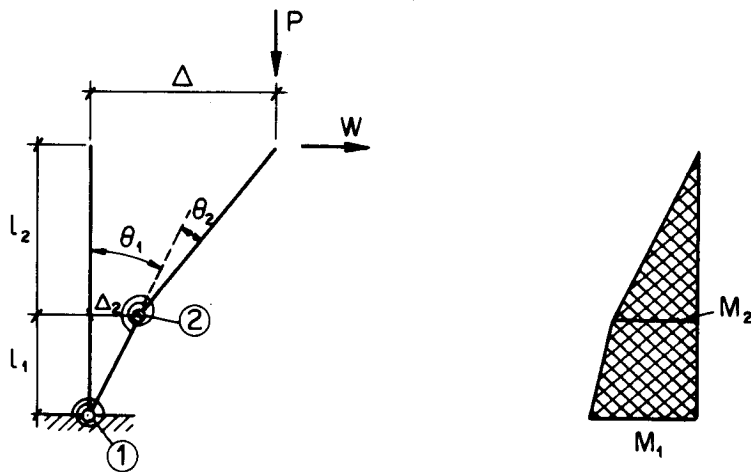
Diese Einflüsse können "exakt" nur mit Hilfe numerischer Rechenverfahren berücksichtigt werden. Ein entsprechendes Computerprogramm für ebene Stahlbetonrahmen wurde für diese Arbeit entwickelt und ist im Anhang kurz beschrieben. Es ist bereits in [2] und [3] veröffentlicht worden. Für die Praxis genügen vielfach einfache Näherungsmethoden. Diese basieren vor allem auf Näherungsberechnungen für die über die Länge des Druckgliedes als konstant angenommene Biegesteifigkeit [4], [5]. Das grundsätzliche Verhalten von Stahlbetonstützen kann an einer einfachen Modellstütze studiert werden und soll dieser Arbeit im folgenden Kapitel vorangestellt werden.

2. VERFORMUNGSFAEHIGKEIT EINER EINFACHEN MODELLSTUETZE

2.1 Einfluss der Momenten-Krümmungs-Beziehung

Modell

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, bietet die Untersuchung des Verformungs- und Tragverhaltens infolge Nichtlinearität der Stoffgesetze und der Geometrie (Theorie 2. Ordnung) zwei grundsätzliche Schwierigkeiten, die für eine genaue Berechnung numerische Verfahren erfordern. Der prinzipielle Zusammenhang zwischen dem Momenten-Krümmungs-Verhalten der Querschnitte und dem Verformungsverhalten von Stützen kann aber auf einfache Art und Weise an einem Modell untersucht werden [6]. Das in Bild 2.1 gezeigte Federmodell repräsentiert eine einseitig eingespannte Stütze. Aus Symmetriegründen gelten



Federmodell

Momentenbeanspruchung

Bild 2.1: Einfaches Modell für Stahlbetonstütze

die daraus abzuleitenden Schlüsse auch für beidseitig eingespannte Stützen. Das Modell besteht aus zwei Elementen, und seine Verformungsmöglichkeiten sind beschränkt auf die beiden Rotationsfedern 1 und 2.

Für eine gegebene Achsiallast P soll die maximale Horizontalverschiebung Δ des Stützenkopfes bestimmt werden. Diese P - Δ -Beziehung ist abhängig vom Momenten-Krümmungs-Verhalten der Elementquerschnitte. Die Momentenbeanspruchung des Federmodelles ist ebenfalls in Bild 2.1 gezeigt. Der am meisten beanspruchte Querschnitt ist bei der Einspannstelle. Dort muss die grösste Anforderung an die Rotationsfähigkeit des Querschnittes gestellt werden. Deshalb soll für die nachfolgenden Ueberlegungen immer von den Krümmungen resp.

Verdrehungen θ im Einspannquerschnitt ausgegangen werden. Diese werden bei der Untersuchung der Verformungseigenschaften stetig erhöht. Es handelt sich also um einen verformungsgesteuerten Rechenvorgang.

Momenten-Verdrehungs-Beziehungen

Bild 2.2 zeigt vier schematische Momenten-Verdrehungs-Beziehungen für eine Last $p = P/B \cdot H \cdot \beta = 0,3$ in dimensionsloser Darstellung. Es stellt sich nun die Frage, welchen Einfluss das verschiedene Materialverhalten auf die Auslenkungen hat. Die vier Kennlinien unterscheiden sich nur im Bereich grosser Verformungen nach Ueberschreiten des maximalen Momentes m_u . Dieser Bereich ist für Stahlbeton grossen Streuungen unterworfen und ist von der Art und Weise wie die Last aufgebracht wird sowie von der Anordnung der Armierung stark abhängig. Die getroffenen Annahmen sind sehr extrem und schliessen das wirkliche Materialverhalten ein. Die Verformungen werden für die Ueberlegungen am Modell nicht begrenzt. Hingegen sind für die Berechnung der möglichen Stützenkopfauslenkungen von Stahlbetonstützen die maximal erreichbaren Verformungen natürlich von entscheidender Bedeutung. Sie werden in den folgenden Kapiteln, in denen das wirkliche Materialverhalten untersucht wird, diskutiert.

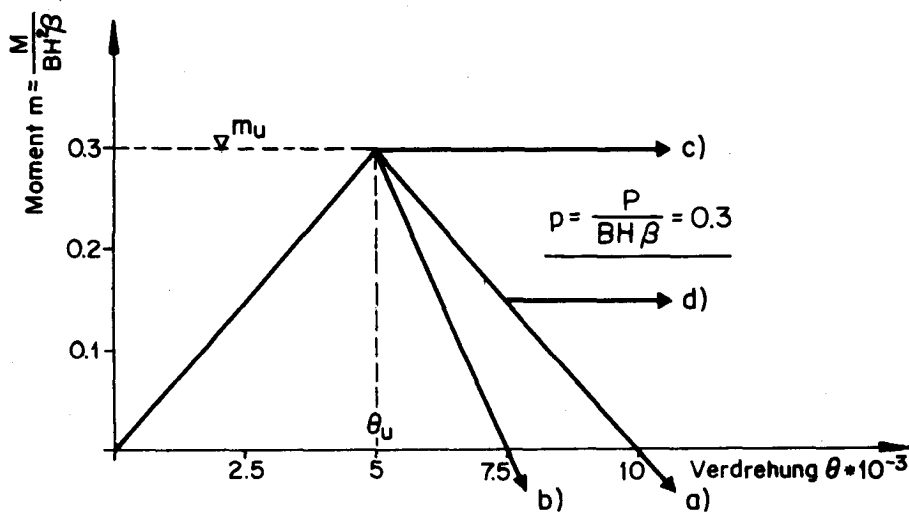


Bild 2.2: Schematische Momenten-Verdrehungs - Beziehungen

Rechnungsgang

Die in Bild 2.2 gezeigten linearen m - θ -Beziehungen können wie folgt formuliert werden:

$$m_i = \frac{M_i}{B \cdot H^2 \cdot \beta} = a_i \cdot \theta_i \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

$$\text{wobei: } a_i = \frac{k}{\theta_i} + a$$

k und a sind stückweise konstant und können aus den angenommenen m - θ -Beziehungen bestimmt werden. Mit dem Ansatz (2.1) für das Biegemoment m berechnet sich die Horizontalkraft w zu:

$$w = \frac{W}{B \cdot H \cdot \beta} = \frac{m_1 - p \cdot (\Delta/H)}{(\ell/H)} = \frac{a_1 \cdot \theta_1 - p \cdot (\Delta/H)}{(\ell/H)} \quad (2.2)$$

und damit das Biegemoment m_2 zu:

$$m_2 = w \cdot \frac{\ell_2}{H} + p \cdot \frac{(\Delta - \Delta_2)}{H} = a_2 \cdot \theta_2 \quad (2.3)$$

$$\text{wobei: } \Delta_2 = \theta_1 \cdot \frac{\ell_1}{H}$$

Mit (2.2) kann aus (2.3) der Verdrehungswinkel θ_2 der Feder 2 bestimmt werden. Damit ergibt sich die gesuchte Stützenkopfauslenkung zu:

$$\frac{\Delta}{H} = \theta_1 \cdot \frac{\ell}{H} + \theta_2 \cdot \frac{\ell_2}{H}$$

oder:

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{\frac{\ell}{H} - \frac{p}{a_2} \cdot \frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{H^2} + \frac{(\ell_2/H)^2 \cdot a_1}{(\ell/H) \cdot a_2}}{\frac{\ell}{H} - \frac{p}{a_2} \cdot \frac{\ell_1 \cdot \ell_2}{H^2}} \cdot \frac{\ell}{H} \cdot \theta_1 \quad (2.4)$$

Für die Momenten-Verdrehungs-Beziehungen nach Bild 2.2 und die Elementlängen

$$\left. \begin{array}{l} \ell_1/H = 2,5 \\ \ell_2/H = 7,5 \end{array} \right\} \rightarrow \ell/H = 10 \quad (2.5)$$

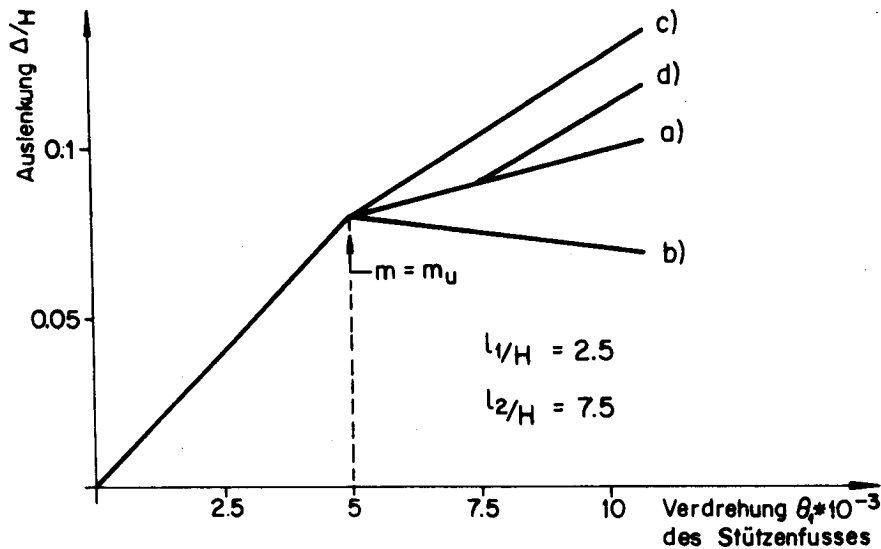


Bild 2.3: Stützenkopfverschiebungen

ergibt die Gleichung (2.4) die in Bild 2.3 gezeigten Stützenkopfverschiebungen.

Bei der Auswertung der Gleichung (2.4) muss berücksichtigt werden, dass das Biegemoment m_1 am Stützenfuss infolge der Achsiallast p und der Horizontalkraft w immer grösser ist als das Moment m_2 bei Feder 2. Nach Ueberschreiten des maximalen Momentes m_u am Stützenfuss nimmt auch das Moment m_2 wieder ab oder bleibt konstant. Die Verdrehung θ_2 kann nicht mehr weiter zunehmen. Im vorstehenden Rechenbeispiel ist deshalb $\theta_2 < 5 \cdot 10^{-3}$. Somit ist a_2 konstant und unabhängig von θ_2 . a_2 berechnet sich im vorliegenden Fall zu

$$a_2 = \frac{m_u}{\theta_u} = \frac{0,3}{5 \cdot 10^{-3}} = 60 \quad (2.6)$$

Für $\theta_1 \leq \theta_u$ ($m_1 \leq m_u$) ist auch $a_1 = \text{konstant} = 60$.

Für grössere Verdrehungen am Stützenfuss ($\theta_1 > \theta_u$) ist a_1 gemäss (2.1) abhängig von θ_1 . Der Ausdruck (2.4) für Δ/H ist trotzdem auch für diesen Fall linear, da a_1 nur als Produkt von $a_1 \cdot \theta_1$ vorkommt. Die Δ/H - θ_1 -Beziehung ist also für das in Bild 2.2 angenommene Materialverhalten und für gegebenes p und l/H linear.

Einfluss der M- θ -Charakteristik auf die Stützensauslenkungen

Die in Bild 2.3 gezeigten Stützenkopfverschiebungen a) bis d) wurden mit den entsprechenden Materialkennlinien von Bild 2.2 berechnet.

Bis zum Erreichen des maximal möglichen Einspannmomentes m_U sind die $\Delta/H-\theta_1$ -Beziehungen entsprechend der Annahmen für das Materialverhalten identisch. Bei weiterer Verformung im Einspannquerschnitt nimmt das Einspannmoment gemäss Kennlinie a) wieder ab. Aus den bereits bekannten Gründen muss auch das Moment im Stützeninnern kleiner werden, was nur möglich ist bei einer Abnahme der Krümmungen resp. Verdrehungen. Die Biegelinie streckt sich also bei weiterer Stützenfussverdrehung. Dies führt zu einer verminderten Zunahme der maximalen Auslenkungen. Für einen steileren Momentenabfall gemäss Kennlinie b) ist dieser Effekt noch deutlicher und die Auslenkungen können trotz weiterer Verdrehung beim Einspannquerschnitt sogar abnehmen. Ein horizontaler Momentenverlauf für grosse Verdrehungen gemäss Kennlinie c) oder d) bewirkt ein "Erstarren" der Biegelinie. Auch die Momente im Stützeninnern müssen konstant bleiben. Die Stütze verhält sich daher wie ein gekrümmter Pendelstab und dreht sich nur noch um den Einspannquerschnitt. Bei weiterer Stützenfussverdrehung θ_1 nehmen die Auslenkungen wieder vermehrt zu. Diese unterschiedliche Veränderung der Auslenkungen ist nur möglich durch die Verformungssteuerung bei der Einspannstelle. Wird die maximale Auslenkung Δ/H erzwungen und stetig vergrössert, so muss die Rotation bei der Einspannstelle sprunghaft zunehmen. Dieser Vorgang entspricht einem Durchschlagen und ist vergleichbar mit einer "Rutschkupplung", die nach dem Erreichen der Haftreibung plötzlich nachlässt bis die Gleitreibung massgebend wird.

In Bild 2.4 sind die Stützensauslenkungen über die ganze Stützenlänge für die Materialkennlinie b) gegeben. Die Stützenverdrehung θ_1 wurde stetig gesteigert von $\theta_1 = 0,0025$ bis $0,01$. Bis zum maximalen Moment m_U am Stützenfuss bei $\theta_1 = 0,005$ nehmen die Verdrehungen θ_2 bei der Feder 2 und entsprechend auch die Stützenkopfauslenkungen Δ/H zu. Für grössere Verdrehungen θ_1 nimmt das maximale Moment gemäss der Kennlinie b) wieder ab. Das dadurch bedingte "Strecken" der Biegelinie ist ersichtlich aus der abnehmenden Verdrehung θ_2 . Diese bewirkt in diesem Rechenbeispiel sogar ein Abnehmen der Stützenkopfauslenkungen. Für $\theta_1 = 0,0075$ ist $m_1 = 0$ und damit $\theta_2 = 0$. Unter der Annahme, dass für grössere θ_1 keine Momente m_1 mehr auftreten, "erstarrt" die Biegelinie, und die Stütze dreht sich wie ein Pendelstab um die Einspannstelle 1. Dadurch nehmen die Stützenkopfauslenkungen wieder zu. In Bild 2.4 ist auch der extreme Fall eingezeichnet, wonach die Momente m_1 gemäss Kennlinie b) negativ werden können. Dabei wird auch die Verdrehung θ_2 negativ und die Stützenkopfauslenkungen nehmen weiter ab.

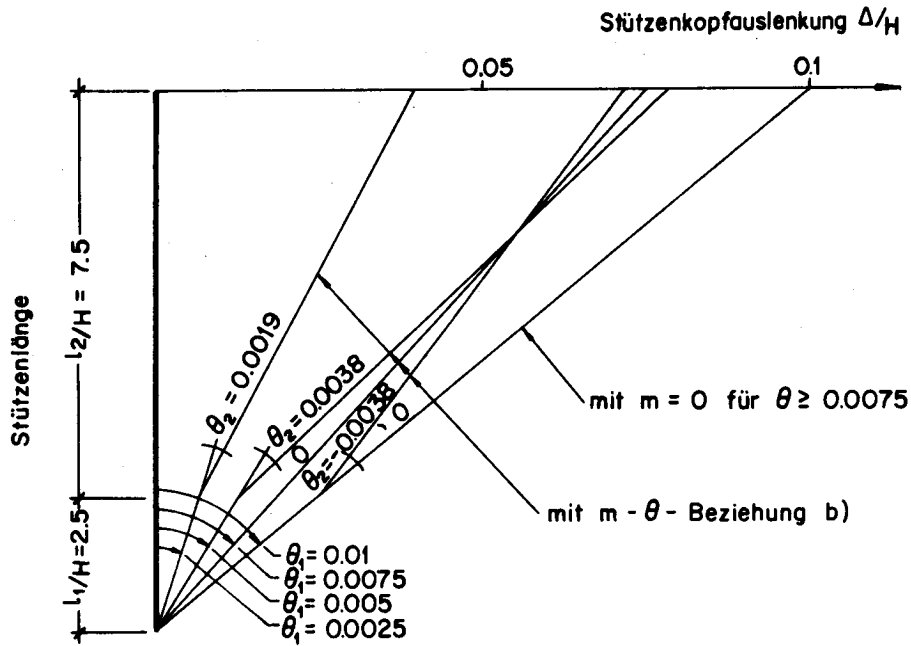


Bild 2.4: Stützensauslenkungen

2.2 Einfluss der Elementlänge auf die Berechnung

Bild 2.5 zeigt die Stützenkopfverschiebungen, die mit denselben $m-\theta_1$ -Beziehungen (Bild 2.2) berechnet wurden wie diejenigen von Bild 2.3. Hingegen wurde das Verhältnis der Elementlängen des Federmodelles l_1 zu l_2 geändert.

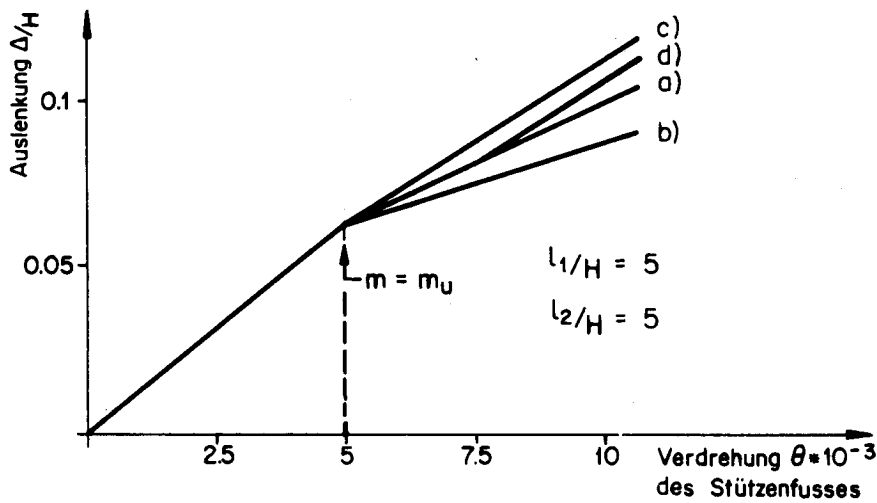


Bild 2.5: Stützenkopfverschiebungen

Für die Berechnungen zu Bild 2.5 wurden die Elementlängen zu

$$\left. \begin{array}{l} \ell_1/H = 5 \\ \ell_2/H = 5 \end{array} \right\} \ell/H = 10 \quad (2.7)$$

angenommen. Ein Vergleich mit Bild 2.3 zeigt, dass die Elementlängen von grosser Bedeutung sind.

Eine grosse Elementlänge ℓ_1 und eine entsprechend kleinere Elementlänge ℓ_2 hat im Bereich zunehmender Momente zur Folge, dass sich die Stütze weniger krümmt, da der Verdrehungswinkel θ_2 weniger Einfluss hat. Die Stützensauslenkungen sind deshalb für $\theta_1 < \theta_u = 0,005$ kleiner in Bild 2.5 als in Bild 2.3.

Im Bereich grosser Verdrehungen und abnehmendem Momentenverlauf gemäss Materialkennlinien a) und b) werden die Stützenkopfauslenkungen grösser für ein grosses Element ℓ_1 . Dies ist der Fall, da das "Strecken" der Stütze weniger ausgeprägt und dementsprechend die dadurch bedingte verringerte Zunahme oder Abnahme der Auslenkungen kleiner ist.

Im Bereich des horizontalen Momentenverlaufes ist die Elementlänge ohne Einfluss auf die Auslenkungen, da die "erstarrte" Stütze sich wie ein Pendelstab nur noch um den Stützenfuss dreht.

Für numerische Rechenverfahren ist die Wahl der Elemententeilung von grosser Bedeutung.

Neben den oben beschriebenen Einflüssen der Elementlänge ist dieselbe besonders wichtig, wenn die Verdrehungswinkel durch Integration der Krümmungen über die Elementlängen bestimmt werden. Entscheidend wird dieser Einfluss im Fliessbereich, in dem die Krümmungen ausserordentlich stark zunehmen können.

2.3 Folgerungen für die Untersuchungen von Stahlbetonstützen

Aufgrund dieser einfachen Ueberlegungen am Federmodell können zusammenfassend folgende Feststellungen über das Verformungsverhalten von eingespannten Stahlbetonstützen gemacht werden:

- Die Momenten-Verdrehungs-, resp. Krümmungs-Beziehung ist von zentraler Bedeutung bei der Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stützen.
- Abnehmender Momentenverlauf bei zunehmender Verformung, wie er für Stahlbeton bei grossen Stauchungen vorkommt, bewirkt ein "Strecken" der Stütze und damit eine verringerte Zunahme der Stützenkopferschiebung bei weiterer Rotation am Stützenfuss.
- Ein horizontaler Ast des Momenten-Krümmungsverhaltens bewirkt ein "Erstarren" der Stütze. Diese biegt sich nicht mehr weiter und dreht sich wie ein Pendelstab um den Stützenfuss.
- Die Wahl der Elementlängen beeinflusst die numerische Computerberechnung. Für zunehmenden Momentenverlauf ergibt die Berechnung mit kleinen Elementen grössere Auslenkungen als die Berechnung mit grossen Elementen. Für abnehmenden Momentenverlauf sind die Verhältnisse umgekehrt. Für konstanten Momentenverlauf ist die Elementeinteilung ohne Einfluss auf die Verformungsberechnung.
- Wird hingegen der Drehwinkel θ_1 beim Stützenfuss durch Integration der Krümmungen über die Länge des untersten Elementes bestimmt, so ist dieselbe auch im Bereich konstanter Momente (Fliessbereich) ausserordentlich wichtig. In diesem Fall muss die Länge des untersten Elementes dem Fliessbereich angepasst werden.

3. SPANNUNGS-VERFORMUNGS-VERHALTEN VON STAHLBETON

Das Spannungs-Verformungs-Verhalten von Beton und Armierungsstahl kann experimentell bestimmt werden. Die wichtigsten Einflüsse auf diese Beziehungen, wie sie schematisch in den Bildern 1.4 und 1.5 gegeben sind, sollen in diesem Kapitel diskutiert werden.

Das wirkliche, nicht lineare Verhalten von Stahlbeton hingegen kann nur näherungsweise aus den Spannungs-Verformungs-Beziehungen von Beton und Stahl ermittelt werden. Die beiden Materialien stehen im Verbund miteinander und beeinflussen sich gegenseitig. Die Armierung verändert den Spannungszustand im Beton, was einen entscheidenden Einfluss auf das Verformungsverhalten zur Folge hat. Zum Beispiel verformt sich der von der Querarmierung umgebene Kern eines Stützelementes nicht gleich wie die Randzonen. Andererseits behindert der die Armierung umgebende Beton ein seitliches Ausknicken der Druckstäbe.

Das Ziel dieser Arbeit ist vor allem die Untersuchung von eingespannten Stützen bei grossen horizontalen Stützenkopfverschiebungen. Deshalb ist das Materialverhalten unter extrem hohen Verformungen von besonderem Interesse für diese Untersuchungen.

3.1 Experimentelle Untersuchungen des Spannungs-Stauchungs-Verhaltens von Beton

Das Spannungs-Stauchungs-Verhalten von Beton wird vor allem von der Betonfestigkeit, dem Verformungsgradienten, der Belastungsgeschwindigkeit, der Lastdauer und der Armierungsverteilung beeinflusst. In verschiedenen Forschungsinstituten wurden experimentelle Untersuchungen dieser Einflüsse durchgeführt. Einige für diese Arbeit wichtige Versuche sollen im Folgenden zusammengestellt werden.

Stauchungsgeschwindigkeit und Verformungsgradient

In [7] gibt Ch. Rasch Resultate seiner Versuche an unarmierten, zentrisch gedrückten Betonprismen, die er mit verschiedenen konstanten Stauchungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}$ geprüft hat. Aus Bild 3.1 ist ersichtlich, dass höhere Stauchungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}$ einen steileren Anstieg der σ_b - ϵ_b -Beziehungen, höhere Maximalspannungen und kleinere dazugehörige Stauchungen zur Folge haben. Für kleine Dehngeschwindigkeiten nimmt die Bruchstauchung und damit die Duktilität des Betons zu.

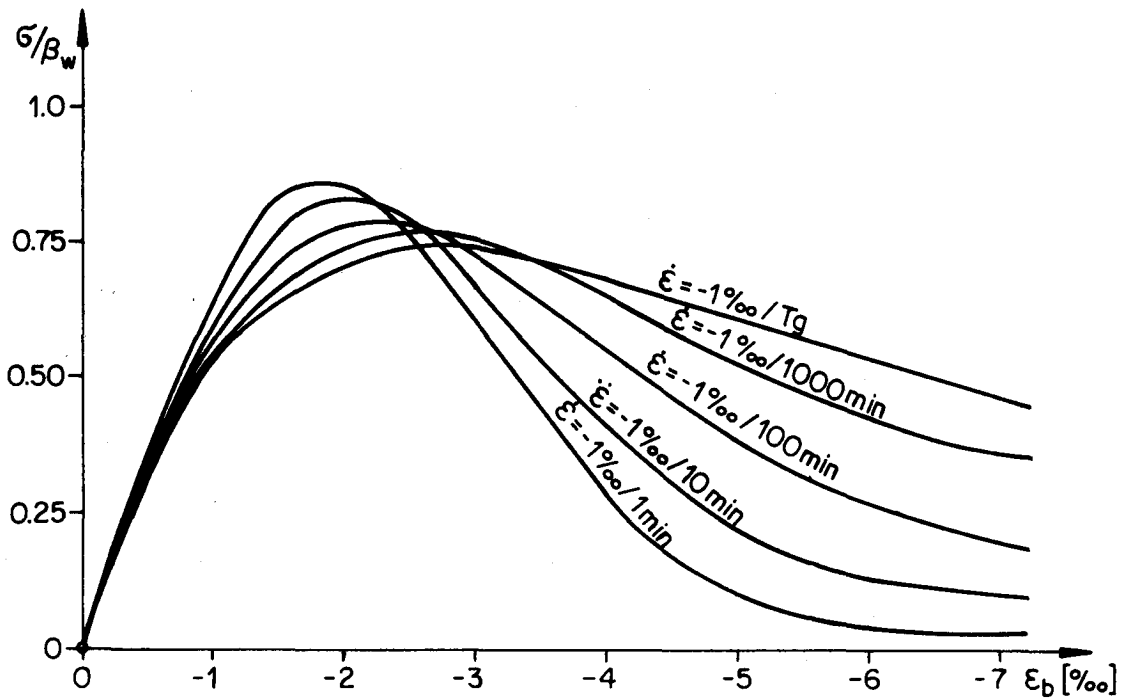
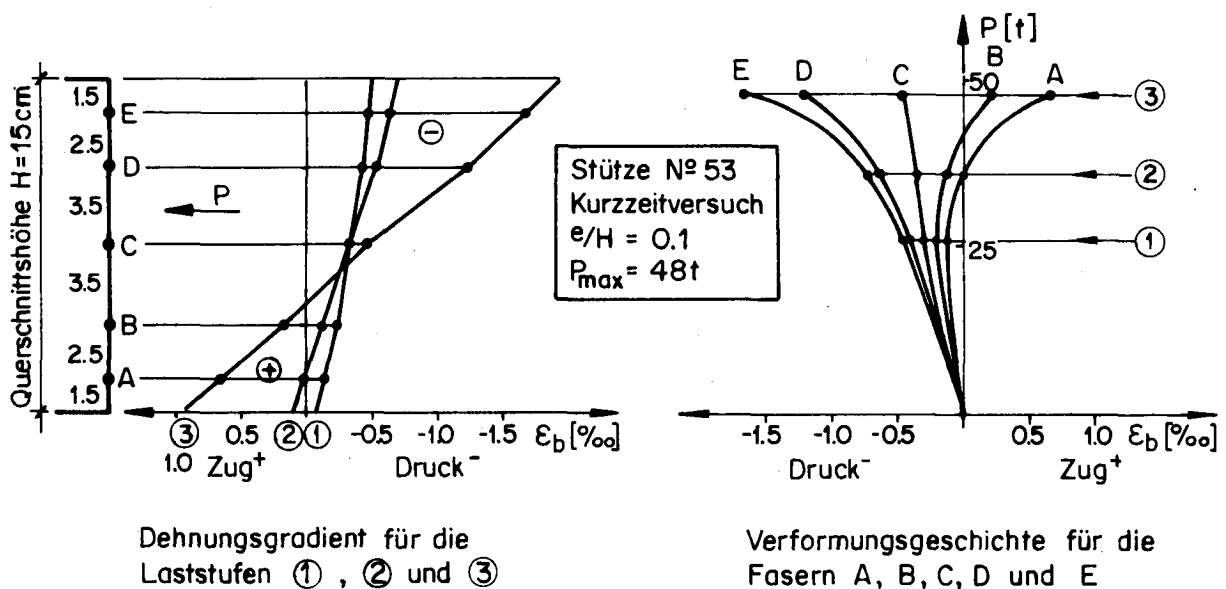


Bild 3.1: $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramme für verschiedene Stauchungsgeschwindigkeiten [7]

Das Spannungs-Verformungs-Verhalten eines Stützelementes kann nicht einem einzelnen $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm entnommen werden. Je nach Verformungsgradient werden die Fasern über die Querschnittshöhe mit unterschiedlicher Geschwindigkeit verformt. Entsprechend den obigen Aussagen (Bild 3.1) führt dies zu verschiedenen $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagrammen für die einzelnen Querschnittsfasern. Dazu kommt, dass die Verformungsgeschichte der einzelnen Fasern sehr unterschiedlich ist. Als Beispiel zeigt Bild 3.2 Verformungsmessungen, wie sie bei den



Dehnungsgradient für die Laststufen ①, ② und ③

Verformungsgeschichte für die Fasern A, B, C, D und E

Bild 3.2: Verformungen einzelner Querschnittsfasern für verschiedene Laststufen (Zürcher Stützenversuche [8])

Zürcher Stützenversuchen [8] durchgeführt wurden. Die Fasern (E,D) der Druckseite werden mit zunehmender Achsialkraft P immer stärker gestaucht. Die Fasern (A,B) der Zugseite werden mit zunehmendem P nach einer anfänglichen Stauchung entlastet und für grosses P gedehnt. Die Verformungen der Faser (C) in Querschnittsmitte bleiben nach einer anfänglichen Stauchung unabhängig von der Achsiallast P ungefähr konstant. Neben der unterschiedlichen Stauchungsgeschwindigkeit haben damit auch der Spannungsabfall bei konstanten Verformungen und bei Entlastung die mit den Verformungen linear abnehmenden Spannungen einen wesentlichen Einfluss auf das σ_b - ϵ_b -Diagramm. Einer bestimmten Verformung kann deshalb ohne genaue Kenntnis der Beanspruchungsgeschichte keine eindeutige Spannung zugeordnet werden.

Es ist anzunehmen, dass die weniger beanspruchten Fasern eines Querschnittes die stärker beanspruchten Fasern etwas aussteifen. Verschiedene Versuchsergebnisse ergeben z.T. unterschiedliche Aussagen über die dadurch bedingte Erhöhung der maximal erreichbaren Spannungen. Hingegen lässt sich mit Sicherheit feststellen, dass die Bruchstauchung für exzentrisch beanspruchte Elemente im Vergleich zu zentrisch beanspruchten grösser ist.

Querarmierung

In Stützen wird das Verformungsverhalten des Betons stark beeinflusst durch die Querarmierung. Sowohl eine Spiralarmierung wie auch eine Bügelarmierung verursacht im Kernbeton einen dreidimensionalen Spannungszustand. Die durch die Längsstauchungen bedingten Querdehnungen werden durch die Querarmierung behindert. Als Reaktion dazu baut sich ein Querdruck auf den Kernbeton auf. Dieser hat ein unterschiedliches Spannungs-Stauchungs-Verhalten in Kern und Ueberdeckung zur Folge. Bild 3.3 zeigt schematisch die Verhältnisse unter

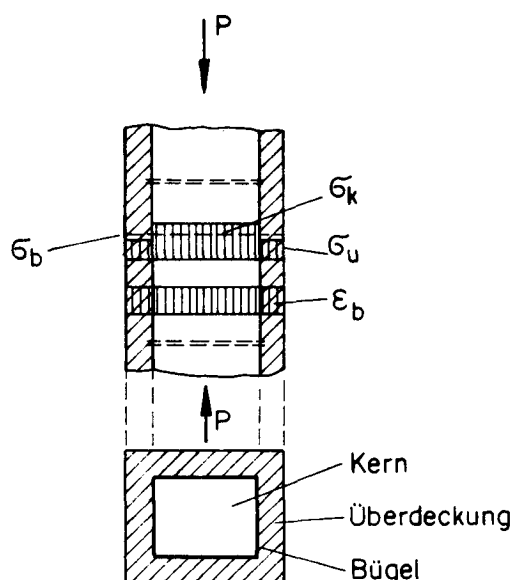


Bild 3.3: Schematische Spannungs- Stauchungsverhältnisse in umschnürtem Beton

zentrischem Druck. Die Längsstauchungen ϵ_b sind konstant über den ganzen Querschnitt, während die dazugehörigen Spannungen σ_u der Ueberdeckung resp. σ_k des Kernes recht verschiedene Werte annehmen können. Eine globale Spannung σ_b ist abhängig vom Verhältnis der beiden Flächen F_u der Ueberdeckung und F_k des Kernes und kann wie folgt berechnet werden:

$$\sigma_b F_b = \sigma_u F_u + \sigma_k F_k \quad (3.1)$$

Sargin und Cohn zeigen in [9] die Auswertung von Versuchsergebnissen mit der Beziehung (3.1). Der Effekt der Querarmierung ist erst bei grossen Längsstauchungen von über 0,15% von Bedeutung. Er braucht daher im Bereich der Gebrauchslasten nicht berücksichtigt zu werden, kann aber das Bruchverhalten entscheidend beeinflussen.

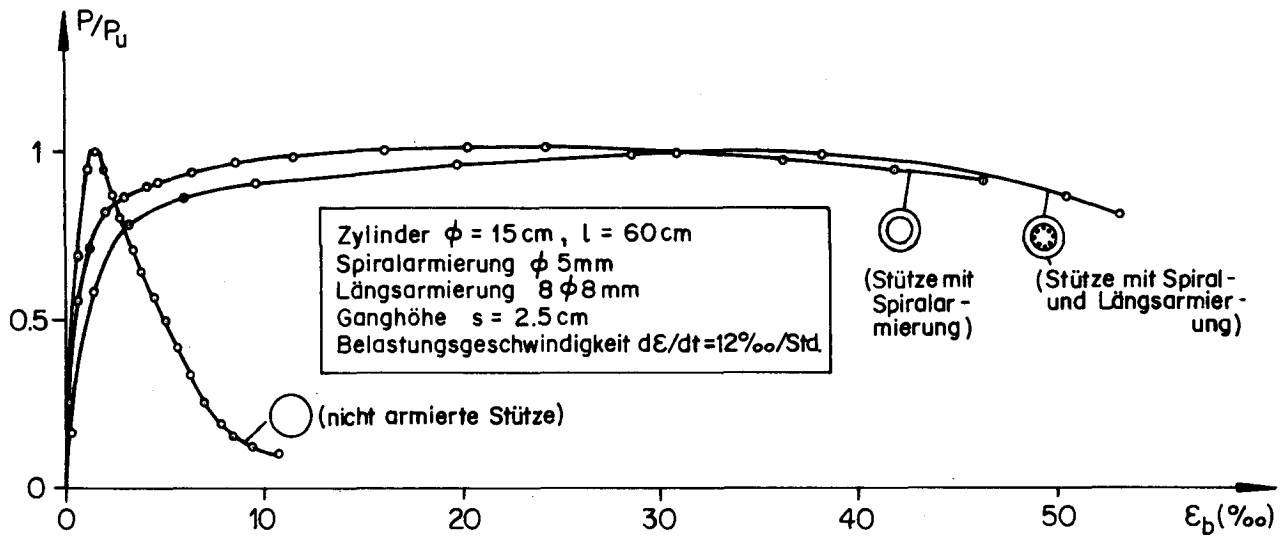
Die unterschiedlichen Verformungsmöglichkeiten von Kernbeton und Ueberdeckung können ein unerwünschtes Abplatzen der Ueberdeckung zur Folge haben. Badawy [10] stellt aber aufgrund seiner Versuche fest, dass die ersten Anrisse über der Längsarmierung erst kurz vor Erreichen der Traglast ($P > 0,95 \cdot P_u$) auftreten und sich die Ueberdeckung erst bei sehr grossen Stauchungen ablöst.

Die Querarmierung behindert das Ausknicken der Längsarmierung. Dadurch kann die Längsarmierung über die Fließgrenze hinaus gestaucht werden. Im Bruchbereich sind Stauchungen bis in den Verfestigungsbereich möglich.

a) Spiralarmierung.

Die Spiralarmierung hat einen annähernd hydrostatischen Querdruck auf den Kern zur Folge. Richart, Brandtzaeg und Brown [11] haben Versuche durchgeführt, um das Verhalten von Beton unter hydrostatischem Querdruck zu untersuchen. Sie haben dabei in Abhängigkeit des Querdruckes die Erhöhung der Festigkeiten und der dazugehörigen Stauchungen gemessen, die den mehrfachen, an Stützen ohne Querdruck gemessenen Werten entsprechen.

Rüsch und Stöckl veröffentlichten in [12] Versuchsergebnisse an spiralarmierten Stützen. In Bild 3.4 sind die unarmierte, die mit einer Spirale armierte und die mit zusätzlichen Längsstäben armierte Stütze einander gegenübergestellt. Die Lasten sind auf die den verschiedenen Querschnitten entsprechenden Maximallasten P_u bezogen und sind in Funktion der Längsstauchungen gegeben. Die Spiralarmierung hat eine Steigerung der Traglast P_u von ungefähr 15% zur Folge. Bemerkenswert ist, dass für die Stütze mit Längs- und Querarmierung bei Erreichen der Streckgrenze der Längsstäbe erst ungefähr 70% der Höchstlast erreicht ist. Bei dieser Last sind die ebenfalls gemessenen Querdehnungen und die entsprechenden Dehnungen in der Spirale noch sehr gering ($\approx 0,3\%$). Die einschnürende Wirkung der Spirale ist vernachlässigbar klein.



Charakteristische Stauchungswerte ϵ_b (‰) und Höchstlasten (t):

	Spiralararmierung		Längsarmierung		P_u (t)
	Streckgrenze	Beginn Verfestigung	Streckgrenze	Beginn Verfestigung	
○	—	—	—	—	32.5
⊙	7	27.5	—	—	38.6
⊛	8.2	32	2.3	10	62.0

Bild 3.4: Einfluss der Spiral- und Längsarmierung auf das σ - ϵ -Diagramm von Beton [12]

Der weitere Lastanstieg erfolgt unter starker Zunahme der Längs- und Querverformungen. Die Höchstlast wird bei einer Längsstauchung von ungefähr 35‰ erreicht. Bei weiterer Verformung nimmt die Last ab, obwohl die Maximalspannungen in der Armierung noch nicht erreicht sind. Dies ist die Folge der allmählichen Zerstörung der Betonüberdeckung und des Ausknickens der Längsstäbe zwischen den Spiralgängen. Von besonderem Interesse ist die Wirkung der Spiralararmierung auf die Bruchstauchung des Betons. Der eingeschnürte Querschnitt lässt sich für den untersuchten Fall unter Höchstlast um mehr als das Zehnfache stauchen im Vergleich zum unarmierten Querschnitt. Die Längsarmierung verbessert die Duktilität noch zusätzlich ($\epsilon_b = 35‰$ bei $P = P_u$).

b) Bügelarmierung.

Auch eine Bügelarmierung hat bei grosser Längsstauchung einen einschnürenden Effekt auf die Kernzone eines Stahlbetonquerschnittes. Der dabei auftretende Querdruck auf den Beton weicht etwas mehr vom hydrostatischen Druck ab als bei der Spiralararmierung. Der Querdruck nimmt nicht nur zwischen den Bügeln ab, sondern ist auch in der Bügelebene ungleichmässig verteilt. Wegen der

geringen seitlichen Steifigkeit der Bügel konzentriert sich der Querdruck vor allem auf die Ecken. Diese Konzentration des Querdruckes verteilt sich im Innern der Stütze. Es lassen sich Modelle aufstellen, die diese Verteilung berücksichtigen. In diesem Zusammenhang ist auf die Arbeiten von Sargin [9] und Badawy [10] hinzuweisen. Wegen der erwähnten Querdruckverteilung können das Tragverhalten mit stärkeren Bügeln oder mit geringerem Bügelabstand verbessert und die Bruchstauchungen vergrößert werden.

Badawy [10] gibt aufgrund seiner Versuche an gedruckten Stützen mit konstantem Querarmierungsgehalt μ_q einen in bezug auf die Traglast optimalen Bügelabstand an, der die Hälfte der kleineren Seitenabmessung beträgt. Im Vergleich zu Stützen mit extrem grossen Bügelabständen, hat er eine Traglastserhöhung von 13% gemessen. Eine weitere Traglastserhöhung bei konstantem Bügelabstand gibt er bei einer Steigerung der Bügeldurchmesser an. Sowohl für engen Bügelabstand als auch für grosse Bügeldurchmesser gibt Badawy eine Steigerung der Stauchungen bei Erreichen der Maximallasten an. Leider gibt er keine Werte für die Bruchstauchungen an. Der Einfluss der Bügel auf die Duktilität im Bruchbereich kann deshalb aufgrund dieser Versuchsergebnisse nicht erkannt werden.

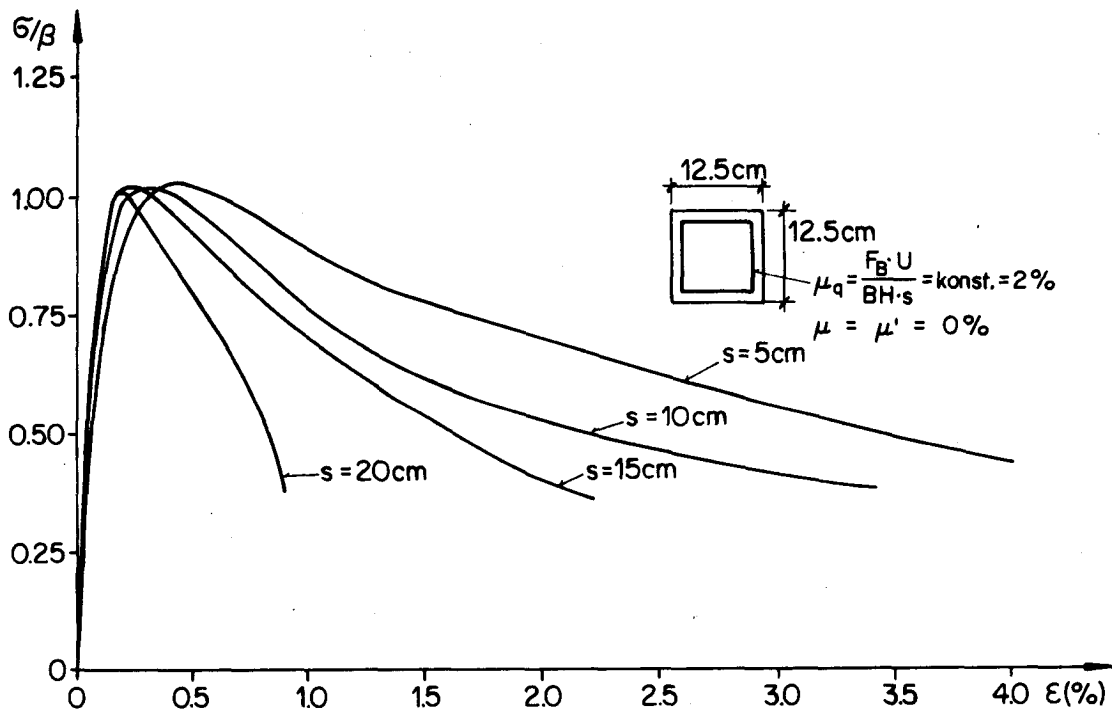


Bild 3.5: Einfluss des Bügelabstandes s auf das Spannungs- Stauchungs- Diagramm von umschürftem Beton [13]

Die Versuche von Roy und Sozen [13], die in Bild 3.5 dargestellt sind, zeigen eine eindeutige Steigerung der Duktilität mit abnehmendem Bügelabstand. Die Stauchung $\epsilon_{s,0}$, bei der die Last auf die Hälfte der Maximallast gesunken ist, beträgt für einen Bügelabstand $s=20$ cm bei einem Querschnitt von $12,5 \times 12,5$ cm weniger als 1%, während für $s=5$ cm $\epsilon_{s,0}$ einen ungefähr viermal grösseren Wert ($\approx 3,5\%$) erreicht bei gleichem Prozentsatz μ_q der Querarmierung. Bei diesen Versuchen wurde mit abnehmendem Bügelabstand s keine bedeutende Steigerung der Traglast gemessen. Die unterschiedlichen Aussagen der Versuche von verschiedenen Forschungsinstituten zeigen die Empfindlichkeit dieser Versuche im Bruchbereich in bezug auf die verschiedenen Prüfeinrichtungen und vor allem deren Last-Verformungs-Eigenschaften.

Längsarmierung

Der Einfluss der Längsarmierung auf das Trag- und Verformungsverhalten des Betons ist gering. Es kann damit die umschnürende Wirkung der Querarmierung auf die Querschnitte zwischen den Bügeln übertragen werden. Das Ausquellen des Betons kann damit etwas behindert werden.

Die Versuche von Badawy [10] zeigen, dass die Traglasten der Stützen mit und ohne Längsarmierung sich nur um die unterschiedliche Fließlast der Armierung unterscheiden.

3.2 Analytische Darstellung des Spannungs-Stauchungs-Verhaltens von Beton

Analog zur Vielzahl von Versuchsergebnissen ist auch die Zahl der Vorschläge für eine analytische Darstellung des Spannungs-Stauchungs-Verhaltens von Beton sehr gross. Bild 3.6 zeigt zwei extreme Darstellungen, die das wirk-

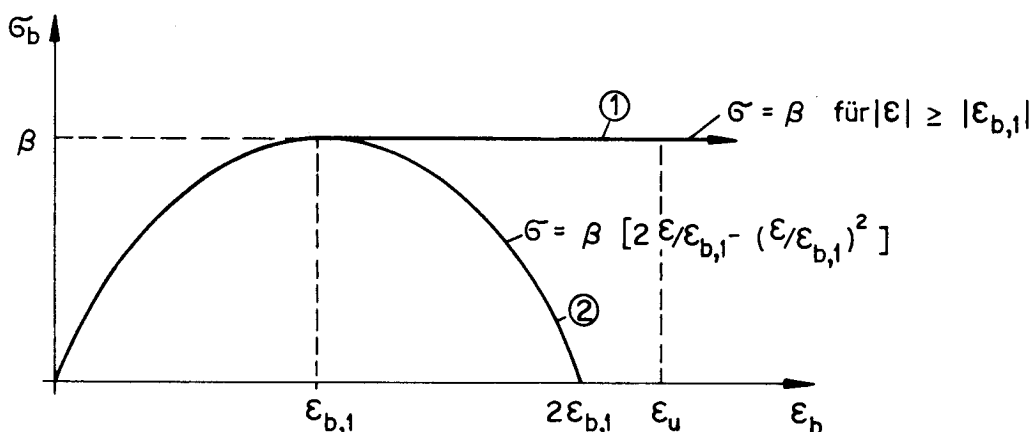


Bild 3.6: Mögliche analytische Darstellungen der $\sigma_b - \epsilon_b$ -Beziehung

liche Verhalten einschliessen sollen. Bis zur Maximalspannung β wird meist eine parabolische Annahme für die σ_b - ϵ_b -Beziehung gemacht. Die zu β gehörende Stauchung $\epsilon_{b,1}$ kann als konstanter Wert festgesetzt werden, was für eine dimensionslose Darstellung von Vorteil ist. Sie wird aber häufig auch durch β und den E-Modul wie folgt dargestellt:

$$\epsilon_{b,1} = \frac{2 \cdot \beta}{E} \quad (3.2)$$

Wie auch aus den Versuchen ersichtlich ist, gibt die σ_b - ϵ_b -Beziehung im Bereich grosser Stauchungen nach Erreichen von β zu mehr Diskussionen Anlass. Vereinfachend wird in vielen Normen ein geradliniger Verlauf 1 (Bild 3.6) angenommen. Die Bruchstauchung ϵ_u muss definiert werden. Dehnungsgesteuerte Versuche, die die Bestimmung der σ_b - ϵ_b -Beziehung bis zur Bruchstauchung ermöglichen zeigen aber, dass die Spannungen nach Ueberschreiten eines Maximums wieder abnehmen. Zu einer extremen Darstellung gemäss Kurve 2 führt die Parabel 2. Ordnung bis zum Punkt, wo die Spannung σ_b bei einer Stauchung $\epsilon_b = 2 \cdot \epsilon_{b,1}$ verschwindet.

Ein analytischer Ausdruck für das Spannungs-Stauchungs-Verhalten des Betons muss mindestens die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0 \quad \text{bei} \quad \epsilon = 0 \\ \frac{d\sigma}{d\epsilon} &= E \quad \text{bei} \quad \epsilon = 0 \quad (\text{Definition}) \\ \frac{d\sigma}{d\epsilon} &= 0 \quad \text{bei} \quad \epsilon = \epsilon_{b,1} \\ \sigma &= \beta \quad \text{bei} \quad \epsilon = \epsilon_{b,1} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Zur Erfüllung dieser Bedingungen schlägt Sargin [9] die folgende Beziehung vor:

$$\frac{\sigma}{\beta} = \frac{\frac{E \cdot \epsilon_{b,1}}{\beta} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}}\right) + (D-1) \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\epsilon_{b,1}}{\beta} - 2\right) \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}}\right) + D \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}}\right)^2} \quad (3.4)$$

D ist ein Parameter, der vor allem den Bereich grosser Stauchungen ($|\epsilon| > |\epsilon_{b,1}|$) beeinflusst, wie dies in Bild 3.7 veranschaulicht ist.

Zur Bestimmung von D muss neben der Maximalspannung β ein weiterer Punkt des absteigenden Astes des σ_b - ϵ_b -Diagrammes experimentell erfasst werden. Mit $D = 0$ und der Gleichung (3.2) reduziert sich die Beziehung (3.4) auf die bereits erwähnte quadratische Parabel:

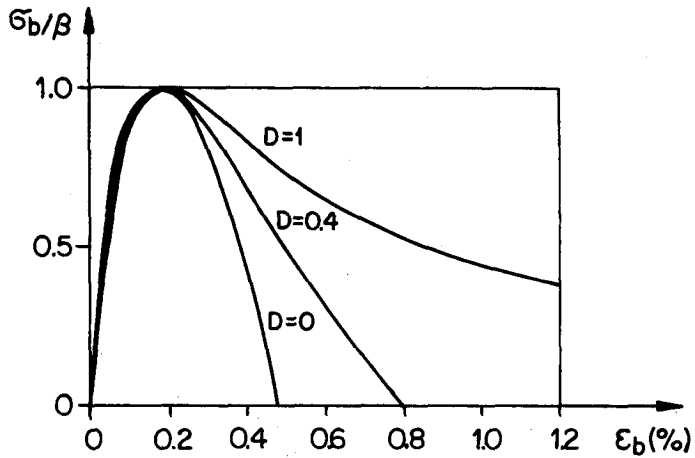


Bild 3.7: Einfluss des Parameters D auf die σ_b - ϵ_b -Beziehung [9]

$$\frac{\sigma}{\beta} = 2 \cdot \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}} \right) - \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_{b,1}} \right)^2 \quad (3.5)$$

Einen anderen empirischen Ansatz zur Erfassung der σ_b - ϵ_b -Beziehung im Bereich grosser Stauchungen geben Roy und Sozen [13]. Aufgrund ihrer Versuche machen sie den folgenden Vorschlag (Bild 3.8):

$$\epsilon_{50} = 0,75 \cdot \frac{\mu_q \cdot H_B}{s} \quad (3.6)$$

wobei:

ϵ_{50} : Stauchung, bei der die Spannung auf die Hälfte der Maximalspannung β abgesunken ist.

H_B : kleineres Aussenmass der Bügel

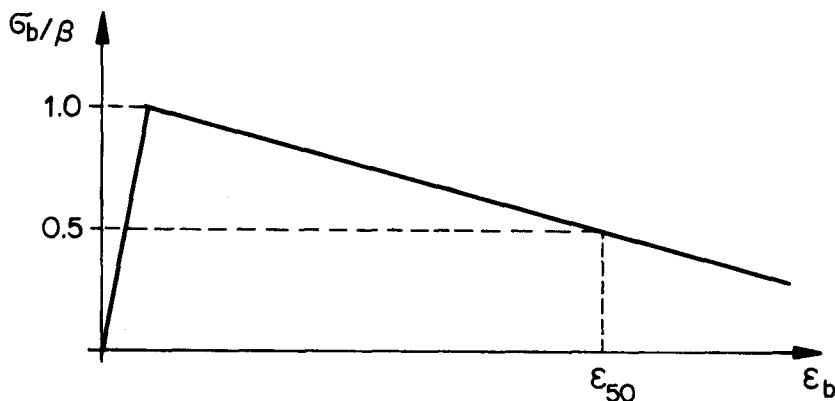


Bild 3.8: Vereinfachte σ - ϵ - Beziehung für Beton mit Querarmierung [13]

Dieser Ansatz stimmt gut mit den Versuchen überein und ermöglicht eine Aussage über den Einfluss der Bügelquerschnitte und der Bügelabstände auf die Bruchstauchung des Betons.

3.3 Spannungs-Verformungs-Verhalten von Armierungsstahl

Das Spannungs-Verformungs-Verhalten ist grundsätzlich verschieden für naturharte Stähle einerseits und kaltverformte Stähle andererseits.

Naturharte Stähle zeichnen sich durch eine lineare Beziehung zwischen Spannungen und Verformungen bis zu einem ausgeprägten Fliessplateau (Bild 1.5) aus. Für sehr grosse Verformungen ($\epsilon_s = \epsilon_{sv} \approx 20\%$) steigen die Stahlspannungen wegen der Verfestigung des Materials wieder an. Für Untersuchungen im Bruchbereich muss dieser Verfestigung Rechnung getragen werden.

Kaltverformte Stähle haben kein Fliessplateau (Bild 1.5). Sie werden üblicherweise durch die einfach messbare Streckgrenze $\sigma_{0,2}$, die Zugfestigkeit β_z und den E-Modul definiert. Für Spannungen, die über der Proportionalitätsgrenze σ_p liegen, nehmen die Verformungen vermehrt zu. Für diesen Bereich hat Oelhafen [14] den folgenden Ansatz gemacht:

$$\sigma_s = \beta_z - \frac{\Delta\sigma_1^2}{\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_2} \quad (3.7)$$

wobei:

$$\Delta\sigma_1 = \beta_z - \sigma_p$$

$$\Delta\sigma_2 = E \cdot \epsilon_s - \sigma_p$$

Diese Beziehung ist durch die Parameter σ_p , E und β_z bestimmt und ist in Bild 3.9 dargestellt. Die Proportionalitätsgrenze σ_p ist versuchsmässig nur ungenau bestimmbar. Es ist deshalb von Vorteil, sie mit Gleichung (3.7) und der Streckgrenze $\sigma_{0,2}$ zu berechnen. Die zur Streckgrenze gehörende Stahldehnung $\epsilon_{0,2}$ beträgt:

$$\epsilon_{0,2} = \frac{\sigma_{0,2}}{E} + 0,002 \quad (3.8)$$

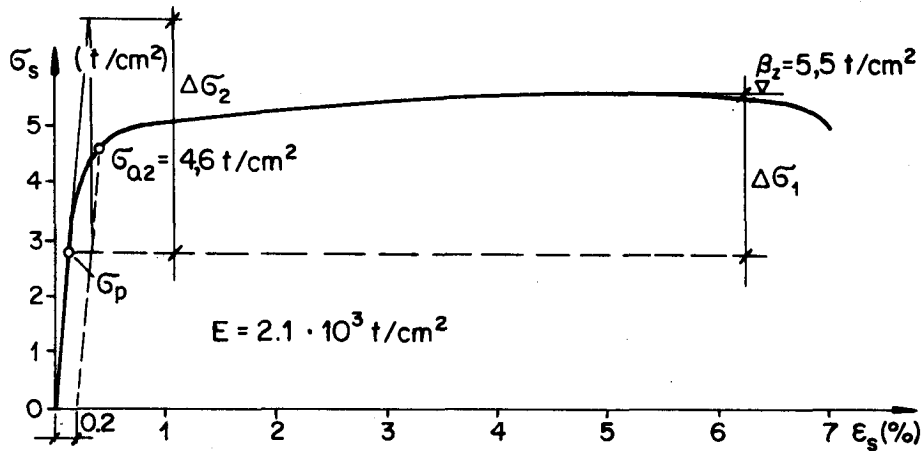


Bild 3.9: $\sigma - \epsilon$ - Beziehung für kaltverformten Armierungsstahl

Mit $\sigma_{0,2}$ und $\epsilon_{0,2}$ kann aus (3.7) die Proportionalitätsgrenze σ_p wie folgt bestimmt werden:

$$\sigma_p = \sigma_{0,2} - \sqrt{0,002 \cdot E_e \cdot (\beta_z - \sigma_{0,2})^2} \quad (3.9)$$

Der nicht lineare Ansatz (3.7) kann den gemessenen $\sigma_s - \epsilon_s$ -Diagrammen gut angepasst werden. Für $\Delta\sigma_1 \rightarrow 0$ wird die Hyperbel zur Geraden $\sigma_s = \beta_z$ und beschreibt das ideal-plastische Verhalten. Der Ansatz (3.7) gilt im Bereich $\sigma_p \leq \sigma_s \leq \beta_z$ und nimmt die folgenden Extremwerte an:

$$\left. \begin{array}{ll} \Delta\sigma_2 = 0 & \rightarrow \sigma_s = \sigma_p \\ \Delta\sigma_2 \rightarrow \infty & \rightarrow \sigma_s \rightarrow \beta_z \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Zum Beispiel für die Zürcher Stützenversuche [8] wurden kaltverformte Armierungsstähle verwendet. Die Prüfung dieser Stähle zeigte, dass wegen der verschiedenen starken Verwindung für verschiedene Durchmesser auch die Messwerte für die Streckgrenze $\sigma_{0,2}$ und die Zugfestigkeit β_z erheblich variieren. Die Bruchdehnung von kaltverformten Stählen ist wesentlich schlechter ($\lambda_{G1} \approx 7\%$) als für naturharte Stähle ($\lambda_{G1} \approx 20\%$).

Für die vorliegende Untersuchung werden ohne weitere Angaben die in Tabelle 3.1 zusammengestellten, charakteristischen Werte für die beiden Stahlsorten verwendet:

Tabelle 3.1

Charakteristische Werte für σ_s - ϵ_s -Diagramm

		kaltverformt	naturhart
Streckgrenze $\sigma_{0,2}$	(kg/cm ²)	4600	
Fliessspannung σ_{sf}	(kg/cm ²)		4600
Zugfestigkeit β_z	(kg/cm ²)	5500	5600
Elastizitätsmodul E	(kg/cm ²)	$2,1 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
Verfestigungsmodul E_v	(kg/cm ²)		$0,7 \cdot 10^5$
ϵ_{sv}	(%)		20
Bruchverformung λ_{G1}	(%)	~ 70	~ 200

3.4 Zusammenfassung

Das Spannungs-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton ist beeinflusst durch die in diesem Kapitel diskutierten Parameter. Diese Abhängigkeit führt dazu, dass es ausserordentlich schwierig ist, ein einheitliches Verformungsverhalten als Grundlage für die weiteren Untersuchungen anzunehmen. Als weitere Unsicherheiten kommen die Streuungen der Messresultate und die Beziehungen zwischen den im Versuchslabor gemessenen Werten und den Bedingungen auf der Baustelle hinzu.

Immerhin lassen sich einige konkrete Angaben und einige Tendenzen aus den Untersuchungen in diesem Kapitel wie folgt zusammenfassen:

- Die Bruchstauchung des Stahlbetons wird vor allem durch die Querarmierung vergrössert.
- Eine Spiralarmierung mit kleiner Ganghöhe ($s \leq 1/5$ des Kerndurchmessers) hat die grösste umschnürende Wirkung. Sie ermöglicht Längsstauchungen in der Grössenordnung von mehreren Prozenten ($\epsilon_b \rightarrow 3$ bis 5%) ohne grossen Verlust der Tragfähigkeit.
- Die Traglastserhöhung durch die Spiralarmierung liegt in der Grössenordnung von 0 ÷ 20%. Die Versuchsergebnisse sind zum Teil widersprüchlich, so dass auf eine rechnerische Berücksichtigung verzichtet wird.

- Eine Bügelarmierung mit einem Bügelabstand gleich der Hälfte der kleinsten Seitenlänge ermöglicht Verformungen in der Grössenordnung von 2 bis 3% bis die Tragfähigkeit auf die Hälfte abgesunken ist (ϵ_{50}). Für noch kleinere Bügelabstände lassen sich ähnliche Verhältnisse erreichen wie für die Spiralarmierung.
- Mit zunehmendem Bügelarmierungsgehalt μ_q werden grössere Längsstauchungen möglich. Für sehr grosse Bügeldurchmesser ist die Wirkung nicht mehr effizient und der Armierungsgehalt wird besser durch kleinere Abstände s gesteigert.
- Auch für zunehmende Bügelarmierung ist die Traglasterrhöhung nicht von Bedeutung.
- Mit genügender Querarmierung wird das Ausknicken der Längsarmierung behindert. Es sind Stauchungen bis in den Verfestigungsbereich möglich, was für die Gelenkbildung bei eingespannten Stützen von grosser Bedeutung ist.
- Ein massgebender Nutzen der Querarmierung kommt erst bei grossen Längsstauchungen ($|\epsilon| \geq 0,15\%$) zustande. Er ist deshalb nur für Untersuchungen des Bruchverhaltens von Bedeutung.

4. MOMENTEN-KRUEMMUNGS-VERHALTEN

4.1 Dimensionslose Darstellung

Das Momenten-Krümmungs-Verhalten des Querschnittes ist die Grundlage für jede Verformungsberechnung und damit auch für jede Stützenberechnung. Um diese Beziehung einfach und vielseitig anwendbar darzustellen, soll sie möglichst dimensionslos gemacht werden. Sie soll unabhängig von den Absolutwerten der Querschnittsabmessungen und der Betonfestigkeit gegeben werden können. Dies ist unter den im Folgenden aufgezeigten Voraussetzungen möglich.

Bild 4.1 zeigt einen Rechteckquerschnitt und eine bestimmte Dehnungsverteilung mit den entsprechenden Kräften. Die Koordinaten, Verformungen und Kräfte

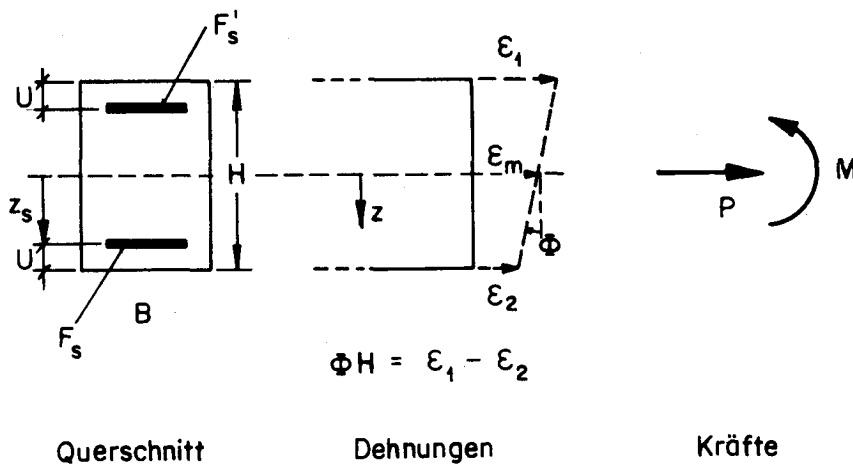


Bild 4.1: Stahlbetonquerschnitt

sind in positiver Richtung angegeben. Die Dehnungsebene ist durch die beiden Randdehnungen ϵ_1 und ϵ_2 oder durch die Mitteldehnung ϵ_m und die Krümmung Φ bestimmt. Die inneren Kräfte P und M berechnen sich wie folgt:

$$P = B \cdot \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_b \cdot dz + \sigma_s \cdot F_s + \sigma'_s \cdot F'_s$$

oder

$$p = \frac{P}{B \cdot H \cdot \beta} = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma_b}{\beta} \cdot d\xi + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_{sf}} + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{\sigma_{sf}} \quad (4.1)$$

und

$$M = B \cdot \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \sigma_b \cdot z \cdot dz + \sigma_s \cdot F_s \cdot z_s + \sigma'_s \cdot F'_s \cdot z'_s$$

oder

$$m = \frac{M}{B \cdot H^2 \cdot \beta} = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{\sigma_b}{\beta} \cdot \xi \cdot d\xi + \omega \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_{sf}} \cdot \xi_s + \omega' \cdot \frac{\sigma'_s}{\sigma_{sf}} \cdot \xi'_s \quad (4.2)$$

wobei: $\xi = \frac{z}{H}$ (dimensionslose Koordinate)

$\omega = \frac{F_s}{F_b} \cdot \frac{\sigma_{sf}}{\beta}$ (bezogener Armierungsgehalt, Zugseite)

$\omega' = \frac{F'_s}{F_b} \cdot \frac{\sigma_{sf}}{\beta}$ (bezogener Armierungsgehalt, Druckseite)

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) erfüllen die Forderung, dass p und m unabhängig von den Absolutwerten der Querschnittsabmessungen und der Betonfestigkeit berechnet werden können, unter den folgenden Bedingungen:

- Das Spannungsverhältnis σ_b/β muss explizit als Funktion der Verformung dargestellt werden können.
- Die Stahlflussspannung σ_{sf} und die Stahlüberdeckung U müssen gegeben sein.
- Der Armierungsgehalt muss auf die Betonfestigkeit bezogen sein
($\omega = \frac{F_s}{F_b} \cdot \frac{\sigma_{sf}}{\beta} = \mu \cdot \frac{\sigma_{sf}}{\beta}$).
- Die Beziehungen gelten für den Rechteckquerschnitt $B \cdot H$.

Unter diesen Voraussetzungen ist es demnach möglich, für eine bestimmte Achsialkraft p die Momenten-Krümmungs-Beziehung ($m-\Phi H$) dimensionslos darzustellen. Die erste der oben genannten Bedingungen ist zum Beispiel für die CEB-Betonkennlinie, wie sie in (3.5) gegeben ist, erfüllt. Die Schweizer Stahlbetonnorm des SIA verwendet ebenfalls eine Parabel 2. Ordnung für die Betonkennlinie. Hingegen wird in der SIA-Norm die Stauchung $\epsilon_{b,1}$, die der Maximalspannung entspricht, von der Betonfestigkeit β abhängig gemacht (3.2). Damit wird die erste Bedingung verletzt, und eine vielseitig anwendbare, dimensionslose Darstellung der $m-\Phi H$ -Beziehung ist nicht möglich.

4.2 Berechnungsgrundlagen

Die nachfolgende Parameteruntersuchung des Momenten-Krümmungs-Verhaltens wird mit dem im Anhang beschriebenen Computerprogramm durchgeführt. Demnach gelten auch für diese Untersuchungen dieselben Voraussetzungen wie für das benützte Rechenprogramm. Insbesondere wird das für die Ermittlung der $m-\Phi H$ -Beziehung wichtige Ebenbleiben der Querschnitte angenommen. Im weiteren werden die Untersuchungen unter den folgenden Voraussetzungen gemacht:

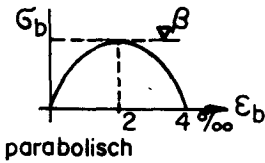
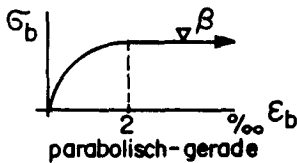
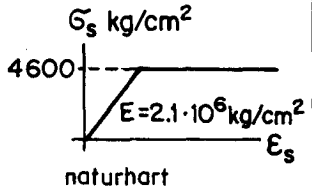
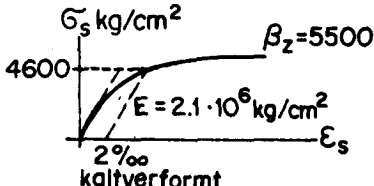
- Der Querschnitt ist rechteckig und symmetrisch armiert.
- Die Betonüberdeckung der Armierung ist gleich $V10$ der Querschnittshöhe.
- Das Knicken der Stahldruckstäbe wird ausgeschlossen.

Sinngemäss können die Resultate auch auf andere Querschnitte übertragen werden.

Die Untersuchung der Abhängigkeit des Momenten-Krümmungs-Verhaltens von verschiedenen Parameterkonfigurationen ist notwendig einerseits für die Ermittlung der Steifigkeiten von Stützen und der damit zu berechnenden Verformungen und andererseits für die Diskussion des Bruchverhaltens. Neben den im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Verformungseigenschaften von Beton und Stahl ist das $m-\Phi H$ -Verhalten vor allem vom Armierungsgehalt und der Achsialkraft beeinflusst. Um den Umfang dieser Untersuchung einzuschränken, werden nur die Extremwerte der Parameter berücksichtigt. Für das Spannungs-Stauchungs-Verhalten des Betons werden die beiden in Bild 3.6 gezeigten Kurven einander gegenübergestellt. Die beiden Spannungs-Verformungs-Verhalten für naturharten und kaltverformten Stahl werden so berücksichtigt, wie sie in den Bildern 1.5 und 3.9 dargestellt sind. Die Achsialkraft p kann im Gebrauchsbereich bei einem mittleren Armierungsgehalt (z.B. $\omega = 0,2$) und sehr gedruckenen Stützen (z.B. $l/H < 15$) einen maximalen Wert von ungefähr 0,3 annehmen. Die Maximalarmierung liegt bei ungefähr $\omega = 0,5$. In Tabelle 4.1 sind die erwähnten Extremwerte für die Hauptparameter, wie sie in der folgenden Diskussion verwendet werden, zusammengestellt.

Tabelle 4.1

Extremwerte der untersuchten Parameter

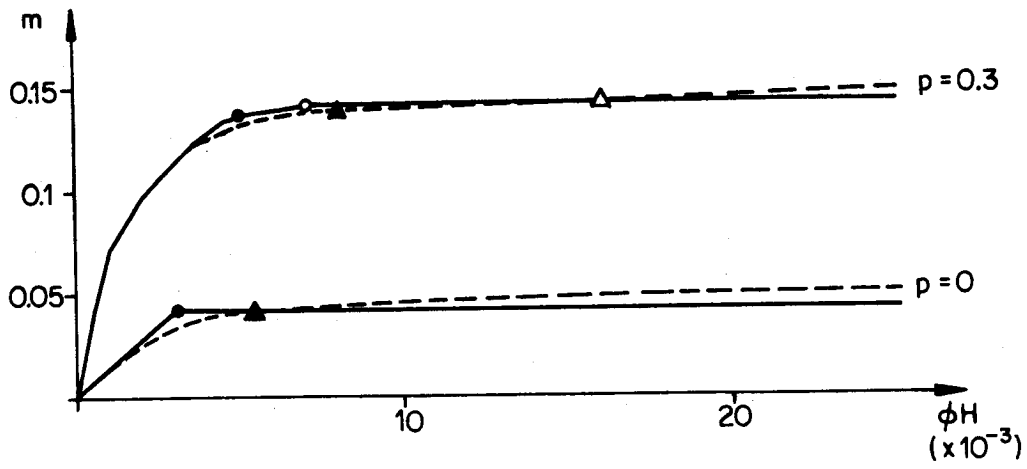
$p:$	0	0.3
$\omega:$	0.05	0.5
$\sigma_b - \epsilon_b:$		
$\sigma_s - \epsilon_s:$		

4.3 Diskussion des Momenten-Krümmungs-Verhaltens

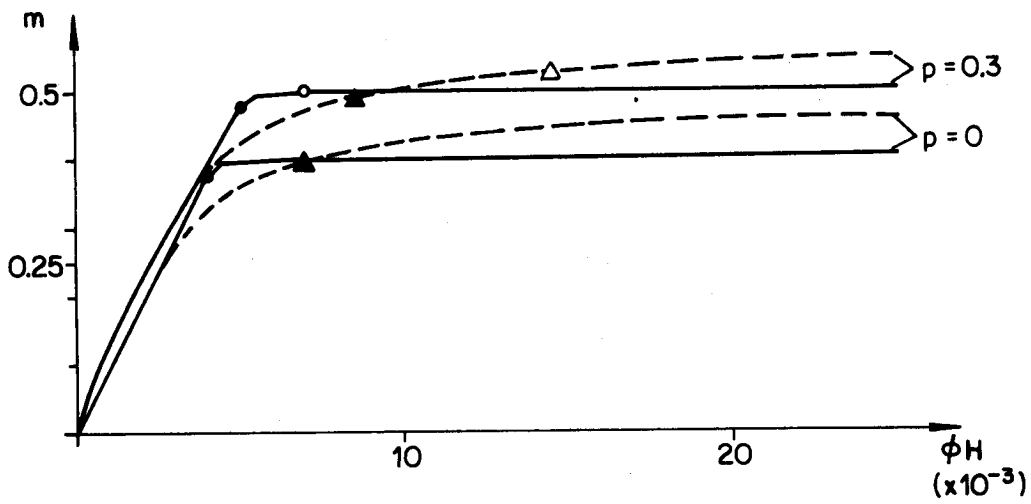
Das Spannungs-Stauchungs-Verhalten des Betons ist von zentraler Bedeutung für die Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Die beiden $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramme von Tabelle 4.1, deren Einfluss auf das $m - \Phi H$ -Verhalten im Folgenden diskutiert werden soll, unterscheiden sich im für diese Arbeit besonders interessanten Bereich grosser Verformungen.

Parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm

Das parabolisch-gerade $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm zeichnet sich dadurch aus, dass die Spannungen auch für zunehmende Stauchungen nach dem Erreichen der Maximalspannung β konstant bleiben. Dementsprechend verhält sich auch der Stahlbetonquerschnitt sehr duktil (Bild 4.2). Nach dem Erreichen des maximalen Momentes m_u bleiben die Momente bei zunehmender Krümmung ΦH konstant. Ebenfalls aus Bild 4.2 ist der Einfluss des Armierungsgehaltes und des Verformungsverhaltens des Stahles ersichtlich. Für den extrem kleinen Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0,05$ ist der Einfluss der Stahlsorte auf das $m - \Phi H$ -Verhalten unbedeutend. Hingegen für den grossen Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0,5$ weicht der $m - \Phi H$ -Verlauf für den Querschnitt mit kaltverformter Armierung schon für kleinere Krümmung von der linearen Beziehung ab als für Querschnitte mit naturharter Armierung. Die beiden verschiedenen in dieser Untersuchung verwendeten Stähle haben dieselbe Fließ-, resp. Streckgrenze ($\sigma_{sf} = \sigma_{0,2} = 4600 \text{ kg/cm}^2$).



a) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.05$



b) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.5$

- naturharter Stahl
 - Fließgrenze (Zug)
 - Fließgrenze (Druck)
- - - - - kaltverformter Stahl
 - ▲ Streckgrenze (Zug)
 - △ Streckgrenze (Druck)

Bild 4.2: Momenten - Krümmungs - Verhalten (parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ - Diagramm)

Ein Vergleich der m - Φ H-Beziehungen beim Erreichen dieser Spannung zeigt, dass die Momente ungefähr gleich gross sind, dass aber die Verformungen für den Querschnitt mit kaltverformtem Stahl fast doppelt so gross werden. Diese unterschiedliche Steifigkeit der beiden Querschnitte hat damit einen Einfluss auf die Beanspruchung 2. Ordnung. Im Bereich grösserer Verformungen, insbesondere im Bruchbereich, sind die Steifigkeitsverhältnisse der beiden Querschnitte nicht mehr grundsätzlich verschieden voneinander und von untergeordneter Bedeutung für die Traglastberechnung von Stützen. Die Stützenberechnungen in den folgenden Kapiteln werden deshalb ausschliesslich mit bilinearem Stahlverhalten durchgeführt. Der Unterschied im maximalen Moment für die Querschnitte mit verschiedenen Stahlsorten liegt in der verschiedenen Annahme der maximalen Stahlspannung ($\beta_z > \sigma_{sf}$). Die Verfestigung des naturharten Stahles wird für die Untersuchung der Verformungseigenschaften der Stützen nicht berücksichtigt. Für die Bestimmung der Rotationsfähigkeit der plastischen Gelenke ist sie hingegen sehr wichtig (Kapitel 7).

In Bild 4.3 sind die drei Resultierenden des Querschnittes gezeigt. Es sind dies die Betondruckkraft d_b , die Stahlzugkraft z_s und die Stahldruckkraft d_s . Sie wurden für den Querschnitt mit naturhartem Stahl für dieselben Parameterkonfigurationen wie in Bild 4.2 für die m - Φ H-Kurven berechnet und sind, wie

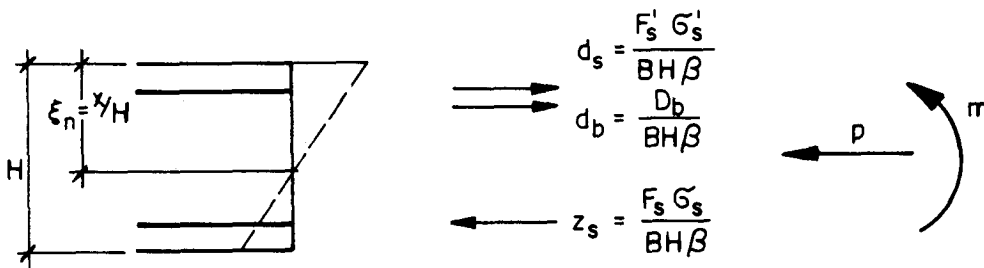


Bild 4.3: Resultierende des Stahlbetonquerschnittes

auch die Lage der neutralen Achse ξ_n , in Bild 4.4 dargestellt. Alle Kräfte sind auf die Betonfläche ($B \cdot H$) und die Betonfestigkeit (β) bezogen. Sie wurden für verschiedene Dehnungsebenen berechnet. In Bild 4.4 sind die diskreten Punkte miteinander verbunden, weshalb der Verlauf der Kurven nicht ganz ausgerundet ist. Die Druckkräfte wurden ebenfalls auf der positiven Zugseite aufgetragen und sind deshalb mit einem Minuszeichen versehen.

Für einen extrem kleinen Armierungsgehalt ($\omega = 0,05$) und ohne Achsialkraft ($p = 0$) fliesst die Zugarmierung schon bei kleinen Verformungen (Bild 4.4a, oben). Die Betondruckkraft d_b und die Stahldruckkraft d_s sind sehr klein. Für grosse Verformungen kommt die neutrale Achse ausserhalb der Druckarmierung

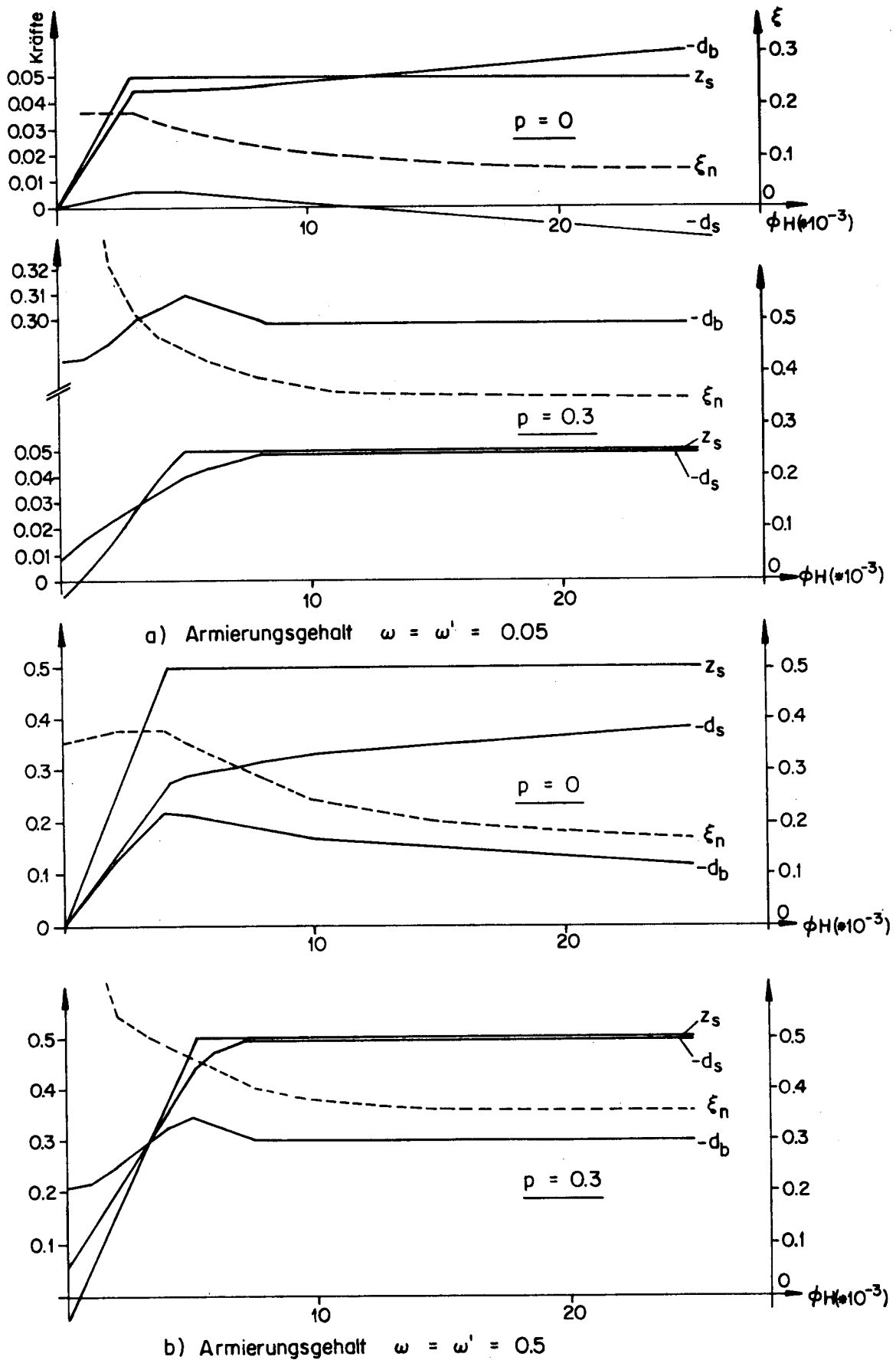


Bild 4.4: Resultierende Kräfte und Lage der neutralen Axe (parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ - Diagramm; naturharter Stahl)

zu liegen ($\xi_n < 0,1$) und auch die Druckarmierung wird auf Zug beansprucht. Dies ist allerdings nur möglich bis die Betondruckzone ausbricht, was für grosse Stauchungen zutrifft, da der Beton nicht mehr durch die Armierung gehalten ist. Der Verlauf der m - ϕ H-Beziehung (Bild 4.2a) wird in diesem Fall durch das Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Armierung bestimmt.

Für grosse Achsialkräfte ($p = 0,3$) und geringen Armierungsgehalt ($\omega = 0,05$) überwiegt der Einfluss der Betondruckzone. Nur für kleine Verformungen vermag die Armierung den Beton zu entlasten. Die Betondruckkraft d_b ist viel grösser als die Stahlkräfte. Dies erklärt das analog dem σ_b - ϵ_b -Diagramm gekrümmte m - ϕ H-Verhalten für diese Parameterkonstellation. Nach dem Fließen beider Armierungsstähle muss die gesamte Achsiallast p von der Betondruckkraft aufgenommen werden. Die drei konstanten Resultierenden ergeben ein konstantes Moment m bei weiterer Verformung. Die Duktilität des Querschnittes ist bestimmt durch die Verformbarkeit des gedrückten Betons.

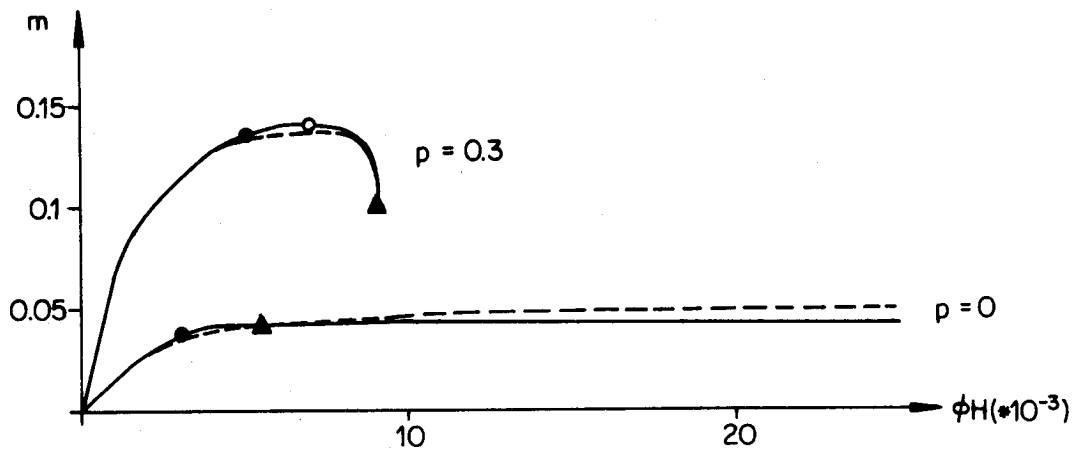
Eine Steigerung des Armierungsgehaltes bewirkt eine Vergrösserung der Steifigkeit des Querschnittes und damit eine Vergrösserung der Momente bei gegebener Verformung. Die Vergrösserung entspricht dem Momentenanteil des zusätzlichen Stahles. Bei einer Erhöhung des Armierungsgehaltes von $\omega = 0,05$ auf $\omega = 0,5$ berechnet sich dieser Momentenanteil Δm zu:

$$\begin{aligned} \Delta m &= \Delta \omega \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{U}{H}\right) \\ &= 0,45 \cdot 0,8 = 0,36 \end{aligned} \quad (4.3)$$

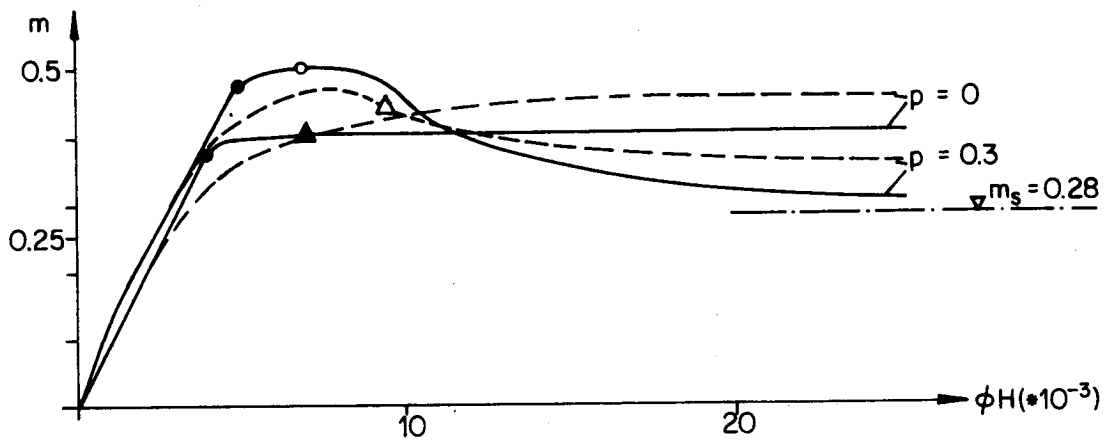
Das m - ϕ H-Verhalten wird für die starke Armierung $\omega = 0,5$ sowohl bei $p = 0$ als auch bei $p = 0,3$ durch das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Stahles bestimmt. Für $p = 0$ bewirkt die Steigerung des Armierungsgehaltes auch eine Vergrösserung der Betondruckkraft d_b , die erst bei grossen Verformungen auf Kosten der Stahldruckkraft d_s abnimmt. Für $p = 0,3$ wird der Beton bei kleinen Verformungen bei einer Steigerung des Armierungsgehaltes mehr entlastet. Nach dem Fließen beider Armierungsstähle bei grossen Verformungen muss der Beton wieder die volle Achsialkraft p übernehmen.

Parabolisches σ_b - ϵ_b -Diagramm

Die in den Bildern 4.2 und 4.4 gezeigten Untersuchungen sind in den Bildern 4.5 und 4.6 aufgrund eines parabolischen Spannungs-Stauchungs-Verlaufes des Betons (Tabelle 4.1) wiederholt. Bei diesem Betonverhalten nehmen die Spannungen nach Erreichen der Maximalspannung σ_b bei $\epsilon_b = \epsilon_{b,1}$ für grössere Stauchungen wieder ab. Für Stauchungen über $2 \cdot \epsilon_{b,1}$ verschwinden die Betonspannungen. In diesem Bereich wird angenommen, dass der Beton vollständig zerstört ist und keine Tragfähigkeit mehr besitzt. Diese Annahme hat zur



a) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.05$



b) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.5$

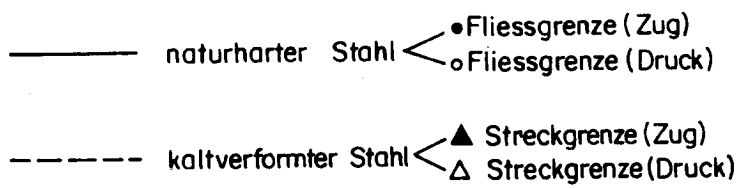
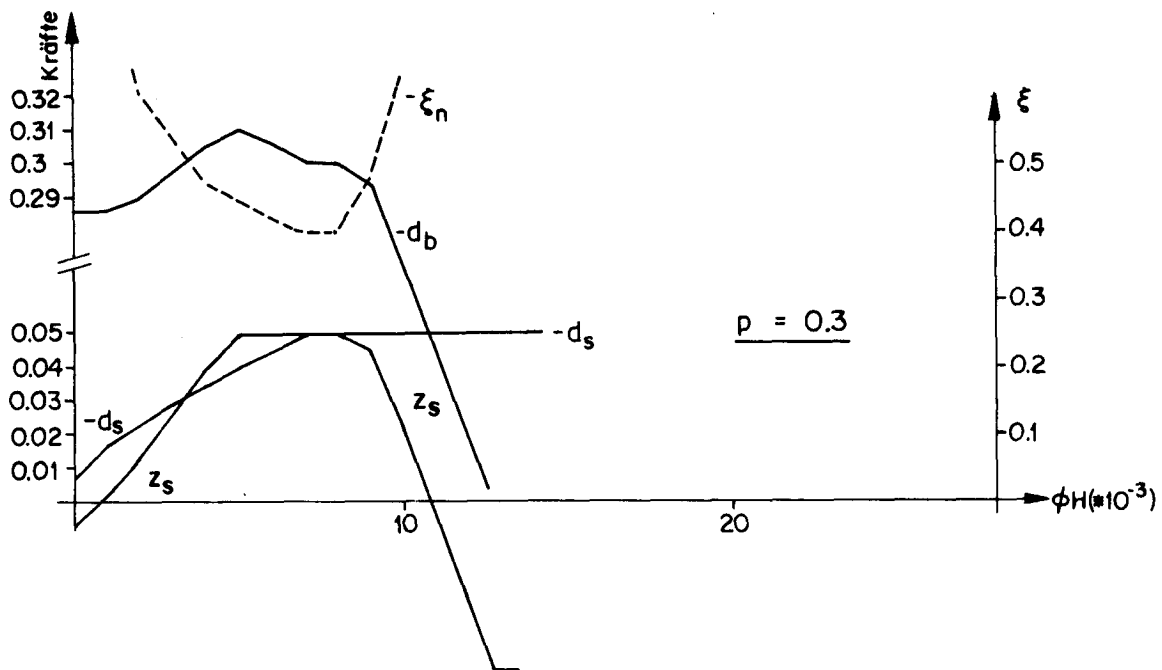
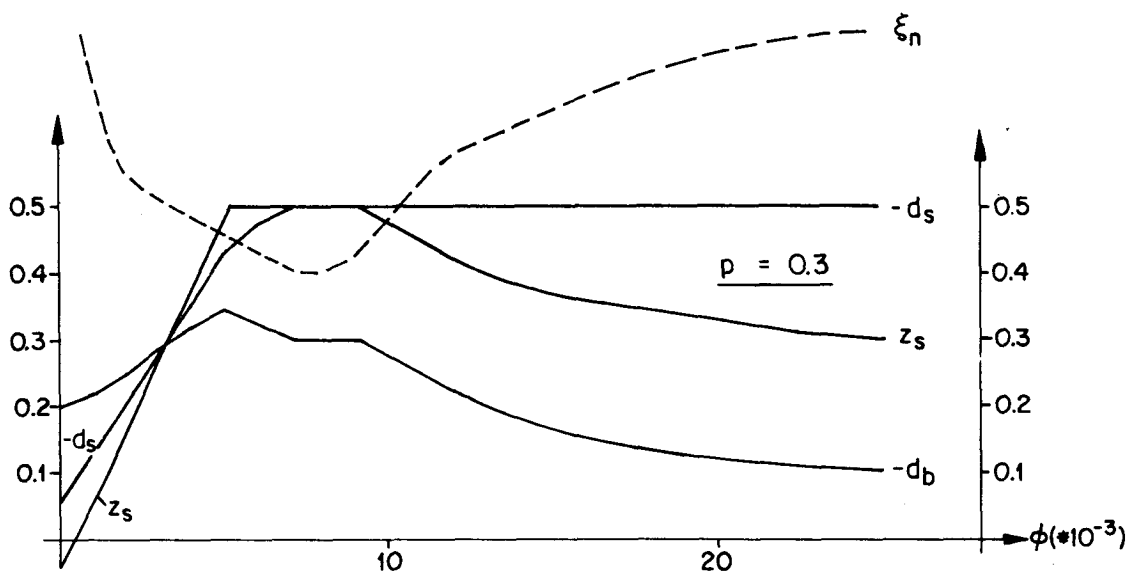


Bild 4.5: Momenten - Krümmungs - Verhalten (parabolisches $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm)



a) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.05$



b) Armierungsgehalt $\omega = \omega' = 0.5$

Bild 4.6: Resultierende Kräfte und Lage der neutralen Axe (parabolisches $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm; naturharter Stahl)

Folge, dass die Betondruckkraft d_b für grosse Verformungen kleiner wird und das achsiale Gleichgewicht mit einer äusseren Achsialkraft p für einen unarmierten Querschnitt nicht mehr möglich ist. Die Verhältnisse beim armierten Querschnitt sind in den Bildern 4.6 und 4.7 gezeigt.

Als Beispiel ist in Bild 4.7 der mit einer Achsialkraft p von 0,3 belastete Querschnitt mit einem Armierungsgehalt von $\omega = 0,05$ gezeigt. Bei einer Ver-

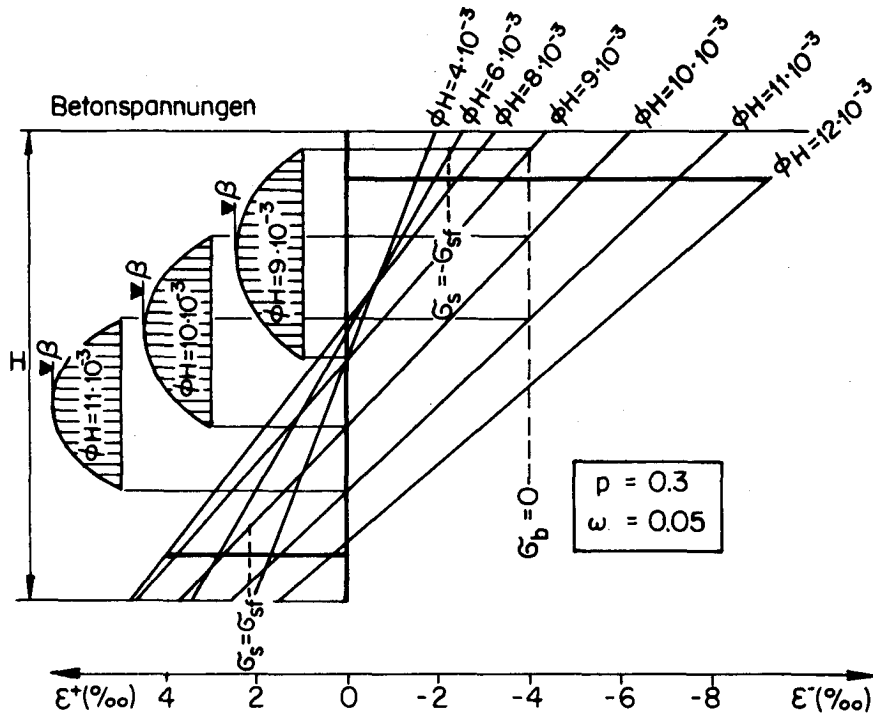


Bild 4.7: Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe für verschiedene Verformungszustände und die entsprechenden Betonspannungen (parabolisches $\sigma_b - \epsilon_b$ - Diagramm)

formung von ungefähr $\phi_H = 0,009$ überschreiten die Betonrandstauchungen die $2 \cdot \epsilon_{b,1}$ -Grenze ($\epsilon_{b,1} = 2\%$ in diesem Rechenbeispiel), bei der der Beton die Tragfähigkeit verliert. Bei weiterer Verdrehung wird die Querschnittshöhe, über der die Betonstauchungen zwischen 0 und $2 \cdot \epsilon_{b,1}$ liegen, kleiner. Die dazugehörigen Betonspannungen sind in Bild 4.7 gezeigt. Diese Tatsache führt zu abnehmenden Betondruckkräften, was aus Bild 4.6 ersichtlich ist. Um das achsiale Gleichgewicht dennoch gewährleisten zu können, muss die neutrale Axe sich wieder gegen die Zugseite hin verschieben. Die Stahldehnungen auf der Zugseite nehmen damit ab und die Stahlzugkraft wird bei weiterer Verformung zur Druckkraft. Fließt auch die Zugarmierung unter Druck, ist die Tragfähigkeit des Querschnittes erschöpft, da beide Armierungen fließen und der Beton die Achsialkraft p nicht mehr übernehmen kann. Die Verringerung der Betontragfähigkeit und der Stahlzugkraft haben auch eine Abnahme

des Momentes m mit wachsender Krümmung ΦH zur Folge. Der entsprechende Verlauf der m - ΦH -Kurve ist aus Bild 4.5 ersichtlich.

Etwas anders sind die Verhältnisse für den grossen Armierungsgehalt $\omega = 0,5$ (Bild 4.6b). Auch bei diesem Querschnitt nimmt der Betondruck d_b für grosse Stauchungen ab. Die Armierung ist aber so stark bemessen, dass sie das achsiale Gleichgewicht allein gewährleisten kann. Der m - ΦH -Verlauf (Bild 4.5b) nimmt auch für diesen Querschnitt vorerst ab. Das Moment nähert sich mit zunehmendem ΦH und dem entsprechend abnehmenden d_b dem Moment m_s , das allein vom Stahl übertragen werden kann. Für diesen Fall berechnet sich m_s zu:

$$\begin{aligned} m_s &= (-d_s + z_s) \cdot \left(0,5 - \frac{U}{H}\right) \\ &= (0,5 + 0,2) \cdot 0,4 = 0,28 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Der m - ΦH -Verlauf für $p = 0$ ist durch die Annahme eines parabolischen σ_b - ϵ_b -Verlaufes nur wenig beeinflusst, da die Betonstauchungen die $\epsilon_{b,1}$ -Grenze erst bei sehr grossen Krümmungen überschreiten.

Schlussfolgerungen

Die Stahlsorte ist nur für extrem hohe Armierungsgrade und kleine Verformungen von Bedeutung. Im Bereich grosser Verformungen sind die unterschiedlichen Eigenschaften des Stahles von untergeordneter Bedeutung. Nur für die Untersuchung der Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken (Kapitel 7) muss die Verfestigung berücksichtigt werden.

Das Spannungs-Stauchungs-Verhalten des Betons beeinflusst vor allem die Duktilität, d.h. das Verformungsvermögen ohne wesentlichen Abfall der Tragfähigkeit. Unproblematisch in dieser Beziehung ist das parabolisch-gerade σ_b - ϵ_b -Diagramm. Es führt zu einem konstanten Moment für grosse Verformungen. Auf der anderen Seite ist die Duktilität beim parabolischen σ_b - ϵ_b -Diagramm durch die Forderung des achsialen Gleichgewichtes begrenzt. Diese Begrenzung entfällt, sobald die Armierung allein die äussere Achsiallast übertragen kann. Im Gebrauchsbereich ist das σ_b - ϵ_b -Verhalten nur für kleinen Armierungsgehalt und grosse Achsiallast p von Bedeutung.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Duktilität gewährleistet ist, solange das achsiale Gleichgewicht erfüllt werden kann. Der Einfluss des Momenten-Krümmungs-Verhaltens auf die Verformungsfähigkeit von eingespannten und gelenkig gelagerten Stützen wird in den folgenden Kapiteln untersucht.

5. BERECHNUNG VON STAHLBETONSTUETZEN

5.1 Linear-elastische Analyse

Analytische_Lösungen

Die Stoffgesetze für Stahlbeton haben eine nichtlineare, elastisch-plastische Charakteristik. Für die praktische Berechnung wird aber oft näherungsweise ein linear-elastisches Verhalten angenommen. Damit wird das Stabilitätsproblem als Spannungsproblem behandelt. Die grundlegende Theorie dazu hat Euler bereits im 18. Jahrhundert entwickelt und soll in diesem Abschnitt auf die eingespannten Stützen angewendet werden. Die Annahme eines linearen Materialverhaltens macht analytische Lösungen möglich. Damit kann auch der Effekt des Einspanngrades explizit dargestellt werden.

Die nach Euler benannte Verzweigungslast P_E beim zentrisch gedrückten Stab berechnet sich zu:

$$P_E = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\lambda_k^2} \quad (5.1)$$

wobei: P_E = Eulerlast

EI = Biegesteifigkeit

λ_k = Knicklänge

Die Knicklänge λ_k ist abhängig von der Art der Lagerung und wird weiter unten noch näher diskutiert.

Für exzentrisch belastete Stäbe gilt die folgende Beziehung:

$$z'' = - \frac{M}{EI} \quad (5.2)$$

Durch Integration dieser Beziehung können analytische Ausdrücke für die Auslenkung z und das Moment M gefunden werden. Im Folgenden werden die beiden bereits in der Einleitung erwähnten Stützenlagerungen (Bild 1.1) untersucht. Es soll der allgemeine Fall der einseitig elastisch eingespannten Stütze mit horizontaler Stützenkopfverschiebung Δ behandelt werden (Bild 5.1). Diese Lösung schliesst auch die beiden Extremfälle der beidseitig eingespannten Stütze einerseits und der einseitig gelenkig gelagerten Stütze andererseits ein. Der Einspanngrad ist durch die Federkonstante α gegeben. α entspricht dem Winkel θ bei einem Moment $M = 1$. Der Biegemomentenverlauf berechnet sich zu:

$$M(x) = W \cdot x + P \cdot z - M^U \quad (5.3)$$

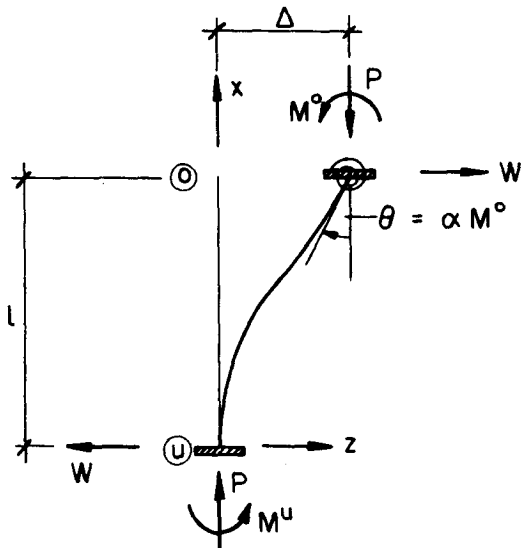


Bild 5.1: Elastisch eingespannte Stütze

Mit den Ausdrücken (5.2) und (5.3) ergibt sich die zu lösende Differentialgleichung:

$$z'' + k^2 \cdot z = \frac{1}{P} \cdot (M^u - W \cdot x) \cdot k^2 \quad (5.4)$$

$$\text{wobei: } k^2 = \frac{P}{EI}$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung für die Auslenkung z ergibt sich zu:

$$z = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) + C \cdot x + D \quad (5.5)$$

Die vier Integrationskonstanten A , B , C und D können mit den folgenden Randbedingungen bestimmt werden:

$$\left. \begin{array}{l} z = 0 \quad \text{für } x = 0 \\ z' = 0 \quad \text{für } x = 0 \\ z = \Delta \quad \text{für } x = l \\ z' = M^o \cdot \alpha \quad \text{für } x = l \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Mit der Momentengleichgewichtsbedingung für den Stützenfuss

$$M^u = P \cdot \Delta + W \cdot l - M^o \quad (5.7)$$

und der Lösung (5.5) ergeben sich die folgenden Ausdrücke für die Einspannmomente, die Horizontalkraft und die Auslenkungen:

$$M^0 = \frac{EI \cdot k^2 \cdot (1 - \cos(k \cdot l))}{\Omega} \cdot \Delta \quad (5.8)$$

$$M^U = \frac{EI \cdot k^2 \cdot (1 - \cos(k \cdot l)) + (EI)^2 \cdot k^3 \cdot \alpha \cdot \sin(k \cdot l)}{\Omega} \cdot \Delta \quad (5.9)$$

$$W = \frac{EI \cdot k^3 \cdot \sin(k \cdot l) + (EI)^2 \cdot k^4 \cdot \alpha \cdot \cos(k \cdot l)}{\Omega} \cdot \Delta \quad (5.10)$$

$$z = \frac{W}{P} \cdot \left(\frac{\sin(k \cdot x)}{k} - x \right) + \frac{M^U}{P} \cdot (1 - \cos(k \cdot x)) \quad (5.11)$$

wobei

$$\Omega = 2 - 2 \cdot \cos(k \cdot l) - k \cdot l \cdot \sin(k \cdot l) + EI \cdot k \cdot \alpha \cdot \sin(k \cdot l) - EI \cdot k^2 \cdot l \cdot \alpha \cdot \cos(k \cdot l)$$

Einfluss des Einspanngrades

Die Auflagerreaktionen M und W sind abhängig vom Einspanngrad. Die beiden extremen Federkonstanten α entsprechen den in Bild 1.1 gezeigten Auflagerbedingungen. Federkonstante $\alpha = 0$ entspricht der beidseitig eingespannten Stütze. Die Einspannmomente M^0 und M^U berechnen sich aus (5.8) und (5.9) für diesen Fall zu:

$$|M^0| = |M^U| = \frac{EI \cdot k^2 \cdot (1 - \cos(k \cdot l))}{2 - 2 \cdot \cos(k \cdot l) - k \cdot l \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \Delta \quad \text{für } \alpha = 0 \quad (5.12)$$

Eine unendlich grosse Federkonstante $\alpha \rightarrow \infty$ entspricht der oben gelenkig gelagerten Stütze. Die Momente berechnen sich aus (5.8) und (5.9) für diesen Fall zu:

$$M^0 = 0 \quad \text{für } \alpha \rightarrow \infty \quad (5.13)$$

$$|M^U| = \frac{EI \cdot k^2}{1 - k \cdot l \cdot \cot(k \cdot l)} \cdot \Delta$$

In Bild 5.2 ist ein Rechenbeispiel des Verlaufes der Einspannmomente M^0 und M^U in Abhängigkeit der Federkonstanten α gezeigt. Auffallend ist der starke Abfall der Kurven für kleine α . Dies bedeutet eine grosse Abnahme der Stützenbeanspruchung schon bei einer kleinen Lockerung der Einspannung beim Stützenkopf.

Bild 5.3 zeigt ein Beispiel eines Tragwerkes, bei dem die Grössenordnung für mögliche Federkonstanten α gezeigt werden kann. Die Parameter sind dieselben wie beim Rechenbeispiel von Bild 5.2. Nach der Theorie 1. Ordnung berechnet sich α (= reziproker Wert der Stabsteifigkeit) zu:

$$\alpha = \frac{l}{4 \cdot EI} = 0,01 \quad (5.14)$$

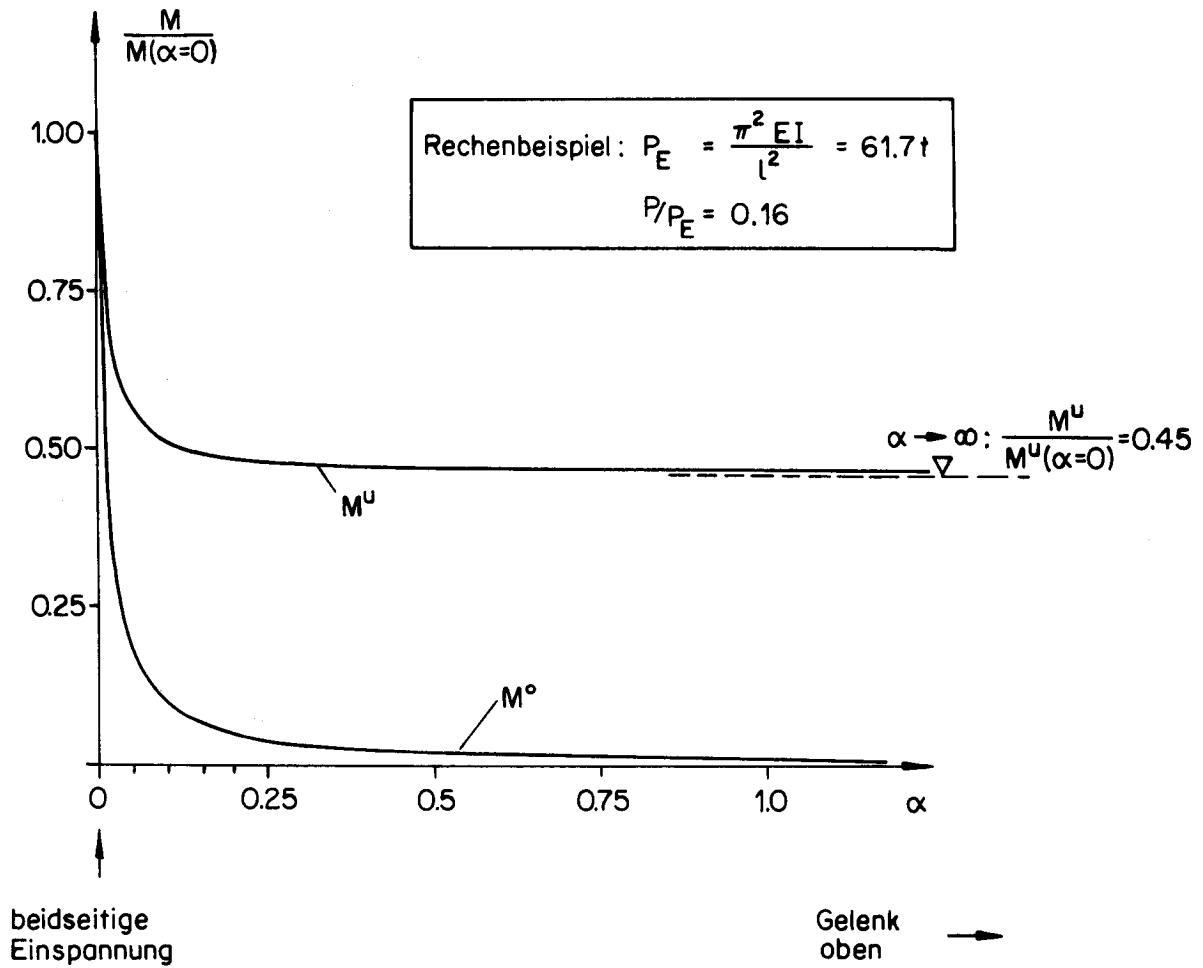


Bild 5.2 : Einfluss des Einspanngrades bei einer elastisch eingespannten Stütze (Rechenbeispiel)

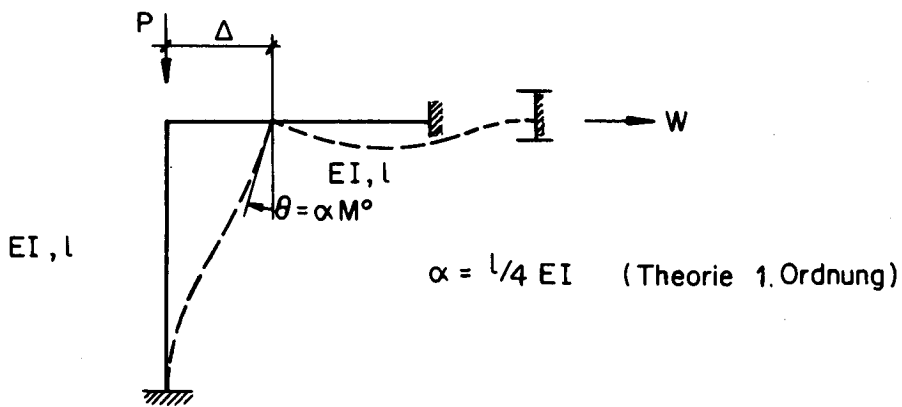


Bild 5.3 : Rechenbeispiel für Federkonstante α

Zu diesem Wert für α kann die Beanspruchung der Stütze dem Bild 5.2 entnommen werden. Das Stützenkopfmoment M^0 beträgt zum Beispiel noch ungefähr 50% des Momentes bei absolut fester Einspannung (d.h. $\alpha = 0$). Diese Berechnung von α gilt streng richtig nur für unverschiebliche Lagerung. Für eine verschiebliche Lagerung wie sie in Bild 5.3 gestrichelt dargestellt ist, müssen die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten System formuliert werden. Dies wurde gemacht in Gleichung (5.7) und in der Berechnung der Kurven in Bild 5.2. Dagegen ist in Gleichung (5.14) keine Normalkraft berücksichtigt. Im horizontalen Stab des deformierten Systems des Rechenbeispielles existiert aber eine Zugkraft W . Diese Zugkraft hat die Tendenz, den Stab zu strecken und damit den Einspanngrad der Stütze etwas zu erhöhen.

Im Brückenbau sind die Verhältnisse insofern anders, als die Steifigkeit des Ueberbaues normalerweise wesentlich grösser ist als diejenige der Stützen. Dementsprechend ist auch der Einspanngrad grösser. Immerhin ist auch bei Brücken mit üblichen Abmessungen eine Reduktion der Stützenkopfmomente durch Lockerung der Einspannung möglich. Eine 100-prozentige Einspannung ist praktisch nie zu erreichen.

Knicklänge l_k

Die Eulerlast P_E ist in (5.1) gegeben. Sie entspricht nicht nur der Verzweigungslast für den zentrisch gedrückten Stab, sondern wird in linear-elastischen Berechnungsmethoden oft auch als Bezugsgrösse bei Verformungsberechnungen exzentrisch belasteter Stützen verwendet. Der Hauptparameter ist dabei die von der Lagerung abhängige Knicklänge l_k . Sie soll anhand der beiden in dieser Arbeit zur Diskussion stehenden Stützen (Bild 1.1) veranschaulicht werden.

Bild 5.4 zeigt schematisch für die beiden Stützen 1 und 2 die möglichen Auslenkungskonfigurationen. Sie können in Abhängigkeit von P aus den Gleichungen (5.9), (5.10) und (5.11) berechnet werden. Für die Last $P_{E,1}$, die mit (5.1) und einer Knicklänge $l_{k1,1} = l$ für die beidseitig eingespannte Stütze 1 resp. $l_{k2,1} = 2 \cdot l$ für die einseitig gelenkig gelagerte Stütze 2 berechnet wird, wird die Horizontalkraft W gleich null. $P_{E,1}$ entspricht der Knicklast für die verschiebliche Lagerung. Für $P > P_{E,1}$ wird W negativ und das Einspannmoment M^u beim Stützenfuss wird kleiner. Für $M^u = 0$ hat die Biegelinie beim Stützenfuss einen Wendepunkt und P wird gleich $P_{E,2}$. $P_{E,2}$ ist die Eulerlast berechnet aufgrund $l_{k1,2} = 0,5 \cdot l$ resp. $l_{k2,2} = l$. Für $l_{k1,3} = 0,35 \cdot l$ resp. $l_{k2,3} = 0,7 \cdot l$ wird $P = P_{E,3}$. Unter dieser Last werden die Einspannmomente, die Horizontalkräfte W und die Auslenkungen ∞ gross. $P_{E,3}$ ist die Knicklast für die unverschieblich gelagerten Stützen. Die beiden Stützen 1 und 2 können analog betrachtet werden. Stütze 1 ist symmetrisch und ihre Knickfiguren lassen sich auch aus den Knickfiguren der Stütze 2 bestimmen.

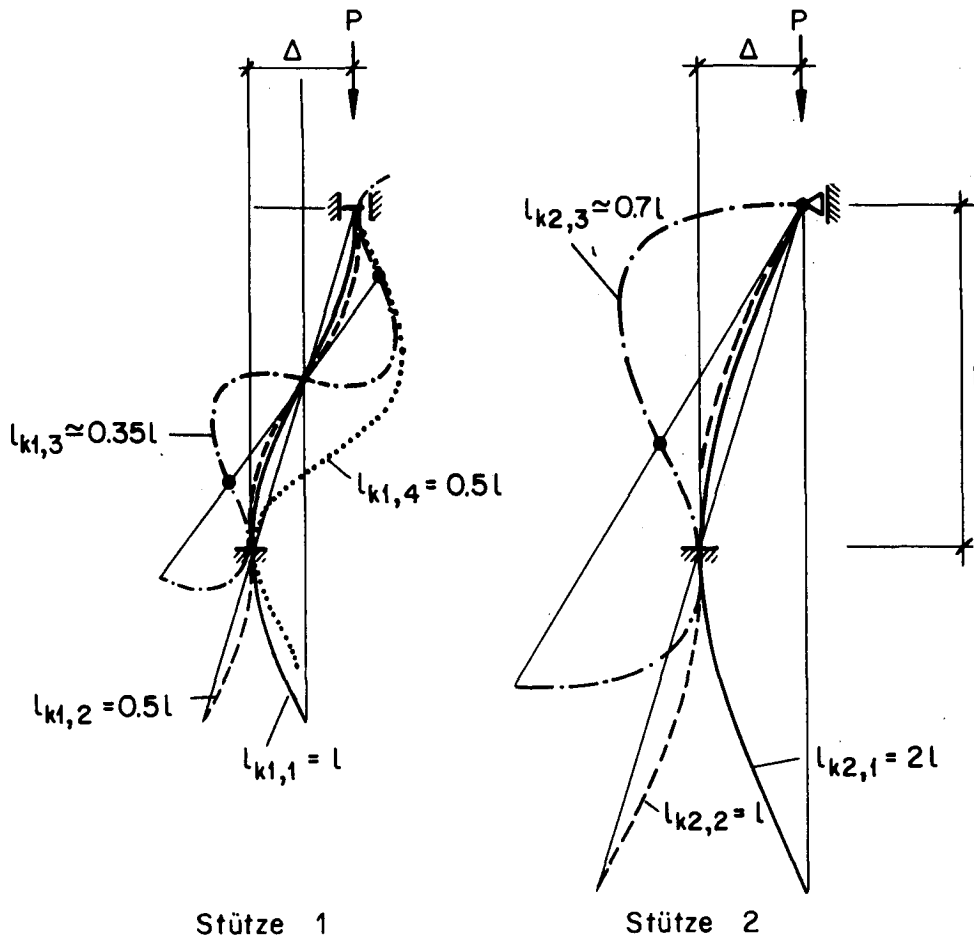


Bild 5.4: Mögliche Knickfiguren für die Stützen 1 und 2

Die Knicklängen der Stütze 1 sind halb so gross wie diejenigen der Stütze 2. Es ist aber zu beachten, dass für Stütze 1 auch eine asymmetrische Knickfigur (Bild 5.4) mit einer Knicklänge $l_{k1,4} = 0,5 \cdot l$ möglich ist. In der Praxis wird die symmetrische Knickfigur durchschlagen, wenn die Stütze nicht in der Mitte gehalten wird. Die praktische Knicklast für die unverschieblich gelagerte Stütze 1 liegt also bei $P_{E1,2}$.

5.2 Nichtlineare, elastisch-plastische Analyse

Das nichtlineare, elastisch-plastische Verformungsverhalten von Stahlbeton erfordert iterative Rechenprozesse, die mit vernünftigen Rechenaufwand nur mit dem Computer bewältigt werden können. Das für diese Arbeit entwickelte Rechenprogramm ist in [2] und [3] detailliert beschrieben. Im folgenden Abschnitt soll der dem Programm zugrundeliegende Rechnungsgang erläutert werden.

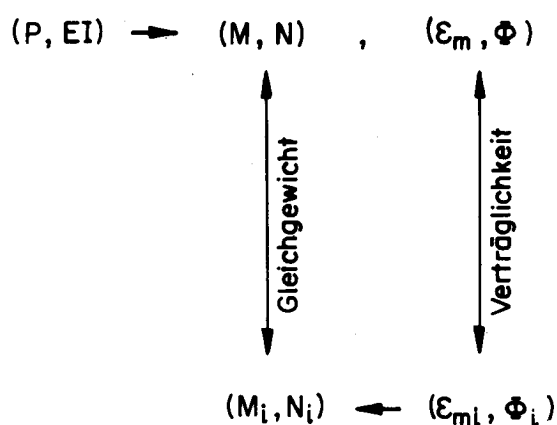
Die Traglast- und Verformungsberechnungen von Stahlbetonrahmen bieten zwei

grundsätzliche Schwierigkeiten:

- Die nichtlinearen Spannungs-Verformungs-Zeit-Beziehungen führen zu einer Nichtlinearität des Materialverhaltens.
- Der Einfluss der Verformungen auf die Gleichgewichtsbedingungen bewirken eine geometrische Nichtlinearität.

Diese beiden Nichtlinearitäten werden getrennt berücksichtigt, wie es in Bild 5.5 gezeigt ist.

Elastische Berechnung 2. Ordnung
(geometrische Nichtlinearität)



Querschnittsanalyse
(Nichtlinearität des Materials)

Bild 5.5: Schematische Darstellung des Rechnungsganges

Die Querschnittsanalyse und die elastische Berechnung 2. Ordnung sind durch die Gleichgewichtsbedingungen und durch die Verträglichkeitsbedingungen der Verformungen miteinander gekoppelt.

Querschnittsanalyse

In der Querschnittsanalyse werden die inneren Kräfte M_i und N_i wie folgt berechnet (Bild 4.1):

$$M_i = \int \sigma \cdot z \cdot dF \quad (5.15)$$

$$N_i = \int \sigma \cdot dF$$

M_i und N_i werden für gegebene Querschnittseigenschaften, eine bestimmte Dehnungsverteilung und gegebene Materialeigenschaften berechnet. Unter der Annahme des Ebenbleibens des Querschnittes berechnet sich die Dehnungsverteilung (Bild 4.1) wie folgt:

$$\epsilon_i(z) = \epsilon_{mi} - \phi \cdot z \quad (5.16)$$

wobei:

ϵ_{mi} = Achsiale Verformung in der Bezugsaxe

ϕ = Krümmung

z = Distanz von der Bezugsaxe

Mit einem beliebigen Spannungs-Verformungs-Diagramm, wie es im 3. Kapitel diskutiert ist, können mit (5.15) die inneren Kräfte bestimmt werden.

Elastische Berechnung 2. Ordnung

In der elastischen Analyse werden die Kräfte M , N und die Verformungen ϵ_m , ϕ aufgrund gegebener Geometrie des Tragwerkes, gegebener Lasten und gegebener Steifigkeiten bestimmt. Dies ist möglich mit der Methode der finiten Elemente, die für diesen einfachen Fall ebener Stabtragwerke im Anhang A.2 näher beschrieben ist. Das Tragwerk wird in Balken und Druckglieder unterteilt, die ihrerseits in einzelne Elemente aufgeteilt werden. Die Verschiebungen der Verbindungspunkte sind die Unbekannten, mit Hilfe derer die Beanspruchung und Verformungen der einzelnen Elemente berechnet werden können. Die Last-Verschiebungs-Beziehungen müssen für das ganze Tragwerk formuliert werden und können wie folgt geschrieben werden:

$$([K_1] + [K_2]) \cdot \{w\} = \{P\} \quad (5.17)$$

wobei

$[K_1]$ = Steifigkeitsmatrix 1. Ordnung

$[K_2]$ = geometrische Steifigkeitsmatrix

$\{w\}$ = Verschiebungsvektor

$\{P\}$ = Lastvektor

In einer Berechnung 1. Ordnung werden die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert und die geometrische Steifigkeitsmatrix $[K_2]$ verschwindet. In einer Berechnung 2. Ordnung werden die Gleichgewichtsbedingungen am deformierten System formuliert. Die zusätzliche Steifigkeitsmatrix $[K_2]$ ist abhängig von den Normalkräften N in den Elementen. Diese sind wiederum abhängig von den äusseren Lasten, so dass eine nichtlineare Beziehung besteht zwischen den Verschiebungen und den Lasten. Daraus resultiert ein iterativer Rechenprozess, der mit angenommenen Normalkräften beginnt. Normalerweise sind die Normalkräfte nur wenig beeinflusst von den Effekten 2. Ordnung, so dass eine sehr schnelle Konvergenz möglich ist.

Berechnungsverfahren

Der eigentliche Rechnungsgang zielt dahin, die Gleichgewichts- und die Verträglichkeitsbedingungen zu erfüllen und damit einen Punkt der Last-Verschiebungs-Beziehung des Tragwerkes zu finden. In Bild 5.6 ist als Flussdiagramm

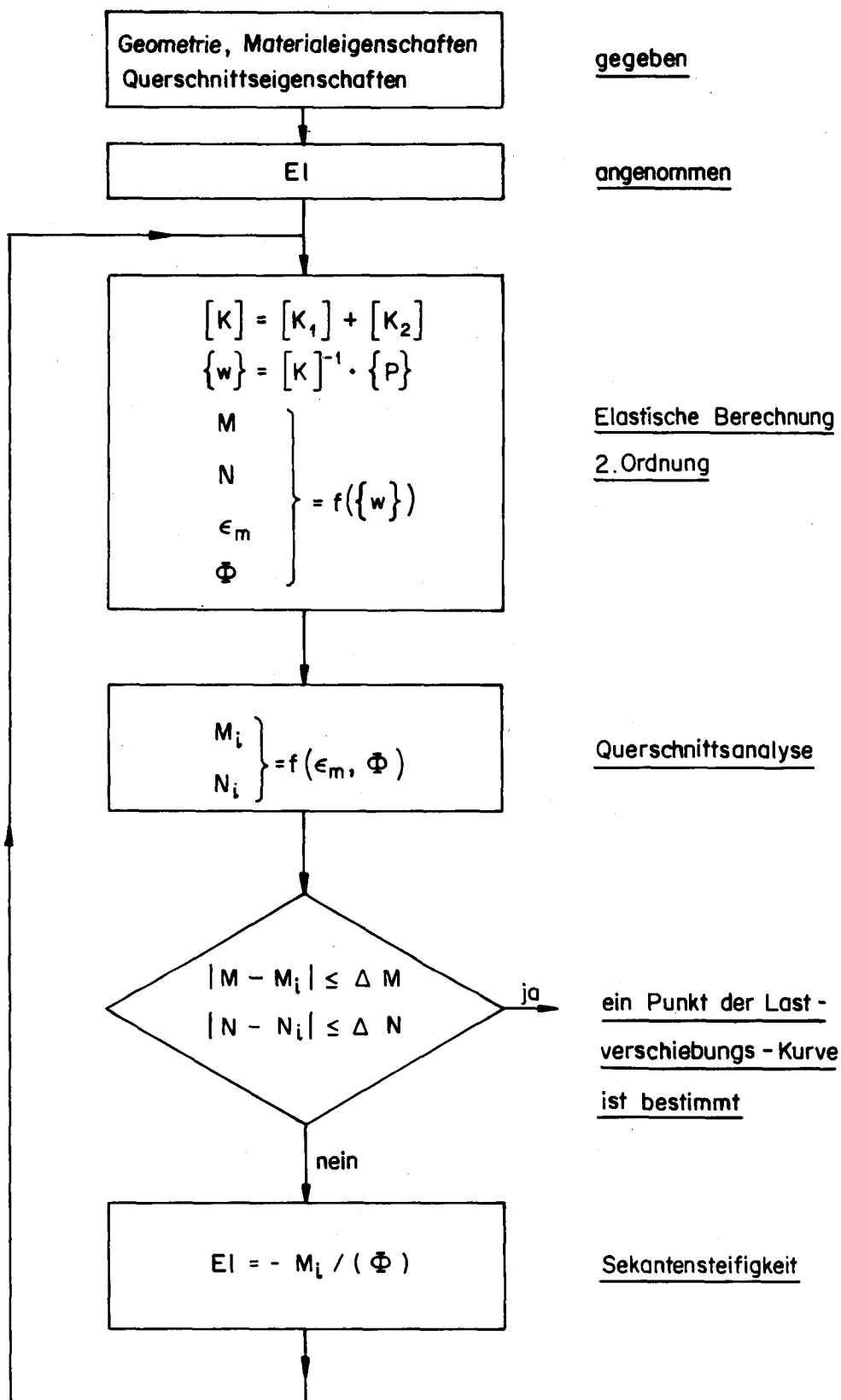


Bild 5.6: Flussdiagramm des Berechnungsganges eines Rahmentragwerkes

der Rechnungsgang dargestellt. Mit gegebener Geometrie des Tragwerkes, gegebenen Material- und Querschnitseigenschaften und angenommenen Biegesteifigkeiten für alle Elemente werden in einer elastischen Berechnung 2. Ordnung die Kräfte M , N und die Dehnungsverteilung bestimmt. Die Dehnungsverteilung ist gegeben durch die Verformung ϵ_m in der Bezugsaxe und der Krümmung Φ . Die inneren Kräfte M_i und N_i werden in der Querschnittsanalyse aufgrund der in der elastischen Berechnung gefundenen Dehnungsverteilung bestimmt. Damit sind die Verträglichkeitsbedingungen erfüllt und das Kräftegleichgewicht wird zum Konvergenzkriterium.*¹⁾ Ist die Konvergenz nicht erreicht, wird der ganze Rechnungsgang mit verbesserten Sekantensteifigkeiten, die aus den inneren Momenten berechnet werden, wiederholt.

Die Traglastberechnung von schlanken Druckgliedern kann auf ein Stabilitätsproblem führen, wie es in Bild 5.7 gezeigt ist. Bei einem lastgesteuerten

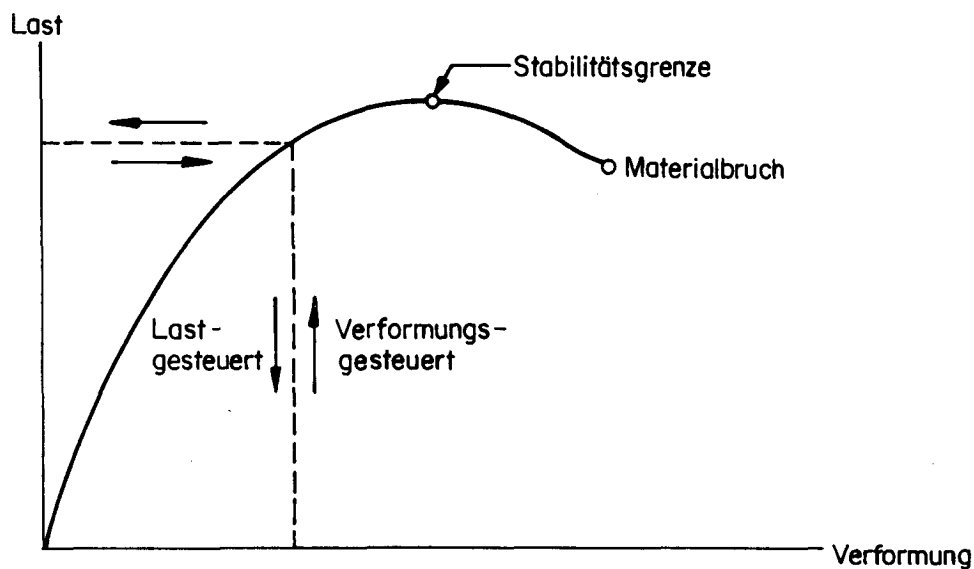


Bild 5.7: Last - Verformungs - Kurve eines schlanken Druckgliedes

Rechengang, bei dem die Last schrittweise erhöht wird, ist die Konvergenz in der Nähe der Maximallast schlecht. Der absteigende Ast der Last-Verformungs-Kurve kann nicht gerechnet werden. Anders ist es bei einem verformungs-gesteuerten Vorgehen, bei dem eine spezifizierte Verformung schrittweise erhöht, und die dazugehörige Last berechnet wird. Bei diesem Vorgehen treten keine Konvergenzschwierigkeiten auf.

*¹⁾ Im Rechenprogramm [2], [3] wird ein anderes Konvergenzkriterium verwendet. In der Querschnittsanalyse wird ϵ_m iterativ so bestimmt, dass das achsiale Gleichgewicht erfüllt ist. Die Krümmung Φ wird konstant gehalten. In diesem Fall wird das Moment M und die Verformung ϵ_m zum Konvergenzkriterium.

6. EINGESPANNTE STAHLBETONSTUETZEN MIT AUFGEZWUNGENEN VERFORMUNGEN

6.1 Stützen mit elastischem Materialverhalten

Die Grundlagen für den Vergleich der beiden Stützenlagerungen, wie sie in Bild 1.1 gezeigt sind, sind in Kapitel 5.1 diskutiert. Die Momentenbeanspruchungen bei der Einspannstelle der Stütze 1 ($\alpha = 0$) und Stütze 2 ($\alpha \rightarrow \infty$) sind bei aufgezwingener, horizontaler Stützenkopfverschiebung Δ mit den Gleichungen (5.12) und (5.13) gegeben. Sie haben die folgende Form:

$$M^U = f(P) \cdot \Delta \quad (6.1)$$

Das Stützenfussmoment ist abhängig von einer Funktion $f(P)$, welche trigonometrischer Natur und linear abhängig von der Auslenkung Δ ist. Der Verlauf von M^U ist in Bild 6.1 gegeben. Die Momente sind auf das maximale Stützenfussmoment der einseitig gelenkig gelagerten Stütze 2 bezogen. Die Achsial-

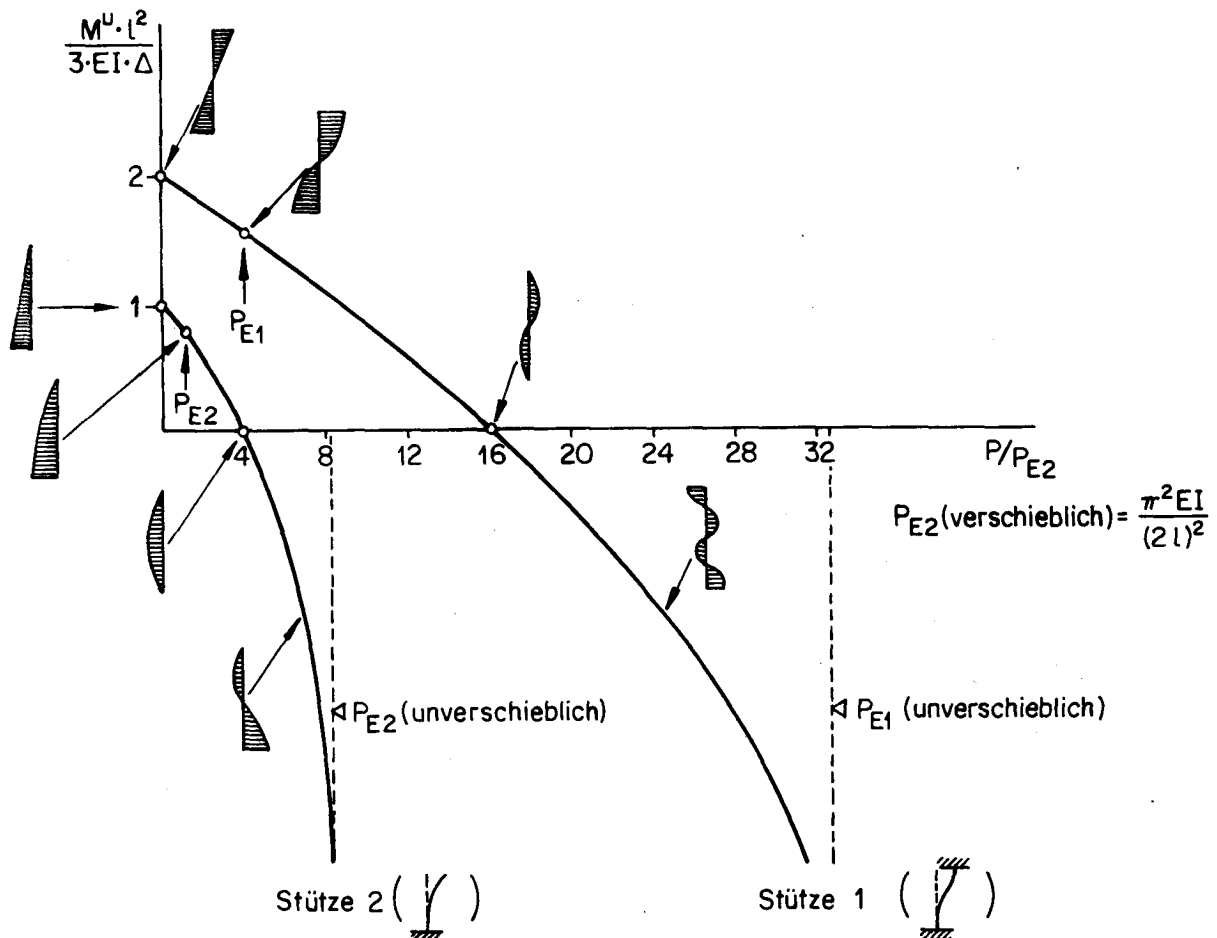


Bild 6.1: Momentenbeanspruchung bei aufgezwingener Verschiebung in Abhängigkeit der Achsiallast P .

lasten sind auf die Eulerlast P_{E2} der verschieblich gelagerten Stütze 2 bezogen. Schematisch sind auch die Momente über die ganzen Stützenlängen an einzelnen, charakteristischen Punkten angegeben. Diese Punkte entsprechen den in Bild 5.4 gezeigten Knickfiguren. Diese Kurven sind nur bei elastischer Betrachtung von Interesse. Im Stahlbetonbau können diese hohen Achsiallasten aus materialtechnischen Gründen nie erreicht werden. Der Vergleich der beiden zur Diskussion stehenden Stützenlagerungen wird deshalb nur für kleine Achsiallasten gemacht.

Bild 6.2 zeigt einen Vergleich der Stützenfussmomente der beiden Stützen.

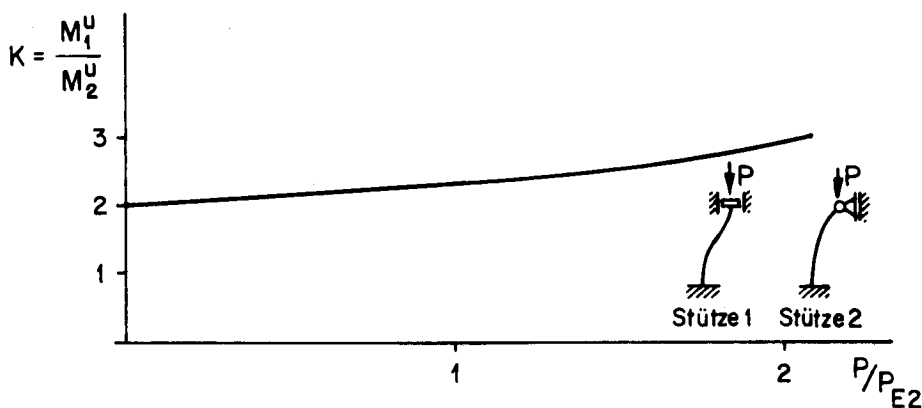


Bild 6.2: Vergleich der Stützenfussmomente für die beiden Lagerungen 1 und 2.

Das Momentenverhältnis K berechnet sich aus (5.12) und (5.13) zu:

$$K = \frac{M_1^u}{M_2^u} = \frac{\sin(k \cdot l) - \sin(k \cdot l) \cdot \cos(k \cdot l) - k \cdot l \cdot \cos(k \cdot l)}{2 \cdot \sin(k \cdot l) \cdot (1 - \cos(k \cdot l)) - k \cdot l \cdot \sin^2(k \cdot l)} \quad (6.2)$$

und ist, wie auch aus (6.1) ersichtlich ist, unabhängig von der Verschiebung Δ . Die in Bild 6.1 dargestellte Abnahme der Einspannmomente mit zunehmenden Achsiallasten P ist für die einseitig gelenkig gelagerte Stütze 2 ausgeprägter als für Stütze 1. Diese Tatsache bewirkt eine geringe Zunahme der Vergleichswerte K mit zunehmendem P (Bild 6.2). Diese Zunahme von K ist aber im Gebrauchsbereich des Stahlbetons, wo $P \ll P_E$, nicht von Bedeutung.

6.2 Unelastisches Verformungsverhalten von Stahlbetonstützen unter der Annahme einer parabolisch-geraden Beton-Charakteristik

In diesem und im folgenden Abschnitt wird vor allem der Einfluss der mit der Beanspruchung veränderlichen Biegesteifigkeit von Stahlbetonquerschnitten auf das Verformungsverhalten von Stützen untersucht. Grundlagen zu diesen Untersuchungen sind die in Kapitel 4 diskutierten Momenten-Krümmungs-Beziehungen. Es werden dieselben Parameterkonstellationen berücksichtigt. Neben der Achsiallast p und dem Armierungsgehalt ω ist auch die Schlankheit l/H , die durch das Verhältnis der Stützenlänge l zur Querschnittshöhe H gegeben ist, von Bedeutung. In den Bildern 6.3 und 6.4 sind die maximalen Momentenbeanspruchungen in Abhängigkeit der aufgezwungenen Stützenkopfverschiebungen Δ gezeigt. Diese Rechenbeispiele wurden entsprechend dem im vor-

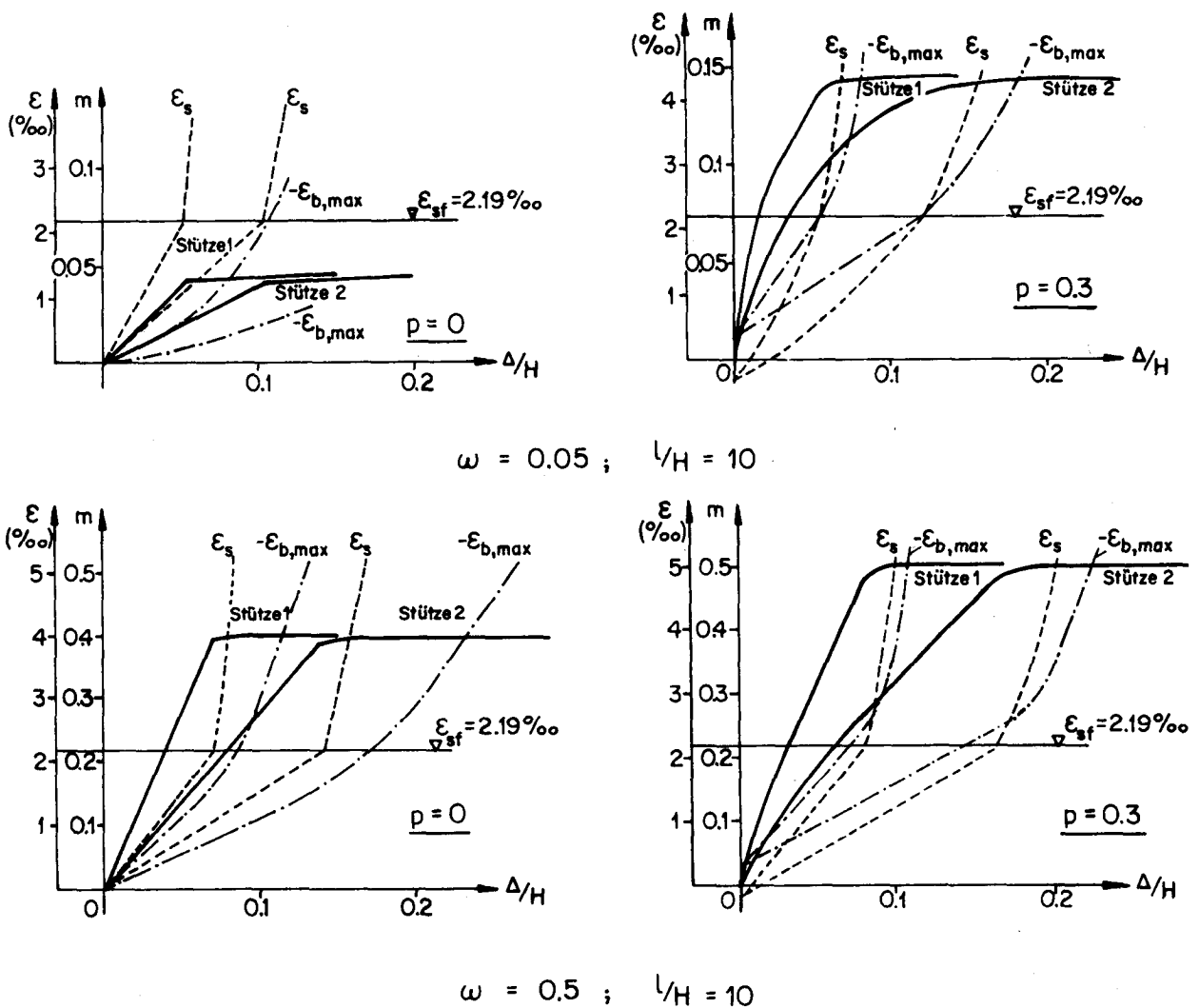


Bild 6.3 : Momente und Dehnungen im Einspannquerschnitt bei aufgezwungenen Verschiebungen (parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ - Diagramm).

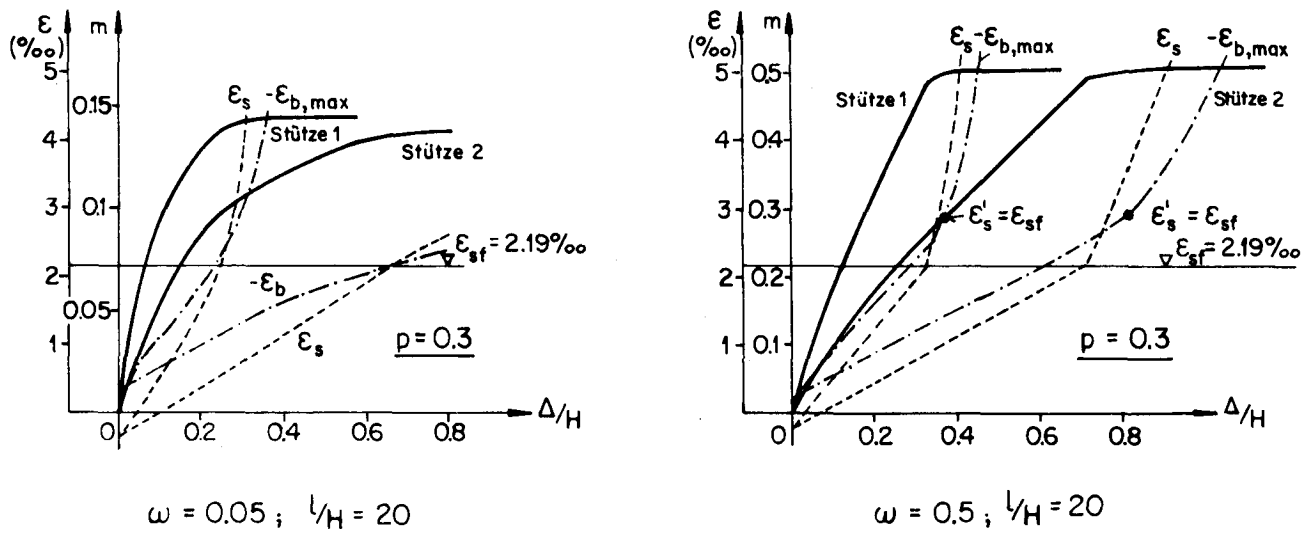


Bild 6.4: Momente und Dehnungen im Einspannquerschnitt bei aufgezwungenen Verschiebungen (parabolisch - gerades $\epsilon_b - \epsilon_s$ - Diagramm).

angehenden Kapitel beschriebenen Rechengang mit dem bereits erwähnten Computerprogramm ([2], [3]) durchgeführt.

Der Vergleich der beidseitig eingespannten Stütze 1 mit der einseitig gelenkig gelagerten Stütze 2 ist für die Frage der Stützenlagerung von Interesse und ist schematisch in Bild 6.5 gezeigt. Für bilineares Verformungsverhalten - in Bild 6.5 gestrichelt dargestellt - ist die Momentenbeanspruchung

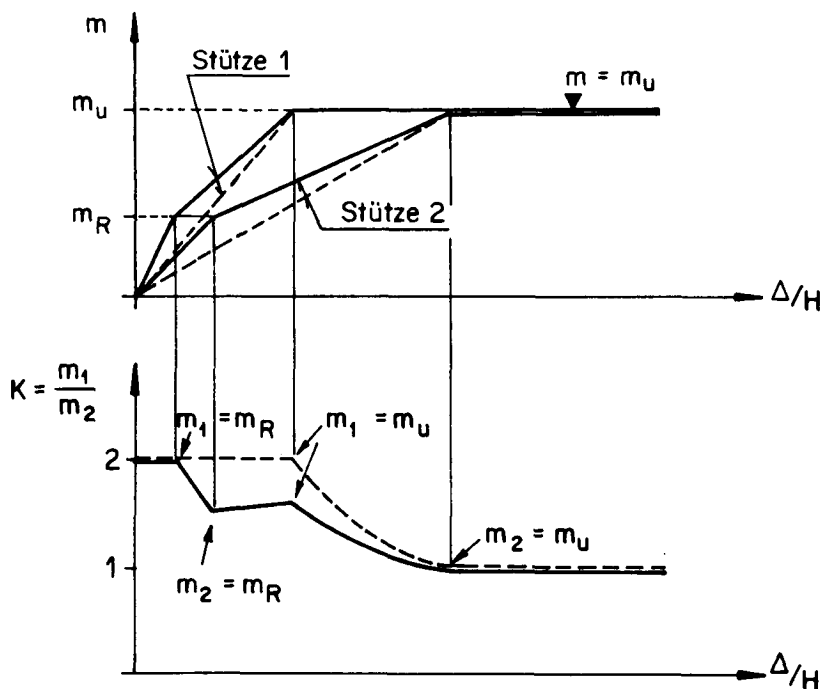


Bild 6.5: Schematischer Vergleich der Momentenbeanspruchung ($K = m_1/m_2$)

bei gleicher aufgezwingener Stützenkopfverschiebung für Stütze 1 doppelt so gross wie für Stütze 2 (d.h. $K = 2$) bis m_1 den Wert m_U erreicht. Bei weiterer Verformung bildet sich bei Stütze 1 ein plastisches Gelenk aus und $m_1 = m_U = \text{konstant}$. Entsprechend nimmt das Momentenverhältnis K ab bis es den Wert 1 erreicht bei $m_2 = m_U$. Sind die Momenten-Auslenkungs-Beziehungen der beiden Stützen nicht linear, so ändert sich auch der Verlauf von K . Ein solches Verhalten ist die Folge von Rissen und dem nicht linearen Spannungs-Stauchungs-Diagramm des Betons. In Bild 6.5 ist es mit einem Knick in der Momenten-Auslenkungs-Beziehung bei $m = m_R$ schematisch dargestellt. Die stärker beanspruchte Stütze 1 erreicht diesen Punkt für kleinere Verschiebungen, was einen Abfall von K bewirkt. Dieses Verhalten lässt sich damit erklären, dass das gestellte Problem ein Zwängungsproblem darstellt. Zwängungsmomente nehmen mit kleinerer Biegesteifigkeit ab.

Für das effektive Verformungsverhalten, wie es für extreme Parameter berechnet wurde und in den Bildern 6.3 und 6.4 dargestellt ist, kann für die meisten Parameterkonstellationen ein annähernd bilineares Diagramm festgestellt werden. Insbesondere trifft dies für diejenigen Fälle zu, bei denen ω im Vergleich zu p sehr gross ist und dementsprechend das bilineare Verhalten des Armierungsstahles dominant wird. Analog zur schematischen Betrachtung in Bild 6.5 ist der Momentenvergleich für das effektive Trag- und Verformungsverhalten, wie es in den Bildern 6.3 und 6.4 gezeigt ist, in Bild 6.6 gemacht.

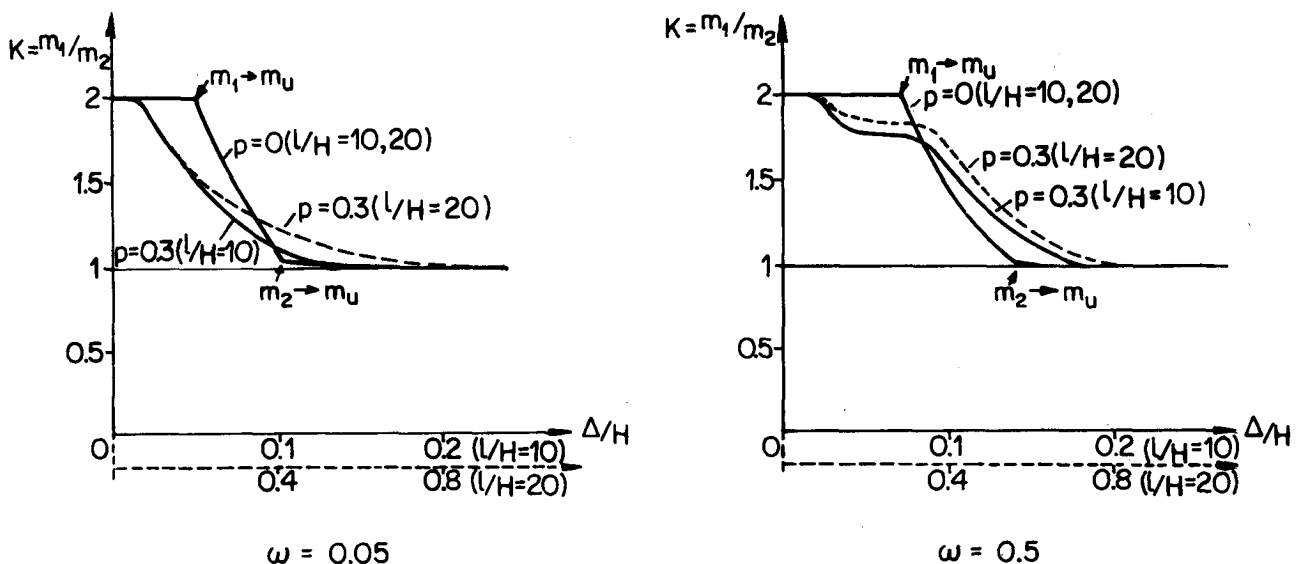


Bild 6.6: Vergleich der Momentenbeanspruchungen im Einspannquerschnitt der Stützen 1 und 2

Das annähernd bilineare Verhalten der Stützen mit kleiner Achsialkraft ($p \rightarrow 0$) oder grossem Armierungsgehalt ($\omega \rightarrow 0,5$) ist auch im Verlauf der Vergleichsgrösse K erkennbar. Für diese Parameter unterscheidet sich K nur unwesent-

lich vom gestrichelten Verlauf in Bild 6.5. In den Berechnungen wurde keine Zugfestigkeit berücksichtigt. Dies und die Tatsache, dass die maximalen Betonstauchungen $\epsilon_{b,max}$, die ebenfalls in den Bildern 6.3 und 6.4 gegeben sind, für kleines p sehr klein sind, führen zum bilinearen Verhalten. Für $p \rightarrow 0$ ist das Momentenverhältnis $K = 2$ und nimmt erst ab, wenn $m_1 \rightarrow m_u$. Für grosses p wird bei kleinen Δ die Zugzone des Querschnittes überdrückt. In den Bildern zeigt sich dies an den Stauchungen ϵ_s der Zugarmierung. Bei grösserem Δ kommt die überdrückte Zugzone in den Zugbereich und diese Unstetigkeit macht sich bemerkbar bei der Bestimmung der Biegesteifigkeit. Dies äussert sich in einer kleinen Krümmung des $m-\Delta/H$ -Verlaufes. Dementsprechend nimmt auch K ab, was in Bild 6.6 für $\omega = 0,5$ und $p = 0,3$ besonders gut ersichtlich ist. Noch stärker weicht der Momentenverlauf für kleines ω und grosses p von der Linearität ab. K nimmt deshalb für $p = 0,3$ und $\omega = 0,05$ schon für kleine Δ stark ab.

In Bild 6.4 ist die Momentenbeanspruchung gegeben für Stützen mit doppelter Schlankheit im Vergleich zu derjenigen von Bild 6.3. Anhand dieser Kurven und dem entsprechenden Verlauf von K für $l/H = 20$ in Bild 6.6 kann der Einfluss der Schlankheit auf den Vergleich der beiden Stützenlagerungen untersucht werden. Die Stützensauslenkungen können durch Integration der Krümmungen berechnet werden. Für $p = 0$ (Theorie 1. Ordnung) und konstante Biegesteifigkeit ist die Krümmungsverteilung unabhängig von der Schlankheit l/H der Stütze. In diesem Fall nehmen die Auslenkungen mit l/H quadratisch zu, oder was gleichbedeutend ist, die Momente bei gegebener Auslenkung nehmen mit zunehmender Schlankheit ab. Für das Momentenverhältnis K in Bild 6.6 muss für $p = 0$ und $l/H = 20$ deshalb nur der Massstab für Δ/H (Abszisse) geändert werden. Für grosse Achsialkraft $p = 0,3$ (Theorie 2. Ordnung) ist die Krümmungsverteilung abhängig von der Schlankheit. Die Auslenkungen wachsen mehr als quadratisch mit l/H oder die Momente für gegebenes Δ nehmen mehr als quadratisch ab mit l/H . Dies bewirkt für schlanke Stützen, dass die Momente der einseitig eingespannten Stütze 2 noch mehr abnehmen im Verhältnis zu den Momenten der beidseitig eingespannten Stütze 1, d.h. das Verhältnis K wird grösser für zunehmende Schlankheit (Bild 6.6).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass der Vergleich der Momentenbeanspruchungen der beiden Stützen 1 und 2 stark abhängig ist von der $m-\Phi H$ -Beziehung. Weicht sie von der elastischen Beziehung ab, so nimmt die Biegesteifigkeit EI mit zunehmender Beanspruchung ab und der Vergleichswert K nimmt ebenfalls ab. Dies ist der Fall für grosse Achsialkraft und kleine Armierung. Hingegen ist wegen des annähernd bilinearen Verformungsverhaltens die Abnahme von K bis zum Erreichen des Maximalmomentes bei Stütze 1 im allgemeinen nicht sehr bedeutend. Erst bei sehr grossen Verschiebungen nähert sich K dem Wert 1, wenn auch das Moment der einseitig gelenkig gelagerten

Stütze das Maximalmoment erreicht.

In diesen Untersuchungen wurden uneingeschränkte Verformungsmöglichkeiten im maximal beanspruchten Querschnitt bei der Einspannstelle vorausgesetzt. Die Verformungen werden bei der beidseitig eingespannten Stütze schon bei Verschiebungen, bei denen die einseitig gelenkig gelagerte Stütze die maximal mögliche Momentenbeanspruchung noch nicht erreicht, sehr gross. Beim Vergleich der beiden Stützen muss der Gebrauchsbereich einerseits und der Bruchbereich andererseits betrachtet werden. Im Gebrauchsbereich muss wegen der grossen Verformungen speziell das Risseverhalten untersucht werden. Im Bruchbereich sind die Bruchverformungen der Materialien von ausschlaggebender Bedeutung. Ist bei einem annähernd bilinearen $m-\Phi H$ -Verhalten das Maximalmoment m_u erreicht, dreht sich die "erstarrte" Stütze bei aufgezwungener Verschiebung nur noch um den Stützenfuss. Dieses Verhalten ist bereits im Kapitel 2 am Federmodell untersucht. Es bildet sich ein plastisches Gelenk aus. Die grossen Verformungen in diesem Gelenk sind abhängig von dessen Länge. Das Problem der Gelenkbildung wird in Kapitel 7 diskutiert.

6.3 Unelastisches Verformungsverhalten von Stahlbetonstützen unter der Annahme einer parabolischen Beton-Charakteristik

Die Spannungs-Stauchungs-Beziehung des Betons bestimmt weitgehend das Momenten-Krümmungs-Verhalten der Querschnitte und damit auch das Verformungsverhalten der Stützen. Im Folgenden soll das Verformungsverhalten bei parabolischer Betoncharakteristik untersucht werden.

Gemäss den Aussagen von Kapitel 4 ist die Tragfähigkeit des Querschnittes bei parabolischer Betoncharakteristik durch die Forderung des achsialen Gleichgewichtes begrenzt. Nach Ueberschreiten der Maximalspannung β bei einer Stauchung $\epsilon_{b,1}$ nimmt die Spannung ab bis sie bei $2 \cdot \epsilon_{b,1}$ verschwindet (Bild 3.6). Entsprechend nimmt auch die Betondruckkraft ab (Bilder 4.6 und 4.7). Für sehr grosse Verformungen muss die Armierung die ganze Druckkraft p aufnehmen. Dies ist möglich, wenn

$$|p| \leq |\omega'| + |\omega| \quad (6.3)$$

Die letzte Reserve des Querschnittes ist erschöpft, wenn auch die Zugarmierung unter Druck zum Fliessen kommt. Der Einfluss des Verhältnisses von p zu ω ist ersichtlich aus den Bildern 6.7 bis 6.10. Für einen mittleren Armierungsgehalt von $\omega = \omega' = 0,2$ sind in Bild 6.7 die $m-\Phi H$ -Diagramme für verschiedene p gegeben. Mit wachsender Achsialkraft p nimmt die Tragfähigkeit des Querschnittes bei grossen Verformungen ab. Für $p < 2 \cdot \omega$ nähert sich m dem Mo-

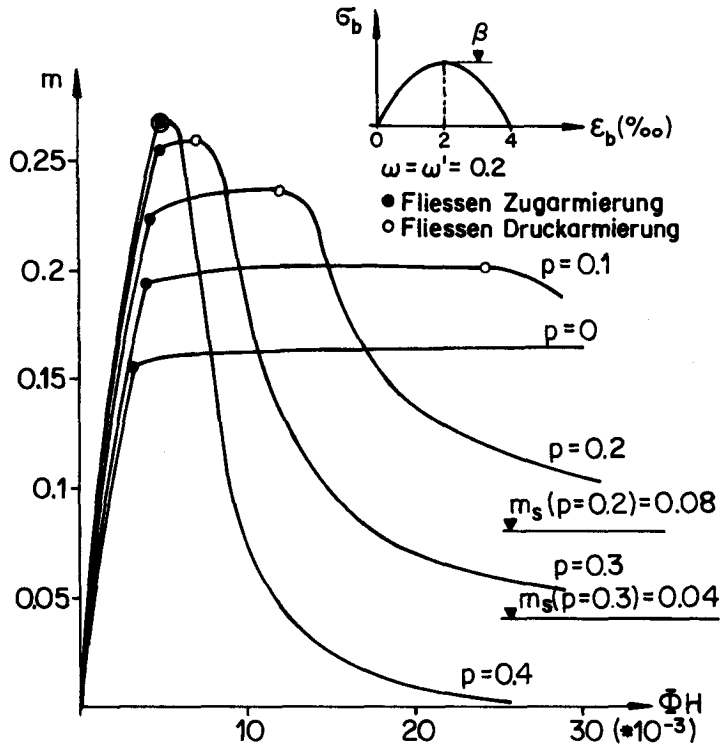


Bild 6.7: Momenten-Krümmungs-Verhalten (parabolisches σ_b - ϵ_b -Diagramm)

ment m_s , das vom Stahl allein übernommen wird, nachdem die Tragfähigkeit des Betons erschöpft ist ($d_b \rightarrow 0$). Für $p = 2 \cdot \omega = 0,4$ fließt die gesamte Armierung und bei symmetrischer Anordnung der Armierung kann bei grossen Verformungen kein Moment übertragen werden. Für $p > 2 \cdot \omega$ ist das axiale Gleichgewicht bei einer gewissen Verformung nicht mehr möglich, und der Querschnitt verliert seine Tragfähigkeit (z.B. Bild 4.5a).

In Bild 6.8 sind die Momentenbeanspruchungen in den Einspannquerschnitten der Stützen 1 und 2 bei aufgezungenen Stützenkopfverschiebungen Δ gegeben. Sie sind aufgrund der m - Φ_H -Kurven von Bild 6.7 berechnet. Entsprechend dem m - Φ_H -Verhalten nehmen die Momente für zunehmende Verformung ab, nachdem die Fließgrenze auf der Zug- und auf der Druckseite überschritten ist. Für stark abnehmenden Momentenverlauf bei grosser Achsialkraft p nehmen die Auslenkungen Δ des Stützenkopfes ab trotz zunehmender Verformung bei der Einspannstelle (Bild 6.8, 6.9).

Die Kurven dieser beiden Bilder konnten mit dem in [2] und [3] beschriebenen Rechenprogramm ermittelt werden. Dank dem verformungsgesteuerten Rechenprozess konnten die Krümmungen beim Einspannquerschnitt stetig erhöht werden. Diese Computerberechnungen bestätigen die im Kapitel 2 an einem einfachen Gedankenmodell erlangten Erkenntnisse. Der Verlauf der Stützenkopfauslenkungen (Bild 6.9) bei zunehmender Krümmung bei der Einspannstelle ist direkt vergleichbar mit Bild 2.3 resp. 2.5. Für einen horizontalen Momenten-

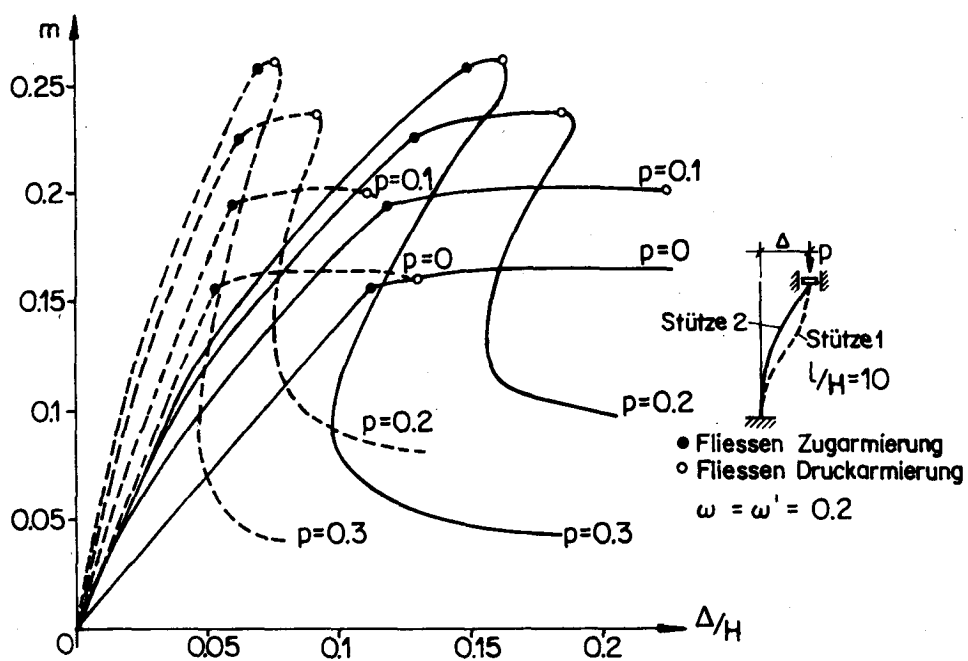


Bild 6.8: Momentenbeanspruchung im Einspannquerschnitt bei aufgezwungenen Verschiebungen (parabolisches σ_b - ϵ_b -Diagramm)

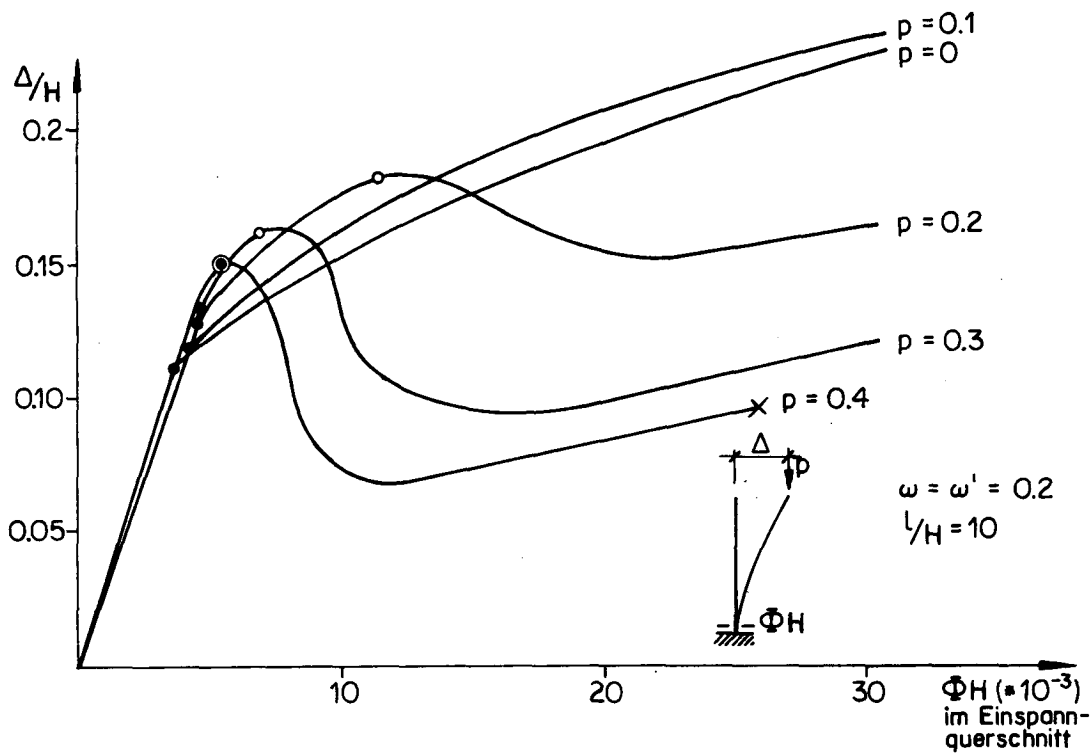


Bild 6.9: Stützenkopfauslenkungen in Abhängigkeit der Krümmung im Einspannquerschnitt

verlauf (z.B. für $p = 0$) nehmen die Auslenkungen mit ΦH stetig zu. Dies entspricht der Verdrehung der "erstarrten" Stütze (Pendelstab) um den Stützenfuss wie für die Verhältnisse beim parabolisch-geraden $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm von Abschnitt 6.2. Für abnehmenden Momentenverlauf (z.B. für grosses p) "streckt" sich die gekrümmte Stütze und die Auslenkungen nehmen ab bis der Momentenverlauf für sehr grosse ΦH wieder horizontal wird. Wie beim einfachen Federmodell sind diese Auslenkungskurven abhängig von der Elemententeilung. Für diese gerechneten Beispiele wurde beim Stützenfuss eine Elementlänge von $\frac{1}{32}$ der Stützenlänge gewählt. Dies entspricht ungefähr einem Drittel der Querschnittshöhe. Die Ausbreitung des plastischen Gelenkes ist in Kapitel 7 noch genauer untersucht.

Bild 6.8 erlaubt einen Vergleich der beidseitig eingespannten mit der einseitig gelenkig gelagerten Stütze. Der Vergleichsparameter $K = \frac{m_1}{m_2}$ nimmt zwar bis zu $m_{1,max}$ ab wie für das parabolisch-gerade $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm, verliert aber seine Bedeutung für grössere Auslenkungen. Werden grössere Δ erzwungen, so müssen die Verformungen im Einspannquerschnitt sprunghaft zunehmen, was einem Stabilitätsproblem gleichkommt. Der maximalen Auslenkung Δ_{max} kommt deshalb grosse Bedeutung zu. In Bild 6.10 sind die Δ_{max} in Abhängigkeit der Achsiallasten p für die beiden Stützenlagerungen gegeben. Die Δ_{max} für Stütze 2 sind ungefähr doppelt so gross wie für Stütze 1.

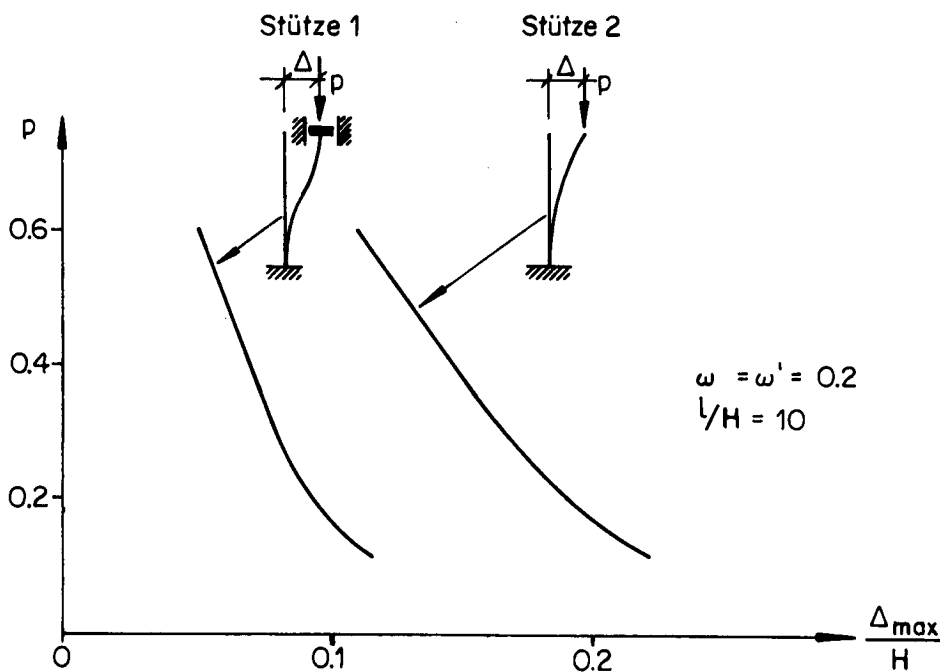


Bild 6.10: Maximale Auslenkungen in Abhängigkeit von p

Die extreme Annahme eines parabolischen Spannungs-Stauchungs-Verlaufes des Betons hat eine beschränkte Tragfähigkeit bei grossen Verformungen zur Folge. Dementsprechend sind auch die maximal möglichen Auslenkungen klein. Sie können aber wesentlich vergrössert werden durch die Plastifizierung der Einspannstellen. Die Rotationsfähigkeit solcher plastischer Gelenke ist im folgenden Kapitel untersucht.

7. ROTATIONSFAEHIGKEIT VON PLASTISCHEN GELENKEN BEI EINGESPANNTEN STUETZEN

7.1 Allgemeines

Duktilität

Um die Frage der Stützenlagerung diskutieren zu können, muss das Verformungsverhalten der Stützen auch im plastischen Bereich untersucht werden. Die Vergleiche der beidseitig eingespannten mit den einseitig gelenkig gelagerten Stützen im Kapitel 6 haben gezeigt, dass eingespannte Stützen sehr grosse Rotationsfähigkeiten bei der Einspannung erfordern. Die Rotationsfähigkeit ist abhängig von der Duktilität des Materials. Definitionsgemäss hat ein duktileres Material die Fähigkeit, aufgezwungene Deformationen über die Elastizitätsgrenze hinaus ohne wesentliche Reduktion der Tragfähigkeit mitzumachen.

Für Stahl trifft diese Forderung sehr gut zu. Im Stahlbau ist deshalb die Traglastberechnung schon seit längerer Zeit verbreitet. Sie geht davon aus, dass die Last so weit gesteigert werden kann, bis sich genügend plastische Gelenke ausgebildet haben, um einen Mechanismus zu ermöglichen. Zudem hat der Stahl die Eigenschaft, sich bei grossen Verformungen zu verfestigen. Dieser Verfestigungseffekt hat eine Ausbreitung des Fließbereiches zur Folge. Damit wird die Länge des plastischen Gelenkes und die mögliche Rotation vergrößert. Im Stahlbau werden daher oft festgelegte Deformationsbeschränkungen für die Bemessung massgebend.

Die Bruchverformung des unarmierten Betons ist wesentlich geringer als beim Stahl. Wie bereits in Kapitel 3 gezeigt, hat das Spannungs-Stauchungs-Diagramm des Betons für grosse Verformungen nach dem Ueberschreiten der Maximalspannung β einen absteigenden Ast. Dieser Entfestigungseffekt hat eine Beschränkung der möglichen Rotationsfähigkeit zur Folge, die bei der Untersuchung der plastischen Gelenke berücksichtigt werden muss. Die Tragfähigkeit von Beton wird durch die Stahleinlagen wesentlich verbessert. Nach Kapitel 3 verändert vor allem die Querarmierung den Spannungszustand im Stahlbeton, was eine bedeutende Steigerung der Duktilität zur Folge hat. Mit zunehmendem Gehalt an Längsarmierung wird die erwähnte grosse Duktilität des Stahles massgebend für die Verformbarkeit des Stahlbetonquerschnittes (Kapitel 4).

Einfluss der Momenten-Krümmungs-Beziehung auf die Rotationsfähigkeit

Das Momenten-Krümmungs-Diagramm ist in Kapitel 4 eingehend untersucht. Zwei extreme Annahmen sind in Kapitel 6 bei der Berechnung eingespannter Stützen mit aufgezwungenen Stützenkopfverschiebungen gemacht worden. Für die Unter-

suchung der Rotationsfähigkeit der plastifizierten Einspannung muss das Momenten-Krümmungs-Diagramm noch etwas genauer betrachtet werden. Im speziellen müssen die in diesem Zusammenhang besonders wichtige Verfestigung des naturharten Armierungsstahles und die Verformungseigenschaften von kaltverformtem Armierungsstahl berücksichtigt werden. Die für die Berechnung der Rotationsfähigkeit des plastischen Gelenkes massgebende Krümmungsverteilung wird im Folgenden für verschiedene $m-\Phi$ -Diagramme diskutiert. Die Verhältnisse werden an einer unten eingespannten Stütze mit aufgezwingener Stützenkopfverschiebung untersucht. Es ist dieselbe Stütze, welche vereinfacht in Kapitel 2 mit dem Federmodell untersucht ist (Bild 2.1).

Bild 7.1 zeigt für die angegebene Momentenverteilung den Einfluss verschiedener Momenten-Krümmungs-Beziehungen auf die Krümmungsverhältnisse über die Stützenlänge l . Beim linearen $M-\Phi$ -Diagramm (Bild 7.1a) verlaufen die Krümmungen über die ganze Stützenlänge l ähnlich zu den Momenten. Nur beim meist beanspruchten Querschnitt an der Einspannstelle gibt es eine Diskontinuität im Krümmungsverlauf. Mit einer Integration über die Krümmungen wird der Verdrehungswinkel θ berechnet. Bei einer Steigerung von θ über den elastischen Bereich hinaus nimmt die Krümmung im Einspannquerschnitt unendlich zu. Das plastische Gelenk kann sich wegen des angenommenen bilinearen $M-\Phi$ -Diagrammes nicht ausbreiten. Diese Situation ist praktisch nicht möglich und zeigt die Fragwürdigkeit einer reinen Querschnittsanalyse.

Eine plastische Rotation ist möglich, wenn das $M-\Phi$ -Diagramm bereits vor dem Erreichen des Fließplateaus gekrümmt ist. In Kapitel 4 ist gezeigt, dass dies vor allem bei grossen Achsiallasten zutrifft, wenn der Beton für das Verformungsverhalten des Querschnittes massgebend ist. Auch kaltverformte Armierungsstähle weichen vor Erreichen der Streckgrenze von der elastischen Geraden ab. Schematisch ist dieses Verformungsverhalten in Bild 7.1b durch drei Gerade dargestellt. Der entsprechende Krümmungsverlauf über die Stützenlänge l weicht stark vom elastischen Verhalten ab. Die schraffierte Fläche stellt die plastische Rotation θ_p dar. Auch bei diesem Verhalten werden die Krümmungen im Einspannquerschnitt unendlich gross.

Eine wesentliche Verbesserung der Rotationsfähigkeit wird erreicht, wenn die Verfestigung des Materials in Rechnung gestellt wird. Bild 7.1c zeigt die entsprechende Krümmungsverteilung. Das Anwachsen der Krümmungen bei der Einspannung ist nicht unbegrenzt. Die extrem grossen Krümmungen, in Bild 7.1c nicht massstäblich gezeichnet, verteilen sich über eine gewisse Länge. Damit wird die plastische Rotation θ_p wesentlich vergrössert.

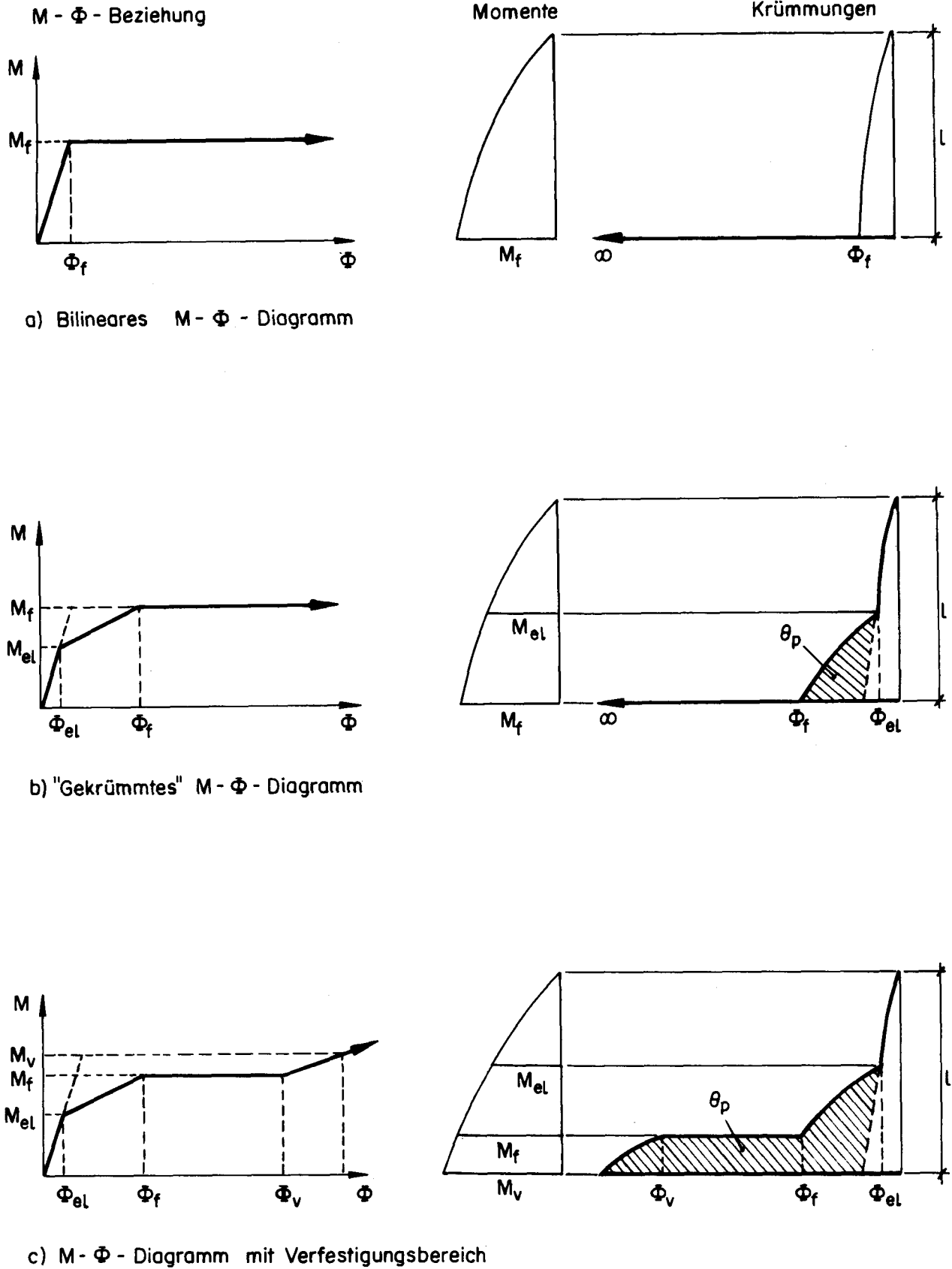
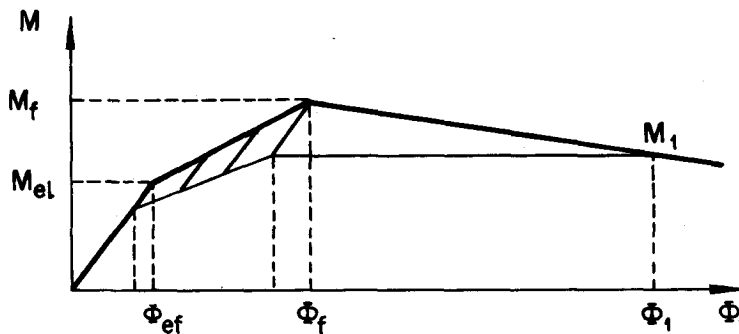
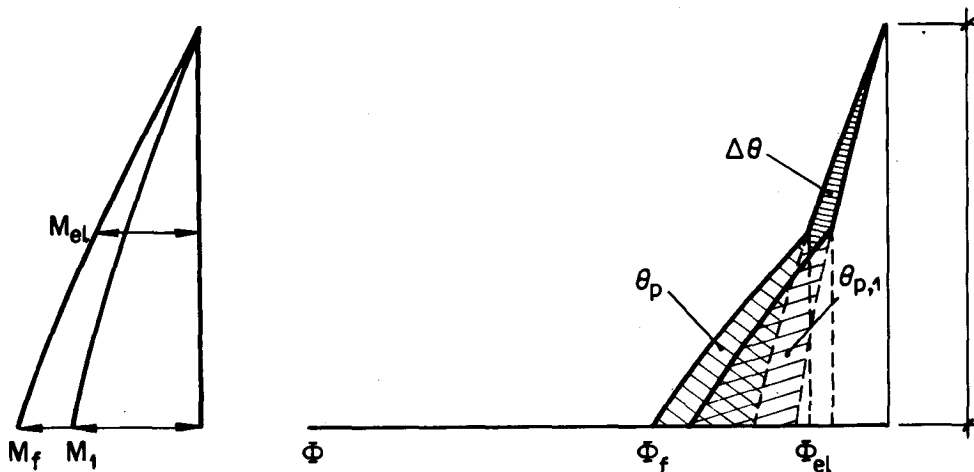


Bild 7.1: Einfluss des M - Φ - Diagrammes auf die plastische Rotation θ_p

Bild 7.2 zeigt die Krümmungsverhältnisse für ein $M-\Phi$ -Diagramm mit einem absteigenden Ast. Wird nach dem Erreichen des maximalen Momentes M_f die Verformung weiter vergrößert ($\Phi_1 > \Phi_f$), so nimmt das Moment beim meistbeanspruchten Querschnitt ab ($M_1 < M_f$). Damit müssen auch die Momente in den übrigen Querschnitten abnehmen. Dies führt dazu, dass mit Ausnahme des Einspannquerschnittes alle Krümmungen über die Stützenlänge kleiner werden. Entsprechend der eng schraffierten Fläche nimmt damit auch die plastische Rotation um $\Delta\theta$ ab. Die stark anwachsenden Krümmungen Φ im Einspannquerschnitt tragen nichts zu einer Vergrößerung der Rotation θ bei.



a) $M-\Phi$ -Diagramm mit absteigendem Ast



b) Momenten- und Krümmungsverteilung

Bild 7.2: Einfluss eines $M-\Phi$ -Diagrammes mit absteigendem Ast auf die plastische Rotation θ_p

Betrachtung im Querschnitt oder in einem endlichen Stabelement?

Die Diskussion des Einflusses des $M-\Phi$ -Diagrammes auf die Rotationsfähigkeit hat die Fragwürdigkeit einer reinen Querschnittsanalyse gezeigt. Wenn keine Verfestigung des Materials berücksichtigt wird, werden die Krümmungen des Einspannquerschnittes unendlich gross. Stahlbetonstützenversuche [8] haben aber gezeigt, dass der Bruch der Stütze sich immer über eine gewisse Länge ausbreitet. In [15] ist auf das diskontinuierliche Formänderungsverhalten von Stahlbetonstützen hingewiesen. Die Momenten-Krümmungs-Beziehung darf nicht aus lokalen Verformungen ermittelt werden, da die Dehnungen zu stark durch die Risse beeinflusst werden. Verformungsberechnungen mit nominellen Krümmungen, die aus Dehnungsmittelwerten über eine Länge mehrerer Rissabstände berechnet sind, ergeben gute Uebereinstimmung mit gemessenen Biegelinien.

In Versuchen können immer gewisse Ausbreitungen der plastischen Gelenklängen beobachtet werden. In "Druckgelenken" springt die Betonüberdeckung der Armierung über eine gewisse Länge ab. "Zuggelenke" breiten sich aus durch einen gewissen Verlust an Verbund zwischen Armierung und Beton. Dies führt dazu, dass der Fliessbereich der Armierung sich verlängert. Schiefe Risse, die vom Momentengradienten (Schub) abhängig sind, vergrössern die Gelenklänge ebenfalls.

Durch die Ausbreitung des Gelenkes wird die Rotationsfähigkeit entscheidend verbessert. Bild 7.3 zeigt die Krümmungsverteilung und als schraffierte Fläche die Rotation θ_p unter der Annahme einer Gelenklänge Δl_p^G . Ein Vergleich mit Bild 7.1b zeigt die unterschiedlichen θ_p . Bei aufgezwungenem θ werden die Krümmungen in diesem Fall nicht unendlich gross.

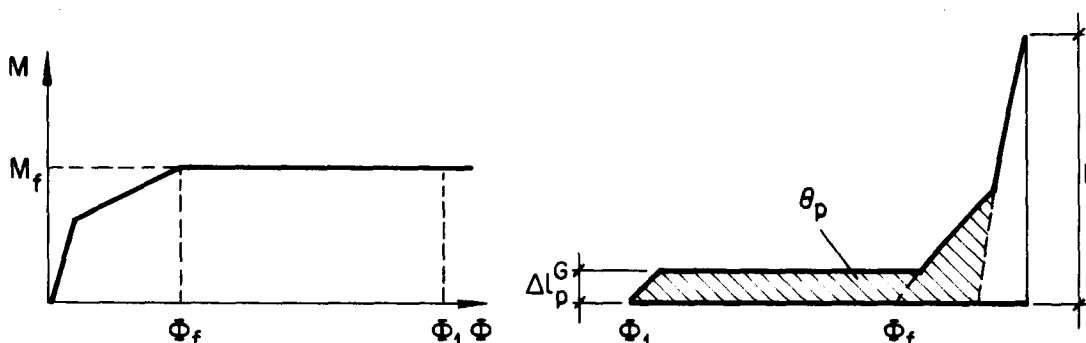


Bild 7.3: Vergrößerung der plastischen Rotation θ_p durch Ausbreitung des Gelenkes um Δl_p^G .

Auch in diesem Beispiel weist aber die Krümmungsverteilung eine deutliche Diskontinuität auf. Der Ort, wo dieser Sprung der Verformung geschieht, ist nicht genau zu definieren. Selbst innerhalb des plastischen Gelenkes $\Delta \lambda_p^G$ wird es Querschnitte geben, die diesen Krümmungssprung nicht mitmachen. Die Gelenklänge λ_p , innerhalb deren die Krümmungen im plastischen Bereich sich befinden, ist deshalb eine Rechengrösse, die dem diskontinuierlichen Verformungsverhalten Rechnung trägt. Das Verformungsverhalten von Stahlbetonstützen kann mit dieser integralen Grösse besser erfasst werden als mit einer reinen Querschnittsanalyse. Damit wird die Momenten-Verdrehungs-Beziehung die Grundlage der Verformungsberechnung. Die extremen Krümmungen müssen über die Gelenklänge λ_p "verschmiert" werden.

7.2 Ausbildung des plastischen Gelenkes

Die Biegelinie einer Stütze setzt sich aus einem elastisch-plastischen und einem plastischen Teil zusammen (Bild 7.4). Die elastisch-plastische Biegelinie ist über die ganze Stützenlänge λ gekrümmt. Die grösseren, plastischen Verformungen konzentrieren sich bei der meist beanspruchten Stelle der Stütze, wo sich ein plastisches Gelenk mit der Länge λ_p ausbildet. Die Trennung in diese beiden Anteile ist rechentechnisch bedingt. Der elastisch-plastische Verformungsbereich ist durch die Betonstauchung $\epsilon_{b,1}$, die der maximal möglichen Spannung β entspricht, und durch die Fließ- resp. Streckgrenze des Armierungstahles begrenzt. Diese elastisch-plastischen Verformungen werden mit dem Computer berechnet und sind im vorhergehenden Kapitel beschrieben. Die Berechnung der Rotation des plastischen Gelenkes ist im nächsten Abschnitt gegeben.

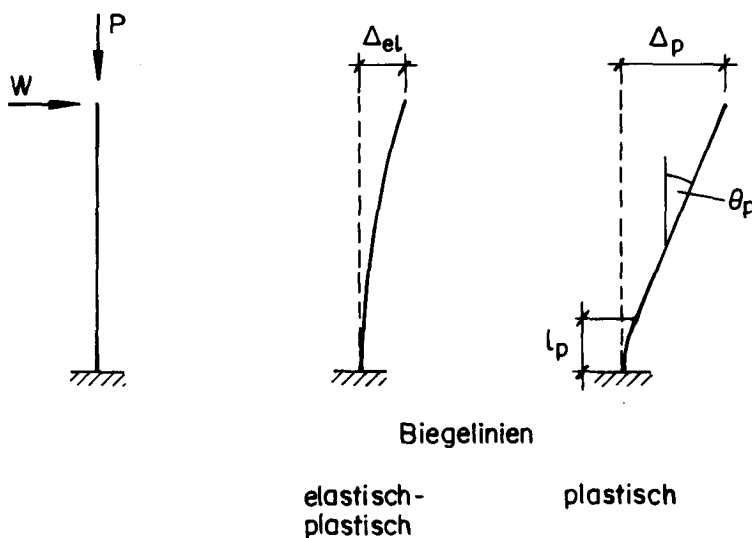


Bild 7.4: Biegelinie für eine einseitig eingespannte Stütze

Die Gelenklänge lässt sich wie folgt berechnen:

$$\ell_p = \Delta \ell_p^M + \Delta \ell_p^G \quad (7.1)$$

wobei: $\Delta \ell_p^M$ = Gelenklänge aus Querschnittsanalyse infolge Momentengradient

$\Delta \ell_p^G$ = Gelenklänge aus Betrachtung am Stabelement

Dies ist eine zweckmässige Aufspaltung der Gelenklänge zur Berechnung der Rotationsfähigkeit. Verschiedene Annahmen, vor allem für den zweiten Anteil $\Delta \ell_p^G$, erlauben den Einfluss der Gelenklänge abzuschätzen.

Der Anteil $\Delta \ell_p^M$ aus der Querschnittsanalyse ist eine Funktion des Momentengradienten. Für Tragwerksteile mit kleinem Momentenabfall im Bereich der maximalen Beanspruchung (z.B. eingespannte Stütze mit grosser Achsiallast) wird dieser Anteil gross. Er ist rechnerisch nur für gekrümmte M- Φ H-Beziehung oder bei Berücksichtigung der Verfestigung zu erfassen.

Der Anteil $\Delta \ell_p^G$ ergibt sich aus der Betrachtung eines Stabelementes. Für eine unterarmierte Stütze, bei der das Verformungsverhalten der Zugseite für den Bruch massgebend ist, wird die Gelenklänge durch eine Schubkraft zusätzlich vergrössert. Beim Fliessen der Zugarmierung entstehen schiefe Risse unter einem Winkel α zur Stützenaxe. Der Schub wird durch die sogenannte Fachwerkwirkung übertragen, die als Reaktion zur Druckdiagonalen eine zusätzliche Zugkraft auf die Zugarmierung bewirkt. Der Zugkraftverlauf wird um das sogenannte Versatzmass verschoben, womit die Gelenklänge zusätzlich vergrössert wird und sich wie folgt berechnet:

$$\Delta \ell_p^G \approx \frac{H}{2} \cdot \cot \alpha \quad (7.2)$$

Je nach Winkel α ergibt sich der folgende Bereich für $\Delta \ell_p^G$:

$$\frac{H}{4} \leq \Delta \ell_p^G \leq H \quad (7.3)$$

Eine weitere Vergrösserung der Gelenklänge ist die Folge einer teilweisen Lockerung des Verbundes zwischen Beton und Armierung. Die Annahme des Ebenbleibens der Querschnitte ist damit nicht mehr erfüllt und eine Vergrösserung von ℓ_p in einer Elementbetrachtung im Vergleich zur Querschnittsanalyse ist gegeben.

Auch wenn der Druckbereich für die Verformungskapazität des Gelenkes massgebend ist, hat das Gelenk eine gewisse Ausbreitung. Der Beton löst sich im

Bruchzustand immer über eine bestimmte Länge, die rechnerisch allerdings kaum zu erfassen ist. Sie ist abhängig von der Betonqualität und im besonderen auch von der Korngrösse der Zuschlagstoffe. Für ein solches "Druckgelenk", das für die praktische Anwendung nicht von grosser Bedeutung ist, wird die zusätzliche Verlängerung von l_p eher im unteren Bereich von (7.3) liegen.

7.3 Rotation des plastischen Gelenkes und entsprechende Stützenkopfverschiebung Δ_p

Die Stützenkopfverschiebungen Δ_p infolge der plastischen Rotation θ_p , wie sie in Bild 7.4 dargestellt ist, wird für einige Beispiele berechnet. Die plastische Rotation wird aufgrund der plastischen Verformungen bestimmt, die mindestens eine der untenstehenden Bedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Beton : } \epsilon_b \leq \epsilon_{b,1} = - 2\text{‰} \\ \text{Stahl : } |\epsilon_s| \text{ oder } |\epsilon'_s| \geq |\epsilon_{sf}| = \left| \frac{\sigma_{sf}}{E} \right| \end{array} \right\} \rightarrow \theta_p \quad (7.4)$$

Je nach Armierungsgehalt ω und Achsialkraft p wird der Beton oder der Stahl massgebend für das Erreichen des plastischen Bereiches, wie er mit (7.4) definiert ist. Wie bereits in den Bildern 7.1 bis 7.3 als schraffierte Flächen dargestellt, wird die Rotation als Integral der plastischen Krümmungen ϕ_p über die Gelenklänge l_p berechnet:

$$\theta_p = \int_0^{l_p} \phi_p \cdot ds = \phi_{p,m} \cdot l_p \quad (7.5)$$

wobei: $\phi_{p,m}$ = mittlere plastische Krümmung über Gelenklänge l_p

Die plastische Krümmung $\phi_{p,m}$ wird durch Subtraktion der Krümmung des elastisch-plastischen Anteiles vom Mittelwert der Krümmung im Verfestigungsbereich berechnet. Gemäss Gleichung (7.1) setzt sich die Gelenklänge aus Δl_p^M und Δl_p^G zusammen. Für die Berechnung von Δl_p^M wird näherungsweise ein geradliniger Momentenverlauf über die Stützenlänge angenommen. Bei gegebenem Momenten-Krümmungs-Diagramm kann damit Δl_p^M berechnet werden. Mit verschiedenen Annahmen für Δl_p^G kann die Grössenordnung von l_p ermittelt werden.

Die plastische Stützenkopfauslenkung berechnet sich zu:

$$\left(\frac{\Delta}{H}\right)_p = \frac{l}{H} \cdot \tan \theta_p = \frac{l_p}{l} \cdot (\phi_{p,m} \cdot H) \cdot \left(\frac{l}{H}\right)^2 \quad (7.6)$$

Im Folgenden werden einige numerische Rechenbeispiele gegeben, die auf den nachstehenden Daten beruhen:

σ_{sf}	= 4600 kg/cm ²	Fliessspannung der Armierung
E_s	= $2,1 \cdot 10^6$ kg/cm ²	Elastizitätsmodul der Armierung
$E_{s,v}$	= $\frac{1}{30} \cdot E_s$	Verfestigungsmodul
$\epsilon_{s,v}$	= $\pm 20\%$	Stahldehnung bei Beginn der Verfestigung
U	= $0,1 \cdot H$	Ueberdeckung der Armierung
$\frac{l}{H}$	= 10	Stützenlänge bezogen auf die Querschnittshöhe
p	= 0,3	Achsiallast
$\omega = \omega'$	= 0,2	bezogener Armierungsgehalt

Parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm

Beim parabolisch-geraden $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm verliert der Beton auch bei grossen Stauchungen seine Tragfähigkeit nicht. Der Beton vermag die gesamte Achsiallast zu tragen, wenn bei grossen Verformungen sowohl die Zug- als auch die Druckarmierung ins Fliesen kommen. Unter diesen Umständen bildet sich ein Zuggelenk aus, dessen Rotationsfähigkeit durch die Grenzdehnungen der Zugarmierung gegeben ist. Für verschiedene Dehnungen der Zugarmierung sind in Bild 7.5 die Stützenkopferschiebungen (Δ/H) gegeben. Der elastisch-plastische Bereich, wie er in Abschnitt 7.2 definiert ist, wurde mit dem Computer

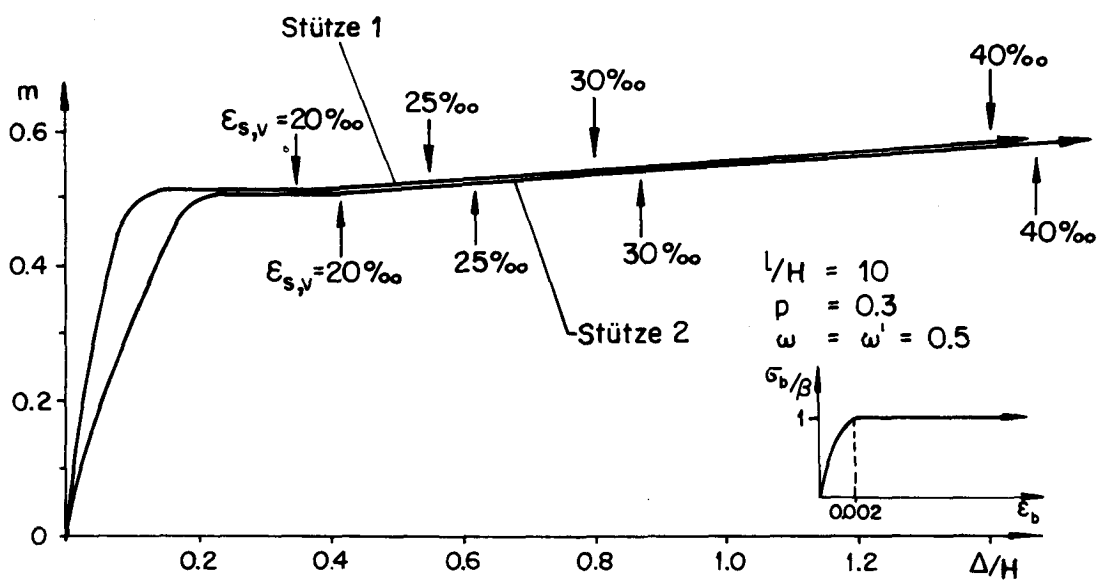


Bild 7.5: Stützenkopferschiebungen Δ/H in Abhängigkeit der Verfestigung der Zugarmierung ($\Delta l_p = H$).

berechnet. Die entsprechenden Auslenkungen können auch dem Bild 6.3 entnommen werden. Die plastischen Auslenkungen $(\Delta/H)_p$ berechnen sich sehr einfach mit den Gleichungen (7.5) und (7.6). Sie sind unabhängig von der Lagerung der Stützen und wesentlich grösser als die Auslenkungen des elastisch-plastischen Bereiches. Bild 7.5 zeigt die grosse Verformungsfähigkeit des plastischen Gelenkes in Abhängigkeit des Verfestigungsgrades der Zugarmierung. Wegen dieser Verformungsfähigkeit wird die Abhängigkeit der möglichen Stützenkopfauslenkungen von der Lagerung der Stützen vernachlässigbar.

Der Berechnung zu Bild 7.5 wurde eine zusätzliche Gelenkausbildung Δl_p^G gleich der Querschnittshöhe zugrundegelegt. Eine Berechnung mit $\Delta l_p^G = 0,5 \cdot H$ ergibt nur wenig verschiedene Resultate. Auch Rechnungen mit anderen p und w , wie sie bei den Berechnungen in den Kapiteln 4 und 6 berücksichtigt worden sind, lassen dieselben Schlussfolgerungen zu. Diese grosse Verformungsfähigkeit ist möglich, da eine unbegrenzte Duktilität des Betons vorausgesetzt ist. Im folgenden Abschnitt wird auf diese Voraussetzung verzichtet.

$\sigma_b - \varepsilon_b$ -Diagramm mit Entfestigungseffekt

Unter den Voraussetzungen, die im obigen Abschnitt gemacht sind, ist die Grenzverformung der Zugarmierung massgebend für die mögliche Rotation des Gelenkes. Für sehr grosse Achsiallasten ($\rightarrow p \geq 0,4$), die allerdings nicht sehr häufig sind, kann aber auch die Druckzone für die Grenzrotation des plastischen Gelenkes massgebend werden. Ein solches "Druckgelenk" entsteht auch für kleine Achsiallasten, wenn die Tragfähigkeit des Betons bei grossen Verformungen abnimmt und die Armierung entsprechend stärker beansprucht wird. Wenn die Druckarmierung die Fließgrenze erreicht und bei wachsender Verformung die Betondruckkraft abnimmt, kann das achsiale Gleichgewicht nur noch durch Reduktion der Stahlzugkraft gewährleistet werden. Bei zunehmender Krümmung nehmen dabei die Stauchungen der Druckarmierung stark zu. Die Verfestigung der Druckarmierung wird in dieser Situation massgebend für die Rotationsfähigkeit des Gelenkes.

Vorrangig ist der Einfluss der Duktilität des Betons. Bereits in Kapitel 6 sind die maximal möglichen Stützenkopfauslenkungen für ein parabolisches $\sigma_b - \varepsilon_b$ -Diagramm, bei dem die Tragfähigkeit bei einer Stauchung von -4% vollständig erschöpft ist, untersucht (Bilder 6.7 - 6.10). Dabei bestimmt das Verhältnis p/w das Verhalten bei grossen Verformungen. Die Berechnung der maximalen Δ , wie sie in Bild 6.10 dargestellt sind, ist allerdings sehr konservativ, da mit einer Gelenklänge von nur $H/3$ gerechnet wurde. Wird eine grössere plastische Gelenklänge l_p in Rechnung gestellt, so werden die Auslenkungen Δ_{\max} wesentlich grösser. Bei diesem extremen Betonverhalten ist aber die Duktilität sehr begrenzt und der Armierungsgehalt wird massgebend

für die Rotationsfähigkeit des Gelenkes. Eine Vergrösserung der Längsarmierung kann die Verformungsfähigkeit steigern. Dabei wird allerdings auch die Beanspruchung des Betons vergrössert und die Gelenkrotation wird bestimmt durch die Verfestigung der Druckarmierung. Das Ausknicken der Druckstäbe muss mit einer engen Verbügelung verhindert werden. Diese wiederum verbessert die Duktilität des Betons ganz wesentlich. In Kapitel 3 ist der Einfluss der Querarmierung auf das σ_b - ϵ_b -Diagramm diskutiert. Daraus ergibt sich für eine enge Spiralarmierung ein annähernd parabolisch-gerades σ_b - ϵ_b -Diagramm, wie es für die Berechnung im vorhergehenden Abschnitt verwendet wurde. Eine enge Bügelarmierung bewirkt ein etwas weniger duktiler Verformungsverhalten, dessen Einfluss auf die Gelenkrotation im Folgenden noch untersucht wird.

Es wird ein Spannungs-Stauchungs-Diagramm verwendet, wie es in Bild 3.5 gezeigt und in Bild 3.8 schematisiert ist. Mit den Werten

$$s = H/2 \quad (\text{Bügelabstand})$$

$$\mu_q = 2\% \quad (\text{Bügelarmierungsgehalt})$$

wird die Stauchung ϵ_{s0} , bei der die Tragfähigkeit um die Hälfte abgenommen hat, nach Formel (3.6) gleich:

$$\epsilon_{s0} = 30\%$$

Damit ergibt sich im Bereich grosser Verformungen näherungsweise ein Spannungs-Stauchungs-Verhalten von folgender Form:

$$\frac{\sigma_b}{\beta} = 1 - \frac{\epsilon_b (\%) }{60} \quad (7.7)$$

Ausgehend von der Dehnung der Zugarmierung kann das m - Φ H-Verhalten mit der Beziehung (7.7), der Gleichgewichtsbedingungen und der Voraussetzung des Ebenbleibens der Querschnitte bestimmt werden. Die Stahldehnung kann aber nicht beliebig anwachsen, da damit auch die Betonstauchungen zunehmen und nach Gleichung (7.7) die Spannungen und die entsprechende Betondruckkraft abnehmen. Wegen des achsialen Gleichgewichtes muss daher je nach der Achsiallast p bei einer bestimmten Krümmung die Zugarmierung entlastet werden.

Dieses Spannungs-Stauchungs-Verhalten ist vor allem für grosse p , grossen Armierungsgehalt ω und den entsprechend grossen Betonstauchungen von Bedeutung. Bild 7.6 zeigt ein Rechenbeispiel für $p = 0,3$ und $\omega = \omega' = 0,5$. Einerseits wächst das Moment mit zunehmender Verfestigung der Zugarmierung und andererseits nimmt es mit abnehmender Betondruckkraft ab. Diese beiden Ein-

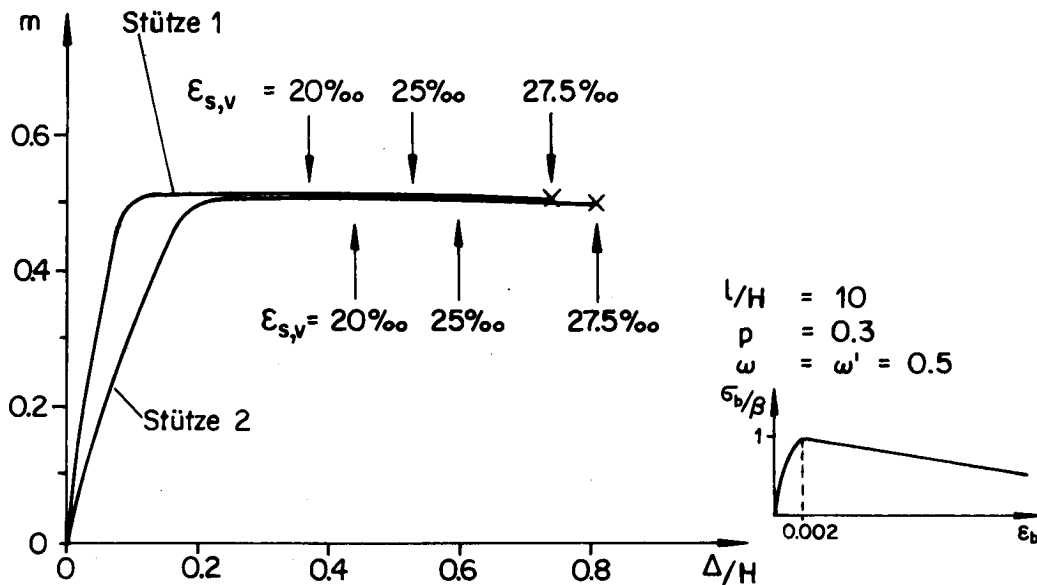


Bild 7.6: Stützenkopfauslenkungen Δ/H in Abhängigkeit der Verfestigung der Zugarmierung ($\Delta l_p^s = H$).

flüsse heben sich in diesem Beispiel ungefähr auf. Das Moment bleibt deshalb für zunehmende Auslenkung konstant und das Gelenk breitet sich nicht aus ($\Delta l_p^M \rightarrow 0$). Hingegen nehmen die Krümmungen für gegebene Dehnung der Zugarmierung mit abnehmenden Betonspannungen zu. Die resultierenden Rotationen des plastischen Gelenkes und damit die plastischen Stützenkopfauslenkungen sind ungefähr gleich gross wie beim Rechenbeispiel mit parabolisch-geradem σ_b - ϵ_b -Diagramm (Bild 7.5). Bei einer Stahldehnung von $\epsilon_{s,v} = 27,5\%$ wird die Verformung auf der Druckseite so gross und damit die Betondruckkraft so klein, dass aus Gleichgewichtsgründen eine weitere Steigerung der Stahlzugdehnung nicht mehr möglich ist. Eine weitere Zunahme der Gelenkrotation wäre nur noch möglich durch Abnahme der Stahlzugdehnung und gleichzeitiger Verfestigung der Druckarmierung.

Schlussfolgerung

Bei der Berechnung der Rotationsfähigkeit von plastischen Stahlbetongelenken ist die Tragfähigkeit von Beton bei grossen Stauchungen von vorrangiger Bedeutung. Solange der Beton die Achsiallast übertragen kann, ist die Rotationsfähigkeit durch die Dehnung der Zugarmierung bestimmt. Die Verfestigung des Stahles bewirkt eine Ausbreitung des plastischen Gelenkes und dementsprechend eine Vergrösserung der Rotationsfähigkeit. Entzieht sich der Beton bei grossen Verformungen seiner Tragfähigkeit, wird die Druckarmierung zusätzlich belastet. Die Rotationsfähigkeit ist in diesem Fall durch die Bruchstauchung der Druckarmierung oder durch Ausknicken derselben begrenzt.

Wird die Rotationsfähigkeit von plastischen Stahlbetongelenken rechnerisch

durch die Fließgrenze der Armierung oder durch die Betonstauchung bei maximaler Spannung begrenzt, so bleibt der grösste Teil der plastischen Verformungsfähigkeit unberücksichtigt. Aus den Bildern 7.5 und 7.6 ist ersichtlich, dass die plastischen Stützenkopfauslenkungen, die aus der Rotation der plastischen Gelenke resultieren, wesentlich grösser sind als die elastisch-plastischen Auslenkungen, die aufgrund der Krümmungen über die ganze Stützlänge möglich sind. Die plastischen Auslenkungen sind unabhängig von der Art der Lagerung der Stütze. Die beidseitig eingespannte Stütze 1 hat praktisch die gleiche Verformungsfähigkeit wie die einseitig gelenkig gelagerte Stütze 2. Diese Folgerung trifft auch für das Beispiel von Bild 7.6 zu, das mit Berücksichtigung der Entfestigung des Betons berechnet ist. Die grosse Rotationsfähigkeit von plastischen Stahlbetongelenken ist dank einer starken Querarmierung im Bereich der grössten Beanspruchung möglich. Diese verbessert nicht nur das Trag- und Verformungsverhalten des eingeschnürten Betons, sondern behindert auch das Ausknicken der Druckarmierung. Damit wird es möglich, Stützen vermehrt fest einzuspannen, und die Stabilität der Einzelstütze sowie die Gesamtstabilität eines Tragwerkes können erhöht werden.

8. EINFLUSS DER STÜTZENLAGERUNG AUF DIE STABILITÄT VON STAHLBETONSTÜTZEN

8.1 Stabilität der Einzelstütze

In diesem Abschnitt soll die Traglast von unverschieblich gelagerten Stützen untersucht werden. Bei elastischem Materialverhalten ist sie durch die Eulerlast, welche von einer gegebenen Stützenkopfverschiebung unabhängig ist, gegeben. Die für die Eulerlast massgebenden Knicklängen sind in Bild 5.4 gezeigt. Das unelastische Materialverhalten von Stahlbeton verändert die Biegesteifigkeit in Funktion der Beanspruchung. Damit wird die Traglast nicht nur von der Stützenlagerung, sondern auch von der gegebenen Stützenkopfverschiebung abhängig. Für gedrungene Stützen und grosse Stützenkopfverschiebungen Δ_0 wird der meist beanspruchte Querschnitt versagen, bevor die Stütze instabil wird. Das Trag- und Verformungsverhalten ist in diesem Falle durch die Momenten-Normalkraft-Interaktion des Querschnittes begrenzt. Diese Verhältnisse bei nichtlinearem Materialverhalten werden im Folgenden anhand einiger Beispiele gezeigt, die mit dem im Anhang beschriebenen Computerprogramm berechnet werden können.

Den Berechnungen zu den Bildern 8.1 bis 8.3 wurden die folgenden Annahmen zugrundegelegt:

- $\sigma_{sf} = 4600 \text{ kg/cm}^2$
- $E_s = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- Parabolisch-gerades $\sigma_b - \epsilon_b$ -Diagramm mit $\epsilon_{b,1} = - 2\%$ beim Erreichen von β
- Betonüberdeckung = $0,1 \cdot H$
- Symmetrischer Rechteckquerschnitt $B \times H$

Beim elastischen Verhalten nimmt die Momentenbeanspruchung bei aufgezwungener Verschiebung mit zunehmender Achsiallast P ab (Bild 6.1). Dies trifft für Stahlbetonstützen erst für grosse Lasten zu, da die Steifigkeit bei Fließbeginn (ϵ'_{sf} , resp. $\epsilon_{b,1}$) bis zu einer Last von ungefähr $p = (0,65 + \omega)$ zunimmt. Schlanke Stützen hingegen können instabil werden, bevor die Fließgrenze irgendwo erreicht ist. Unter der Knicklast wechseln die Momente im Einspannquerschnitt die Vorzeichen und werden unendlich gross. Bei einem numerischen Rechenverfahren müssen Kriterien für das Instabilwerden definiert werden. In den Rechenbeispielen der Bilder 8.1 bis 8.3 werden im Stabilitätsfall diejenigen Lasten verglichen, die ein Verschwinden der Einspannmomente zur Folge haben. Beim elastischen Verhalten entsprechen diese Lasten Knicklängen von $l/2$ für Stütze 1 und l für Stütze 2. Die Eulerlast ist damit für Stütze 1 viermal grösser als für Stütze 2.

Bei nichtlinearem elastisch-plastischem Materialverhalten ist die Traglast auch von der Belastungsgeschichte abhängig. Zum Beispiel wird die infolge der aufgezwungenen Stützenkopfverschiebung gedehnte Zugarmierung bei zunehmender Achsialkraft entlastet. Waren aber die Stahldehnungen bereits im Fließbereich, so bleiben auch nach vollständiger Entlastung plastische Dehnungen erhalten. Diese verringern die Steifigkeiten und beeinflussen auch das M-N-Interaktionsdiagramm. In den Rechenbeispielen wurde die Voraussetzung gemacht, dass zuerst die Stützenkopfverschiebung Δ_0 aufgezwungen und dann die Last bis zum Versagen der Stütze gesteigert wird.

Die Bilder 8.1 und 8.2 zeigen die Traglasten für schlanke Stützen mit sehr kleinem Armierungsgehalt einerseits und sehr grossem Armierungsgehalt andererseits. Die sehr schlanken Stützen ($l/H = 60$) versagen durch Instabilwerden. Für grosse Stützenkopfverschiebungen und kleine Armierungsgehalte sind die Traglasten der beidseitig eingespannten Stützen mehr als viermal grösser. Dies ist der Fall, weil die Steifigkeit der Stütze 1 grösser ist als diejenige der Stütze 2. Für kleines Δ_0 sowie auch für grosses w werden die Achsiallasten bei der beidseitig eingespannten Stütze so gross, dass die Biegesteifigkeiten abnehmen. Dies hat zur Folge, dass das Verhältnis der Traglasten von Stütze 1 zu Stütze 2 kleiner wird als bei elastischem Verhalten. Bei den weniger schlanken Stützen ($l/H = 40$) nimmt dieses Verhältnis noch weiter ab. Für grosse Δ_0 wird die Stütze 1 mit einer Schlankheit $\lambda = 70$ schon so stark gekrümmt, dass das Bruchmoment des Einspannquerschnittes erreicht wird. Die Armierung fliesst und die kleine Betondruckzone lässt keine Steigerung der Last mehr zu. Die Traglast ist durch Querschnittsversagen begrenzt und fällt mit zunehmendem Δ_0 vermehrt ab. Bei unbegrenzten Beton-

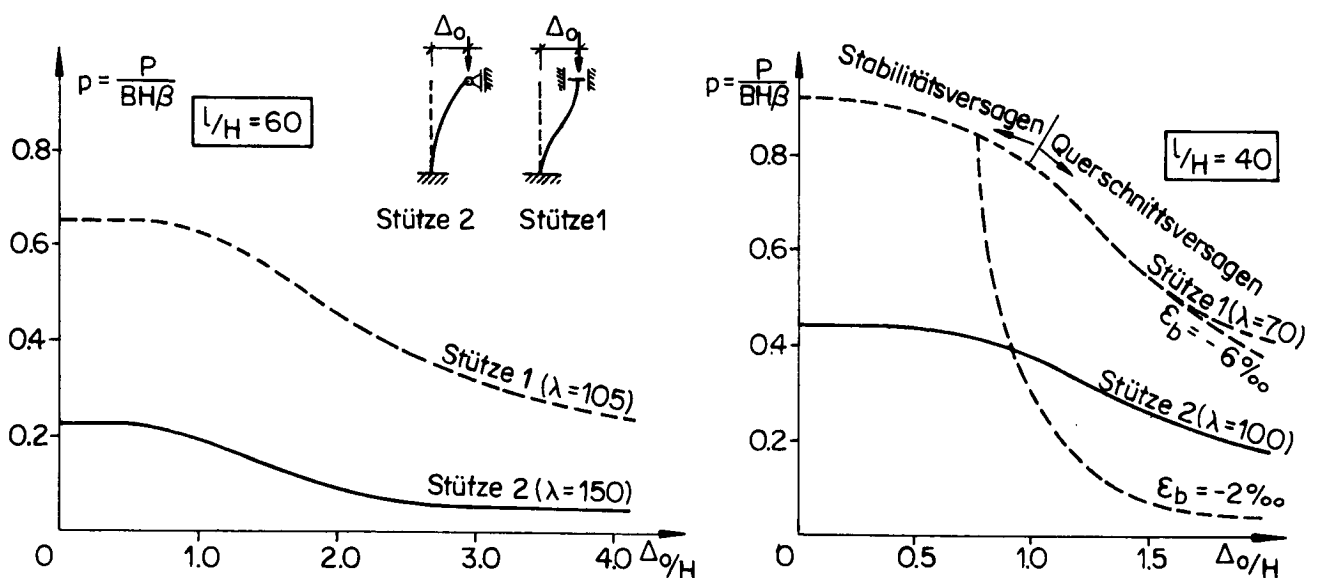


Bild 8.1: Traglasten in Abhängigkeit der Stützenkopfverschiebungen Δ_0 .
(Armierungsgehalt $\omega = 0.05$)

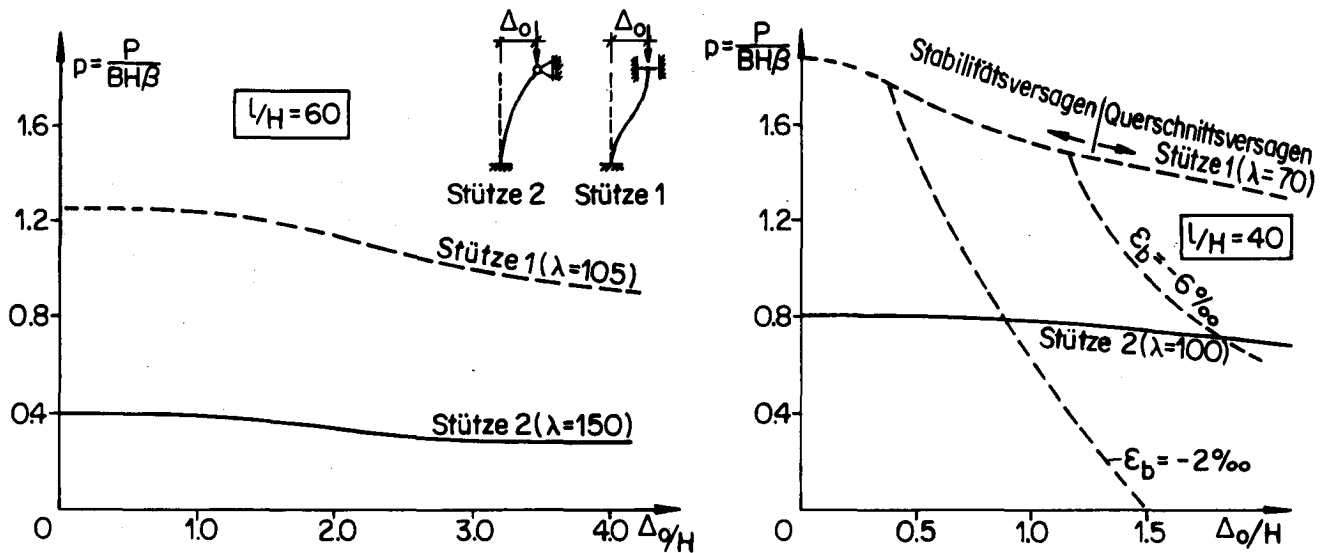


Bild 8.2: Traglasten in Abhängigkeit der Stützenkopfverschiebungen Δ_0
(Armierungsgehalt $\omega = 0.5$)

stauchungen liegt die Traglast der Stütze 1 noch deutlich über derjenigen der Stütze 2. Der Einfluss einer Begrenzung der Betonstauchungen auf die Traglasten ist in den Bildern ebenfalls gezeigt. Eine Begrenzung auf -6‰ ist vor allem bei kleinem Armierungsgehalt noch ohne wesentlichen Einfluss. Eine Begrenzung auf -2‰ hat bei grossen Δ_0 einen entscheidenden Einfluss. Die Traglast der Stütze 2 mit $\lambda = 100$ ist durch eine 2‰ -Begrenzung und $l/H = 40$ noch nicht beeinflusst im gezeigten Bereich der Stützenkopfverschiebungen. Die Traglast der Stütze 1 fällt daher bei diesen Annahmen wesentlich unter diejenige der Stütze 2. Extremere sind die Verhältnisse bei noch weniger schlanken Stützen. In Bild 8.3 sind die Traglasten für die beiden Stützenlagerungen bei einem kleinen Armierungsgehalt und einer Stützenlänge von $l/H = 20$ gezeigt. Die Traglast der beidseitig eingespannten Stütze 1 erreicht bei zentrischer Belastung das Maximum von $(1 + 2 \cdot \omega)$. Bei zunehmender Verschiebung nimmt die durch Querschnittsversagen begrenzte Traglast stark ab. Die schlankere Stütze 2 mit einseitig gelenkiger Lagerung wird für kleine Verschiebungen instabil. Die entsprechende Traglast ist deshalb kleiner als diejenige der Stütze 1. Erst bei grossen Verschiebungen wird der Traglastabfall infolge Querschnittsversagen der Stütze 1 massgebend und die Traglast der Stütze 2 wird grösser als diejenige der Stütze 1. Bei diesen gedrungenen Stützen ist der Traglastabfall bei einer Begrenzung der Betonstauchungen besonders gross. Rechts in Bild 8.3 sind die Stahldehnungen in Funktion der Achsiallast gegeben. Dabei entspricht jede Kurve einer bestimmten Stützenkopfauslenkung. Infolge der angenommenen Belastungsgeschichte sind die Dehnungen für $p = 0$ am grössten und nehmen mit wachsender Achsiallast ab. Wird eine bestimmte Last schon vor der Stützenkopfverschiebung aufgebracht, wie das zum Beispiel für das Eigengewicht des Ueberbaues zu-

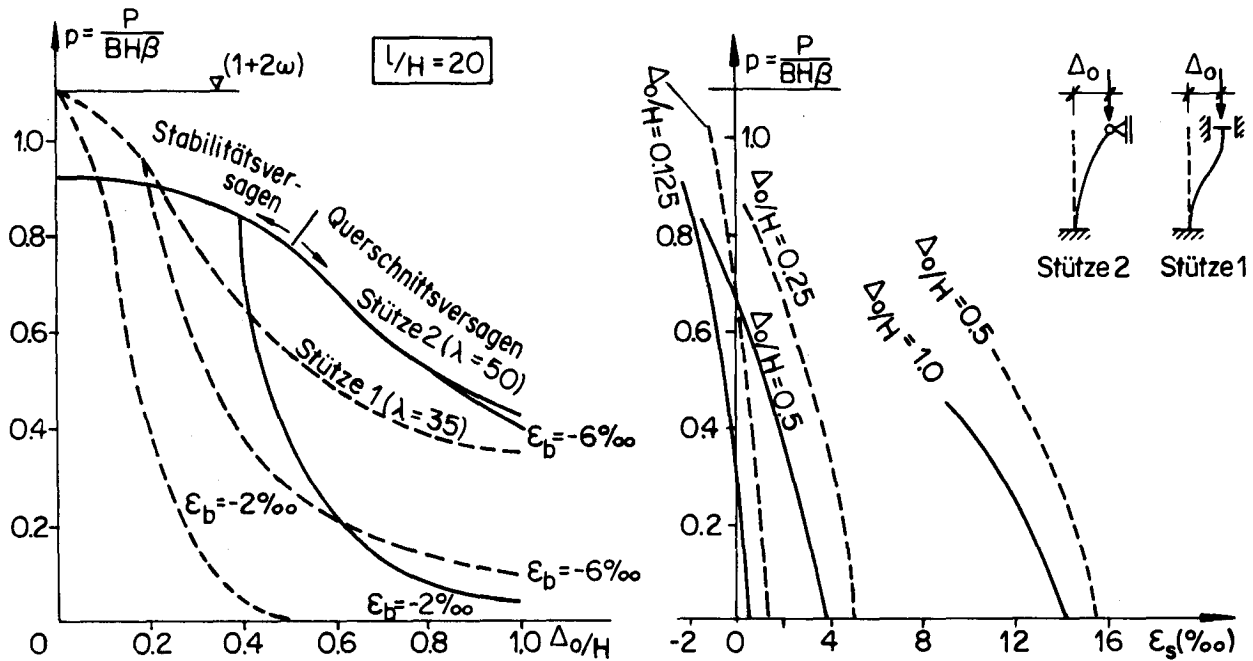


Bild 8.3: Traglasten und Stahldehnungen im Einspannquerschnitt in Abhängigkeit der Stützenkopferschiebungen Δ_0 (Armierungsgehalt $\omega = 0.05$)

trifft, so werden die Stahldehnungen etwas kleiner. Damit wird der Steifigkeitsverlust infolge der plastischen Dehnungen geringer.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Traglast für beidseitig eingespannte Stützen in allen Fällen grösser ist, bei denen sie durch Instabilwerden begrenzt ist. Für gedrungene Stützen und grosse Stützenkopferschiebungen ist die Traglast durch Querschnittsversagen beschränkt. In diesem Fall muss geprüft werden, ob durch eine Verringerung des Querschnittes die Schlankheit vergrössert werden kann oder ob ein einseitiger Gelenkanchluss notwendig wird. Der starke Abfall der Traglast bei einer Begrenzung der Betonstauchungen zum Beispiel auf -2‰ darf nicht überbewertet werden. Im Falle des Querschnittsversagens ist der massgebende Querschnitt immer bei der Einspannstelle. Durch geeignete konstruktive Massnahmen in diesem lokalen Bereich kann die Duktilität verbessert werden und damit wird in vielen Fällen die auch konstruktiv einfachere Lösung einer festen Einspannung möglich. Eingespannte Stützen verbessern vor allem auch die Gesamtstabilität, wie im Folgenden noch gezeigt werden soll.

8.2 Gesamtstabilität

Bei langen Brücken mit verschieblicher Lagerung werden die Horizontalverschiebungen zum Beispiel infolge Vorspannung, Kriechen, Schwinden oder Temperaturänderungen in den Randfeldern sehr gross. Häufig werden daher die Stützen in Widerlagernähe gelenkig gelagert, wie es in Bild 8.4 gezeigt ist.

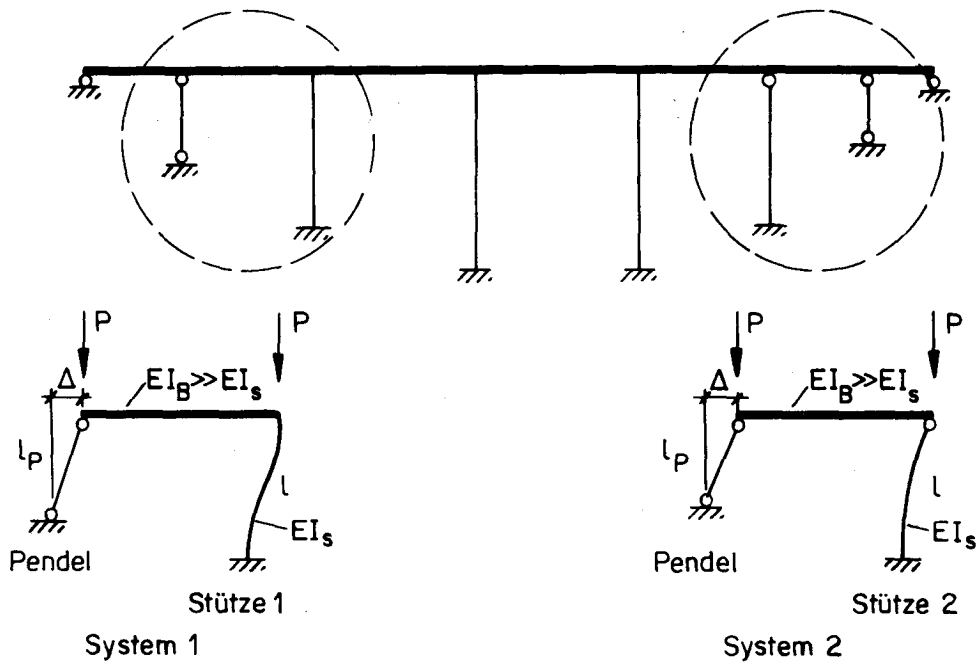


Bild 8.4 : Mögliche Stützenlagerungen bei Brücken

Jedes zusätzliche Gelenk hat zur Folge, dass die Gesamtstabilität kleiner und die Konstruktion geschwächt wird. Vor allem beidseitig gelenkig gelagerte Stützen, sogenannte Pendelstützen, sind in dieser Hinsicht sehr ungünstig. Schon kleine Horizontalverschiebungen haben treibende Horizontalkräfte zur Folge, denen die stabilisierenden Kräfte der eingespannten Stützen entgegenwirken müssen.

Im Folgenden werden die beiden Systeme 1 und 2 von Bild 8.4 untersucht. Die Steifigkeit des Balkens wird als wesentlich grösser als diejenige der Stützen angenommen.

Für lineares Materialverhalten (d.h. $EI = \text{konstant}$) kann die Last beim Instabilwerden der Konstruktion mit der Deformationsmethode unter Berücksichtigung der Achsialkraft analytisch genau bestimmt werden. Für praktische Fälle genügend genau ist die folgende Energiebetrachtung, bei der zur Vereinfachung ein parabolischer Ansatz für die Biegelinie gemacht wird.

Die äussere Arbeit, die die Achsiallast P bei einer Einsenkung Δl infolge einer Horizontalverschiebung Δ leistet, berechnet sich wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \text{Pendelstab: } A_{a,P} &= P \cdot \Delta l = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{1}{l_P} \cdot \Delta^2 \\ \text{Stütze 1: } A_{a,1} &= P \cdot \Delta l = \frac{3}{5} \cdot P \cdot \frac{1}{l} \cdot \Delta^2 \\ \text{Stütze 2: } A_{a,2} &= P \cdot \Delta l = \frac{3}{5} \cdot P \cdot \frac{1}{l} \cdot \Delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

Die innere Arbeit berechnet sich für die drei Stütztypen zu:

$$\left. \begin{aligned} \text{Pendelstab: } A_{i,P} &= 0 \\ \text{Stütze 1: } A_{i,P} &= -6 \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \Delta^2 \\ \text{Stütze 2: } A_{i,P} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{EI}{l^3} \cdot \Delta^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Mit der Arbeitsgleichung

$$A_a + A_i = 0 \quad (8.3)$$

und den Ausdrücken (8.1) und (8.2) berechnen sich die Traglasten für die beiden Systeme zu:

$$\left. \begin{aligned} \text{System 1: } P_1 &= \frac{6 \cdot EI}{l^2 \cdot (0,5 \cdot \gamma + 0,6)} \\ \text{System 2: } P_2 &= \frac{1,5 \cdot EI}{l^2 \cdot (0,5 \cdot \gamma + 0,6)} = \frac{P_1}{4} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

$$\text{wobei } \gamma = \frac{l}{l_P}$$

Aus (8.4) ist ersichtlich, dass die kritische Last für das System 1 mit der beidseitig eingespannten Stütze viermal grösser ist als für das System 2 mit der einseitig gelenkig gelagerten Stütze. Die Pendelstütze reduziert in beiden Fällen die Traglast. Je kürzer sie ist ($\gamma >$), desto grösser ist diese Reduktion. Die Traglast (8.4) ist unabhängig von der Horizontalverschiebung Δ . Unter dieser Last bewirken beliebig kleine zusätzliche Verschiebungen, dass die treibenden Kräfte grösser werden als die stabilisierenden Kräfte.

Bei nichtlinearem Materialverhalten hat die Horizontalverschiebung Δ einen Einfluss auf die Traglast. Bild 8.5 zeigt den Vergleich der stabilisierenden Kräfte für die beiden Stützenlagerungen 1 und 2. Der horizontale Widerstand w ist bei gegebener Stützenkopfverschiebung, Schlankheit und gegebenem Armierungsgehalt von der Achsiallast p abhängig. Für das Rechenbeispiel von Bild 8.5 nimmt die Horizontalkraft vor allem für die beidseitig eingespannte Stütze 1 und die entsprechenden hohen Achsiallasten bis zu einem Maximum zu. Dies kommt daher, dass die Biegesteifigkeit mit p zunimmt. Erst für grössere Achsiallasten bewirkt der Einfluss 2. Ordnung eine Reduktion der stabilisierenden Horizontalkraft. Mit der gestrichelten Geraden in Bild 8.5 ist die treibende Horizontalkraft einer Pendelstütze mit derselben Länge l wie die stabilisierenden Stützen gegeben. Die Schnittpunkte geben die Traglasten für die entsprechenden Systeme. Die Traglast für System 1 ist um ein Mehrfaches grösser als für System 2. Aus Bild 8.5 ist aber auch ersichtlich, dass die einseitig gelenkig gelagerte Stütze 2 schon für kleine Achsiallasten überhaupt keinen Widerstand gegenüber einer Horizontalverschiebung

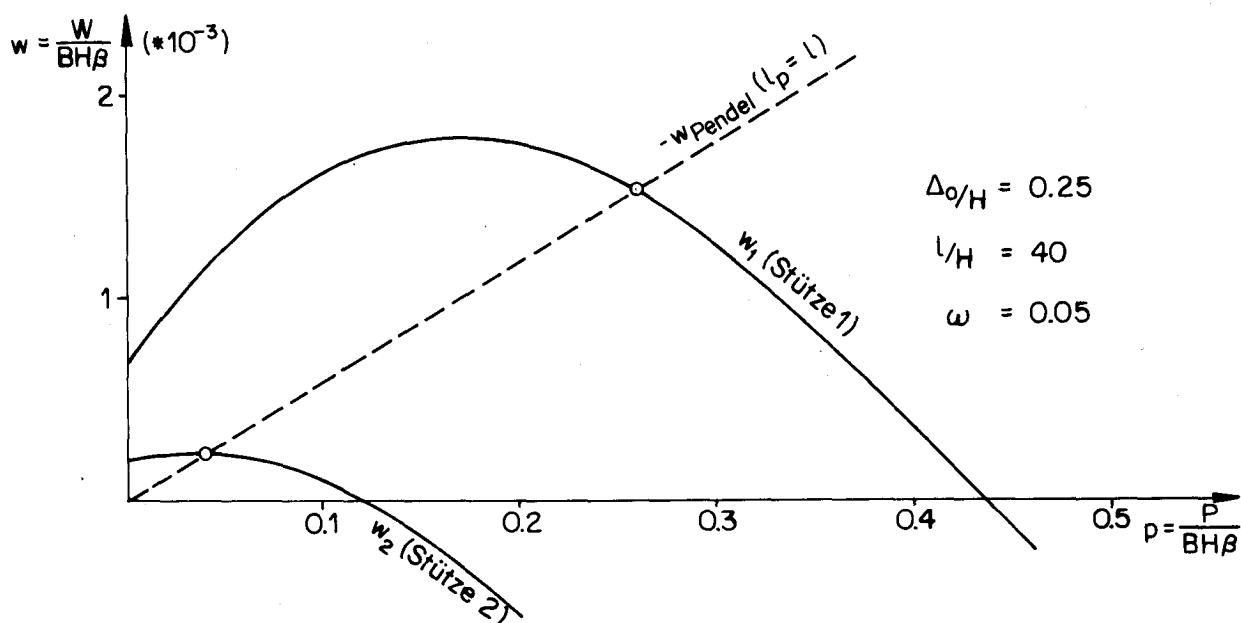


Bild 8.5: Einfluss der Stützenlagerung auf die Traglast (Gesamtstabilität)

leistet. Die Horizontalkraft w_2 wird negativ und hat damit sogar eine treibende Wirkung auf das Gesamttragwerk zur Folge. Die Sicherheit gegenüber Instabilwerden des Gesamttragwerkes wird demnach durch eingespannte Stützen erhöht. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass die Traglast der eingespannten Einzelstütze infolge Querschnittsversagen nicht kleiner ist als diejenige der einseitig gelenkig gelagerten Stütze (Bild 8.3).

Einem Tragwerk kann auch eine Verschiebung aufgezwungen werden (z.B. Widerlagerverschiebung, Erdbeben). Es stellt sich in diesem Fall die Frage, bei welcher Verschiebung bei gegebener Last das Gesamtsystem instabil wird. Im Rechenbeispiel von Bild 8.6 sind die stabilisierenden Horizontalkräfte für die beiden Stützenlagerungen 1 und 2 in Abhängigkeit der Verschiebung gegeben. Die Schnittpunkte mit den Geraden der treibenden Horizontalkräfte von

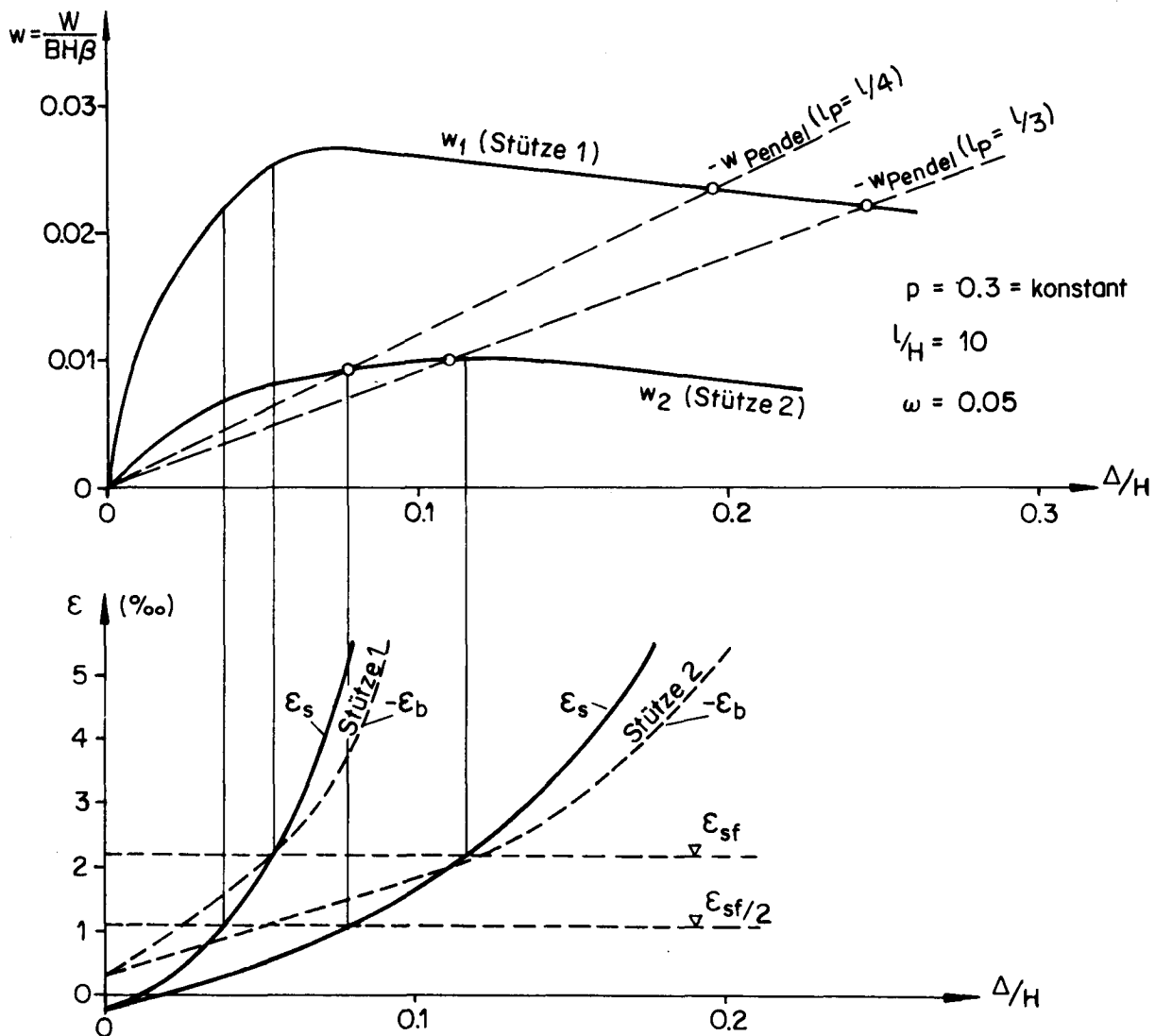


Bild 8.6: Einfluss der Stützenlagerung auf die maximale Stützenkopfverschiebung (Gesamtstabilität)

zwei verschieden langen Pendelstützen geben die Verschiebungen, bei denen die entsprechenden Systeme instabil werden. Für das Rechenbeispiel mit einer Pendelstütze mit $l_p = 0,25 \cdot l$ trifft dies für das System mit einer einseitig gelenkig gelagerten Stütze bei einer Auslenkung von $\Delta/H = 0,08$ zu. Bei dieser Auslenkung ist für das System 1 mit einer beidseitig eingespannten Stütze die Sicherheit gegenüber Instabilwerden noch gewährleistet. Erst bei einer mehr als doppelt so grossen Auslenkung wird auch dieses System instabil.

In Bild 8.6 sind auch die Stahldehnungen und die maximalen Betonstauchungen gegeben. Daraus ist ersichtlich, dass bei einer zulässigen Stahldehnung von $0,5 \cdot \epsilon_{sf}$ das System 2 mit dem Gelenkanschluss bereits instabil wird. Hingegen ist auch für wesentlich grössere Stahldehnungen beim System 1 eine ausreichende Gesamtstabilität gewährleistet. Mit den Stahldehnungen nehmen natürlich auch die Betonstauchungen zu. Eine gute Querarmierung im Bereiche der Einspannung ermöglicht aber die erforderlichen Verformungen, wie bereits in den früheren Kapiteln gezeigt ist. Das Beispiel ist für eine sehr gedrungene Stütze ($l/H = 10$) und einen sehr kleinen Armierungsgehalt gerechnet. Bei schlankeren Stützen wird die Sicherheit gegenüber Instabilwerden vor allem für die einseitig gelenkig gelagerte Stütze 2 kleiner, und eine Einspannung drängt sich auf. Grössere Armierungsgehalte bedingen eine bessere Querarmierung.

Diese Rechenbeispiele zeigen, dass Gelenkanschlüsse die Sicherheit gegenüber Instabilwerden stark reduzieren. Eine Konstruktion mit möglichst wenig Gelenken ist besser, auch wenn bereits im Gebrauchszustand ein paar Risse auftreten. Diese sind voraussehbar und mit konstruktiven Massnahmen unter Kontrolle zu halten. Sie rechtfertigen eine Gelenkkonstruktion nicht, die im Katastrophenfall (z.B. Erdbeben) eine viel geringere Sicherheit aufweist als ein Tragwerk mit festen Verbindungen.

SCHLUSSFOLGERUNGEN UND ZUSAMMENFASSUNG

Aufgezwungene Verformungen bei eingespannten Stützen stellen hohe Anforderungen an die Rotationsfähigkeit der Einspannbereiche. Versuche zeigen, dass der Beton sich viel duktiler verhält als vielfach angenommen wird. Besonders bei starker Querarmierung sind erstaunliche Stauchungen ohne grossen Tragfähigkeitsverlust möglich. Da das Spannungs-Stauchungs-Verhalten von Beton vor allem im Bereich grosser Verformungen starken Streuungen unterworfen ist, werden in dieser Arbeit zwei extreme Annahmen dafür gemacht. Einerseits wird ein parabolisches Spannungs-Stauchungs-Diagramm verwendet, bei dem nach Erreichen der Betonfestigkeit die Tragfähigkeit durch Entfestigung wieder abnimmt (Bild 3.6). Andererseits wird ein parabolisch-gerades Diagramm angenommen, bei dem nach Erreichen der maximalen Festigkeit auch bei weiterer Stauchung keine Entfestigung eintritt. Je nach Querarmierungsgehalt und weiteren Parametern folgt das effektive Spannungs-Stauchungs-Verhalten des Betons dem einen oder anderen Extremum.

Diese verschiedenen Materialannahmen beeinflussen die Momenten-Krümmungs-Beziehung und damit auch das Verformungsverhalten der Stützen. Wegen der Nichtlinearität des Materials und des Einflusses der Verformungen auf das Tragverhalten (Theorie 2. Ordnung) müssen für Stützenberechnungen numerische Verfahren verwendet werden. Ein entsprechendes Computerprogramm ist im Anhang beschrieben. Aber schon Ueberlegungen an einer einfachen einseitig eingespannten Modellstütze, die sich nur in zwei Rotationsfedern verformen kann, zeigen das prinzipielle Verformungsverhalten. Die gemachten Schlussfolgerungen werden durch Computerberechnungen bestätigt. Wird bei konstanter Achsiallast die Rotation bei der Einspannstelle vergrössert (Deformationssteuerung), und wird für die Momenten-Rotations-Beziehung die Entfestigung bei grossen Verformungen berücksichtigt, so "streckt" sich die Stütze, d.h. bei zunehmender Rotation in der Einspannstelle am Stützenfuss kann die Stützenkopfverschiebung abnehmen. Wird keine Entfestigung berücksichtigt, so bleiben die Momente bei zunehmender Rotation konstant, und die Stütze biegt sich nicht mehr weiter, d.h. die Stütze "erstarrt" und dreht sich wie ein Pendelstab um den Stützenfuss. Dabei nehmen die Stützenkopfverschiebungen zu.

Mit der nichtlinearen Momenten-Krümmungs-Beziehung für gegebene Achsiallast nimmt die Biegesteifigkeit mit zunehmender Beanspruchung ab. Die Zwängungsbeanspruchungen nehmen dadurch bei der beidseitig eingespannten Stütze mehr ab als bei der einseitig gelenkig gelagerten Stütze. Ein Vergleich der beiden Stützen zeigt jedoch, dass diese Tendenz erst bei grossen Verformungen im plastischen Bereich von Bedeutung ist. Ein Näherungsverfahren mit konstanter Biegesteifigkeit für gegebene Achsiallast wird deshalb als sinnvoll

erachtet.

Die Untersuchungen der Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken zeigen, dass die von der Lagerung unabhängigen plastischen Stützenkopfverschiebungen sehr gross werden können. Sie sind wesentlich grösser als die elastischen Auslenkungen. Ein Vergleich der beiden Stützenlagerungen zeigt deshalb ungefähr dieselbe Verformungsfähigkeit der beiden Stützen im Bruchbereich.

Die Berechnungsbeispiele zeigen, dass für die unverschiebliche Lagerung die Tragfähigkeit der eingespannten Stütze im allgemeinen wesentlich höher ist als diejenige der einseitig gelenkig gelagerten Stütze. Auch bei gedrungenen Stützen mit grosser aufgezwungener Stützenkopfverschiebung, bei denen nicht Stabilitäts-, sondern Querschnittsversagen massgebend wird, ist die eingespannte Lagerung meist besser. Tragwerke, die verschieblich gelagert sind, können als Ganzes instabil werden. Eingespannte Stützen erhöhen in diesem Fall die Gesamtstabilität. Ein allgemeines Rezept für die Stützenlagerung kann nicht gegeben werden. Zu viele Parameter wie z.B. die Bodenverhältnisse oder das Auftreten grosser Risse im Gebrauchsbereich beeinflussen diese Entscheidung. Die vorliegenden Untersuchungen zeigen jedoch, dass es möglich und in vielen Fällen besser ist, in der Praxis vermehrt auf gelenkige und verschiebliche Lagerkonstruktionen zu verzichten und mit festeingespannten Stützen die Stabilität zu erhöhen.

Die bei den Einspannstellen geforderte grosse Verformungsfähigkeit kann mit geeigneten konstruktiven Massnahmen (z.B. Querarmierung) erreicht werden. Durch experimentelle Untersuchungen über das Risseverhalten eingespannter Stahlbetonstützen im Gebrauchsbereich und über die Rotationsfähigkeit von plastischen Gelenken im Bruchbereich können geeignete konstruktive Ausbildungen überprüft werden.

CONCLUSIONS ET RESUME

Il est reconnu que les déformations imposées provoquent de grands efforts dans les extrémités encastrées d'un pilier et mettent spécialement à contribution leur pouvoir rotatoire. Des essais ont montré, que le béton se comporte avec plus de coercibilité qu'on a l'habitude de l'admettre. En effet, avec un fort pourcentage d'armature transversale, on peut obtenir un important écrasement du béton sans pour autant remarquer une grande diminution de la capacité portante du pilier. Etant donné que le diagramme contrainte-déformation du béton peut contenir de larges écarts types, on a étudié dans ce travail, deux cas extrêmes. D'une part, on admettra un diagramme contrainte-déformation parabolique jusqu'à la résistance limite du béton suivi d'une augmentation de coercibilité simultanée à une diminution de l'effort de compression. D'autre part, on fera l'hypothèse d'un diagramme contrainte-déformation parabolique-linéaire comme défini dans la figure 3. Suivant l'importance du pourcentage de l'armature transversale, on admettra l'un ou l'autre des diagramme défini ci-dessus.

Ces différentes hypothèses relatives au comportement du béton influencent la loi moment-courbure et par conséquent le pouvoir de déformation des piliers. Compte tenu du comportement non-linéaire du béton ainsi que de la nécessité de considérer l'influence des déformations (théorie du 2ème ordre), on devra développer une méthode numérique de calcul. Un programme adéquat est décrit dans l'annexe. Le raisonnement fait sur un modèle, qui représente un pilier ayant une extrémité libre et l'autre encastrée, illustre son comportement pendant la phase de déformation. Le modèle est constitué par deux segments articulés à l'aide de ressorts rotatifs. Le calcul établi par l'ordinateur confirmera les conclusions tirées de l'étude. Si sous l'action d'une charge axiale constante, on fait varier l'angle de rotation de l'encastrement (la déformation étant la variable indépendante), et que l'on considère dans la loi moment-courbure l'augmentation de coercibilité du béton, le pilier "se redresse" c'est-à-dire que pendant l'augmentation de la rotation à l'encastrement le déplacement de la tête du pilier peut diminuer. Négligeons l'augmentation de coercibilité du béton, alors les moments restent constants bien que l'angle de rotation augmente. Le pilier ne se déforme plus, il "se raidit" et tourne autour de l'encastrement comme un balancier. A ce moment-là le déplacement de la tête du pilier augmente.

Si pour une force axiale donnée, on admet une loi moment-courbure non-linéaire, à ce moment la rigidité à la flexion diminue au fur et à mesure que les efforts augmentent. Les efforts indirects, qui agissent sur un pilier doublement encastré, diminuent plus que ceux qui sollicitent un pilier

articulé à l'une de ses extrémités et encastré à l'autre. La comparaison de ces deux cas montre toutefois que cette tendance ne devient significative que dans le domaine des grandes déformations. Une méthode de calcul approché basé sur l'hypothèse d'une rigidité à la flexion constante pour un effort axial donné, conduit à des résultats très satisfaisants.

L'étude de la capacité de rotation des rotules plastiques montre que les déplacements de la tête du pilier, bien qu'indépendants du genre d'appuis, peuvent devenir importants. Ils sont notablement plus grande que ceux qui se produisent dans le domaine élastique. La comparaison des deux genres d'appuis montre toutefois que leur comportement dans le domaine ultime est tout à fait semblable.

Les exemples montrent, que pour une structure immobile la capacité portante des piliers doublement encastrés est plus élevée que celle d'un pilier simplement encastré. On retrouve cette supériorité même par rapport aux pièces comprimées, peu élancées, pour lesquelles la résistance de la section et non pas les critères de stabilité représente la condition déterminante à la rupture. Pour les structures mobiles, on peut se trouver en présence d'un problème de stabilité de l'ensemble de l'ouvrage. Dans ce cas, les piliers doublement encastrés contribuent à augmenter la stabilité générale.

La possibilité de donner une "recette" générale pour le choix du système d'appuis n'existe certes pas. Trop de paramètres (conditions du sol, formation de fissures dans le domaine d'utilisation) influencent ce choix. La présente étude montre toutefois, qu'il est possible voir même préférable dans beaucoup de cas, de construire des piliers doublement encastrés plutôt qu'articulés ou libres à l'une de leurs extrémités. Ce choix ne peut qu'influencer favorablement la stabilité générale de l'ouvrage.

La grande capacité de déformation requise au droit des encastrements peut être assurée par des mesures constructives adéquates. A l'aide d'essais ayant pour but d'établir le comportement à la fissuration dans le domaine d'utilisation ainsi que la capacité de rotation, on pourrait expérimenter différentes solutions constructives qui se rapportent au problème sus-mentionné.

CONCLUSIONS AND SUMMARY

Imposed deformations on fixed columns demand a big rotation capacity at the fixed ends. It can be seen from test results that the behavior of concrete is considerably more ductile than usually assumed. Especially with a strong lateral reinforcement, considerable compressive strains are possible without a significant reduction of the strength. Due to wide scattering of the material properties it is difficult to formulate an unique stress-strain relationship for concrete. Therefore, two extreme assumptions are made in this investigation. On one side a parabolic stress-strain diagram is used which accounts for a decrease in strength due to strain softening. On the other side a parabolic-straight diagram is used with no softening effect at all. Depending on the lateral reinforcement and other parameters the real stress-strain behavior of concrete lies between the two extreme assumptions.

The assumed material properties influence the moment-curvature relationship and thereby the deformation behavior of the columns. Due to the nonlinear material properties and the influence of deformations on the ultimate load (second order theory), numerical procedures have to be applied for the computation of columns. A corresponding computer program is described in the appendix. But also considerations on a simple cantilever model column, with one end fixed and the possibility to deform at two given rotation springs, show the principal deformation behavior. The conclusions drawn from the simple model are confirmed by computer computations on reinforced concrete columns. If under constant axial load the rotation of the fixed end is increased (i.e. deformation controlled procedure) and if for the moment-rotation relationship strain softening is considered, the column "straightens". For increasing rotation of the fixed end at the column base a decrease of the displacement of the column top is possible. If no strain softening is considered the moments remain constant for increasing rotation and the column does not bend further, i.e. the column "stiffens" and rotates like a column hinged at both ends. Hereby the displacements of the column top increase.

For the nonlinear moment-curvature relationship under constant axial load, the bending stiffness decreases for increasing deformations. Thus, the forces imposed by the displacements of the column top decrease more for the fixed column than for the column hinged on one side. But a comparison of the two columns shows that this is only of significance for large strains in the plastic range. An approximate computation procedure with constant bending stiffness for a given axial load is therefore justified.

The investigations on the rotation capacity of the plastic hinges show that the plastic displacements of the column top which are independent on the support conditions can become very large. They are much bigger than the elastic displacements. A comparison shows approximately the same deformation capacity before failure for the two columns.

The computation examples show that the ultimate load for laterally supported columns with fixed ends is generally bigger than for the hinged ones. For short columns with large imposed displacements, failure of the cross section instead of stability failure restricts the ultimate load. But even in this case the fixed ended column is usually better. For unbraced structures with sidesway deflections, instability of the whole system is possible. Fixed ended columns improve significantly the system stability.

No general rule for the choice of support conditions of columns can be given. Too many parameters like the properties of the soil or the cracking state under working loads influence this decision. But these investigations allow to draw the conclusion that in practical design, generally more fixed ended columns should be used to increase the stability of the structures.

The big deformation capacity which is necessary at the fixed ends of columns has to be established by carefully designed details (e.g. lateral reinforcement) within the plastic hinge length. Some further experimental studies on the behavior of fixed ended columns could give appropriate constructive provisions. Of special interest are the cracking state under working load and the rotation capacity of plastic hinges under ultimate load.

ANHANG: COMPUTER-PROGRAMM FUER DIE BERECHNUNG UNELASTISCHER RAHMEN NACH DER
THEORIE 2. ORDNUNG

Dieses Programm war ein wesentliches Hilfsmittel für die Berechnung numerischer Beispiele in dieser Arbeit und soll deshalb kurz erläutert werden. Es ist in [2] und [3] im Detail beschrieben.

Das Programm ermöglicht die Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens ebener Rahmen unter Berücksichtigung der Theorie 2. Ordnung und des unelastischen Materialverhaltens. Es kann eine beliebige Geometrie und Belastungsgeschichte eingegeben werden. Neben konstanten Lasten können auch proportionale Lasten berücksichtigt und der entsprechende Lastfaktor λ kann bestimmt werden. Für die Ermittlung instabiler Lagen des Rahmens kann ein verformungsgesteuertes Rechenverfahren verwendet werden.

Eine Uebersicht über den Rechengang ist in Bild 5.6 gegeben. Im Folgenden werden der generelle Aufbau des Programmes und das Vorgehen bei der elastischen Berechnung 2. Ordnung gezeigt.

A.1 Genereller Aufbau des Programmes

Das Programm besteht aus einem Hauptprogramm (MAIN) und 10 Unterprogrammen. Bild A.1 gibt einen schematischen Ueberblick über dessen Aufbau.

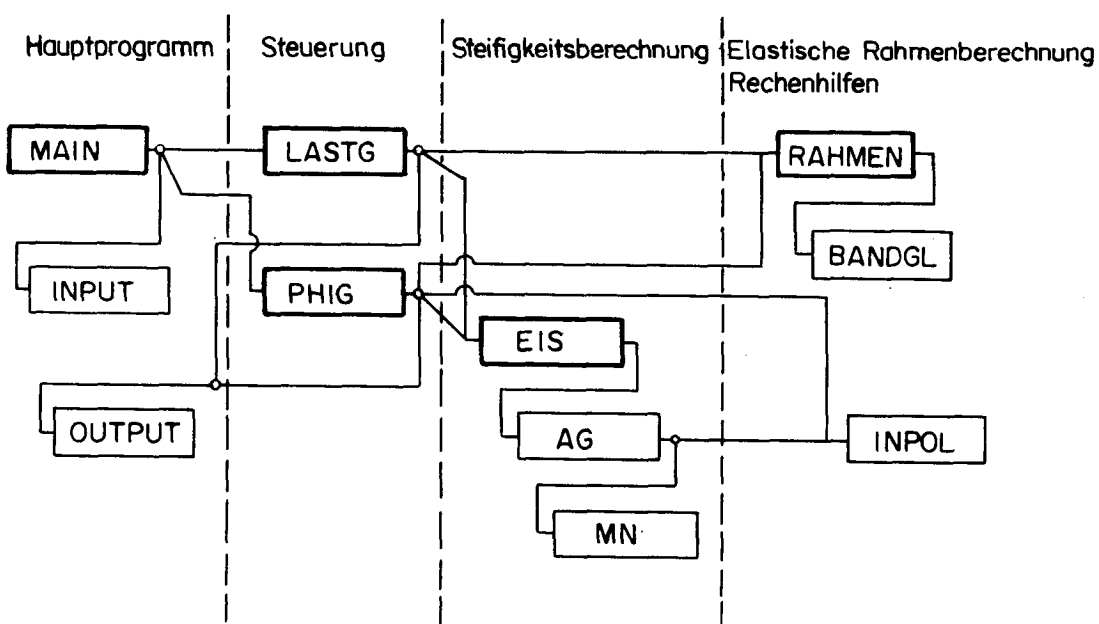


Bild A.1: Aufbau des Programmes

Es können die vier folgenden Gruppen unterschieden werden:

- Hauptprogramm: Zum kurzen Hauptprogramm gehören die Input- und Output-Routinen.
- Steuerung: Die Steuerung wird vom Hauptprogramm kontrolliert. LASTG steuert einen gegebenen Lastfaktor λ . PHIG kontrolliert die Krümmung ϕ_{ks} im Kontroll-Schnitt bei der Verformungssteuerung.
- Steifigkeitsberechnung: Die Subroutinen EIS, AG und MN berechnen die Sekantensteifigkeit EI für jedes Element unter Berücksichtigung der berechneten Krümmungen und Achsiallasten (Momenten-Krümmungs-Beziehung).
- Elastische Rahmenberechnung und Rechenhilfen:
 - RAHMEN führt eine elastische Rahmenberechnung nach der Deformationsmethode unter Berücksichtigung der Theorie 2. Ordnung durch. BANDGL löst das dazugehörige lineare Gleichungssystem.
 - INPOL ist eine Interpolationsroutine zur Beschleunigung der Konvergenz.

Im Folgenden wird eine summarische Beschreibung der einzelnen Programmteile gegeben.

RAHMEN

Die Biegesteifigkeiten und die Achsiallasten für jedes Element, die Randbedingungen und alle Lasten müssen gegeben sein. Das Unterprogramm berechnet die globale Steifigkeitsmatrix [K] unter Berücksichtigung der Biegesteifigkeiten, der Achsiallasten (Theorie 2. Ordnung) und der Randbedingungen. Für den Lastfaktor $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$ wird je eine elastische Analyse des Tragwerkes gemacht. Dabei werden neben den Verschiebungen auch die Stabkräfte und die Reaktionen bestimmt.

Je nach der aktuellen Steuerung werden durch Interpolation die Verschiebungen, Stabkräfte und Reaktionen so ermittelt, dass λ mit dem gegebenen Lastfaktor (Laststeuerung) oder, dass die Krümmung im Kontroll-Schnitt mit der spezifizierten Krümmung (Verformungssteuerung) übereinstimmt.

BANDGL (Bandgleichungen)

Nach dem Gauss'schen Algorithmus löst das Programm das lineare Gleichungssystem der Rahmenberechnung, wobei berücksichtigt wird, dass die Steifigkeitsmatrix bandförmig und symmetrisch ist.

INPOL (InterPolation)

Durch n-Stützstellen wird ein Polynom von (n-1)tem Grade gelegt und die gesuchten Werte werden interpoliert.

EIS (Steifigkeit EI)

Es werden die Sekantensteifigkeiten für alle Elemente berechnet ($EI = M/\Phi$). Die inneren Momente M werden aufgrund der gegebenen Krümmungen (Φ) unter Wahrung des achsialen Gleichgewichtes in AG resp. MN ermittelt.

AG (Achsiales Gleichgewicht)

Für eine gegebene Krümmung irgend eines Querschnittes wird die mittlere achsiale Dehnung ϵ_m variiert bis das achsiale Gleichgewicht erfüllt ist.

Für jede Position der Dehnungsebene werden M und N in der MN-Routine berechnet. Nach der Durchrechnung von zwei Dehnungspositionen ϵ_m wird ein neuer Näherungswert für ϵ_m durch eine lineare Interpolation bestimmt, so dass sich die dazugehörige Normalkraft N sehr rasch der gegebenen Normalkraft nähert. Das Konvergenzkriterium kann in der INPUT-Routine spezifiziert werden. Hat diese Iteration konvergiert, so wird mit dem entsprechenden M in der EIS-Routine die Sekantensteifigkeit berechnet.

MN (Moment, Normalkraft)

Für eine gegebene Position der Dehnungsebene werden die inneren Kräfte M und N durch Integration der Spannungen über die Querschnittsfläche bestimmt.

LASTIG (Lastgesteuert)

Der Rahmen wird nach der lastgesteuerten Methode berechnet. Eingegeben werden der Lastfaktor λ und die Belastungsdauer Δt .

PHIG (Krümmung Φ wird gesteuert)

Für Kurzzeitbelastung wird die bezogene Krümmung $\Phi \cdot H$ im Kontroll-Schnitt stufenweise erhöht und der dazugehörige Lastfaktor λ wird ermittelt. Ein Versagen infolge Instabilität stellt sich dann ein, wenn bei einer Erhöhung von $\Phi \cdot H$ die Last P kleiner wird.

Bei Langzeitbelastung wird zusätzlich noch Δt variiert bis λ gleich dem gegebenen Faktor λ_0 für die Dauerlast wird. Wird λ ohne Veränderung von t nach einer Erhöhung der Krümmung kleiner als der gegebene Lastfaktor λ_0 , so bedeutet dies ein vorzeitiges Versagen infolge Kriechen.

INPUT

Mit Namelist-Anweisungen können die Daten eingelesen werden.

OUTPUT

Für alle Elemente ist ein selektiver Output möglich. Es können die Momente, Normalkräfte und Verschiebungen, die Dehnungen, Krümmungen und Spannungen sowie die Biegesteifigkeiten und Reaktionen ausgedrückt werden.

MAIN

Dieses kurze Programm bestimmt die Steuerungsart gemäss den Input-Daten.

A.2 Elastische Berechnung nach der Theorie 2. Ordnung

Die elastische Berechnung 2. Ordnung ist ein wichtiger Bestandteil der nichtlinearen, elastisch-plastischen Analyse, wie sie in Kapitel 5.2 beschrieben ist. Sie wird im Unterprogramm RAHMEN mit Hilfe der Methode der finiten Elemente durchgeführt. Der Rahmen wird in Stabelemente unterteilt, die an ihren Enden, in den Knotenpunkten, miteinander verbunden sind. Bei bekannten Beziehungen zwischen Knotenkräften und Knotenverschiebungen für jedes Element kann der Gleichgewichtszustand des ganzen Tragwerkes in Funktion der Knotenverschiebungen ausgedrückt werden. Diese Beziehungen für das in Figur A.2 gegebene Element führen zu einem linearen Gleichungssystem von folgender Form:

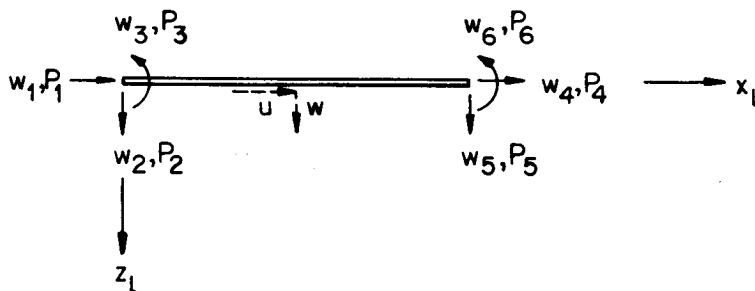


Bild A.2: Stabelement in lokalen Koordinaten

$$[K]\{w\} = \{P\} \quad (\text{A.1})$$

wobei $\{w\}$ den Verschiebungsvektor des Elementes und $\{P\}$ den Vektor der entsprechenden Knotenkräfte darstellt:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

Für die Bestimmung der Steifigkeitsmatrix $[K]$ wird die Arbeit A_i der inneren Kräfte für die Verschiebungen $\{w\}$ wie folgt berechnet:

$$A_i = \frac{1}{2} \cdot \{w\}^T \cdot [K] \cdot \{w\} \quad (\text{A.2})$$

In einem konservativen System geht die gesamte Arbeit der inneren Kräfte in Formänderungsenergie U über. Diese berechnet sich zu:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_V \epsilon \cdot \sigma(\epsilon) \cdot dV \quad (\text{A.3})$$

und kann für prismatische Stäbe in Funktion der Verschiebungen u und w wie folgt ausgedrückt werden:

$$U = \frac{1}{2} \cdot EI \cdot \int_L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot \int_L \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_L N \cdot \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \cdot dx \quad (\text{A.4})$$

Die beiden ersten Terme entsprechen den bekannten Ausdrücken für die Formänderungsenergie bei Biegung resp. achsialer Verformung. Der letzte Term entspricht der inneren Arbeit, die N bei der Verkürzung infolge Verbiegung des Stabes leistet (Bild A.3).

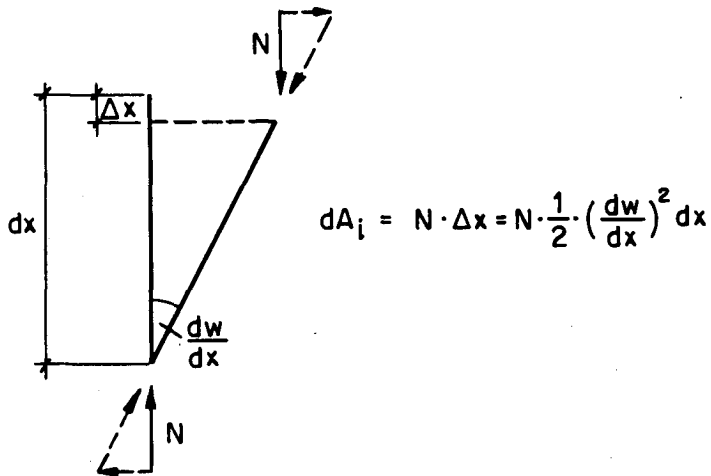


Bild A.3: Innere Arbeit der Normalkraft bei der Verkürzung Δx infolge Verbiegung des Stabes

Mit den Gleichungen (A.2) und (A.4) kann die Steifigkeitsmatrix $[K]$ bestimmt werden. Die einzelnen Koeffizienten berechnen sich zu:

$$K_{i,j} = \frac{\partial^2 U}{\partial w_i \cdot \partial w_j} \quad (\text{A.5})$$

Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ kann in eine Steifigkeitsmatrix $[K_1]$ 1. Ordnung und in eine geometrische Steifigkeitsmatrix $[K_2]$ unterteilt werden. $[K_1]$ berechnet sich aus den beiden ersten Termen von (A.4) und $[K_2]$ aus dem letzten Term, der von N abhängig ist. Um die Formänderungsenergie (A.4) ermitteln zu können, müssen die Verschiebungen u und w in Funktion der Knotenverschiebungen $\{w\}$ gegeben sein. Mit den folgenden Verschiebungsansätzen

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & \ell \cdot (\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & \ell \cdot (-\xi^2+\xi^3) \end{bmatrix} \cdot \{w\}$$

wobei $\xi = \frac{x}{\ell}$ (A.6)

berechnen sich die Steifigkeitsmatrizen $[K_1]$ und $[K_2]$, wie sie in Bild A.4 gegeben sind.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l} & & & -\frac{EF}{l} & & \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & & -\frac{6EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ & & & \frac{EF}{l} & & \\ \text{symmetrisch} & & & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Steifigkeitsmatrix 1. Ordnung

$$[K_2] = N \begin{bmatrix} & & & & & \\ & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2l}{15} & & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ & & & & & \\ \text{symmetrisch} & & & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}$$

Geometrische Steifigkeitsmatrix

Bild A.4: Lokale Steifigkeitsmatrizen

Ist das Element um den Winkel θ gegenüber der x-Axe verdreht, wie es in Bild A.5 gezeigt ist, so entsprechen die Steifigkeitsmatrizen in Bild A.4 den lokalen Matrizen $[K_\ell]$.

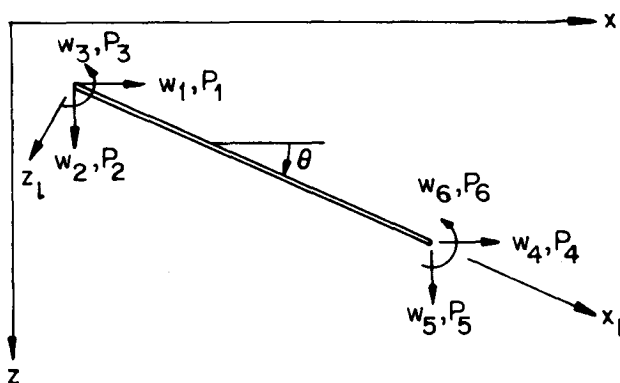


Bild A.5: Globale Verschiebungen und Lasten

Die globale Matrix berechnet sich zu:

$$[K] = [R]^T [K_\ell] [R] \quad (\text{A.7})$$

wobei $[R]$ = Transformationsmatrix, welche lokale und globale Verschiebungen oder Lasten wie folgt verbindet:

$$\{w_\ell\} = [R] \{w\}$$

$$\{P_\ell\} = [R] \{P\}$$

$[R]$ ist in Bild A.6 gegeben.

$$[R] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline C & S & & & & \\ \hline -S & C & & & & \\ \hline & & 1 & & & \\ \hline & & & C & S & \\ \hline & & & -S & C & \\ \hline & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$S = \sin \theta$$

$$C = \cos \theta$$

Bild A.6: Transformationsmatrix $[R]$

Die globale Elementsteifigkeitsmatrix $[K] = [K_1] + [K_2]$ ist in Bild A.7 gegeben.

$$[K_1] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{EF}{l} C^2 + \frac{12EI}{l^3} S^2 & \left(\frac{EF}{l} - 12 \frac{EI}{l^3}\right) SC & -\frac{6EI}{l^2} S & -k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ \hline & \frac{EF}{l} S^2 + \frac{12EI}{l^3} C^2 & \frac{6EI}{l^2} C & -k_{12} & -k_{22} & k_{23} \\ \hline & & 4 \frac{EI}{l} & -k_{13} & -k_{23} & \frac{2EI}{l} \\ \hline & \text{symmetrisch} & & k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ \hline & & & & k_{22} & -k_{23} \\ \hline & & & & & k_{33} \\ \hline \end{array}$$

$$[K_2] = N \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{6}{5l} S^2 & -\frac{6}{5l} SC & -\frac{1}{10} S & -k_{11} & -k_{12} & k_{13} \\ \hline & \frac{6}{5l} C^2 & \frac{1}{10} C & -k_{12} & -k_{22} & k_{23} \\ \hline & & \frac{2l}{15} & -k_{13} & -k_{23} & -\frac{l}{30} \\ \hline & \text{symmetrisch} & & k_{11} & k_{12} & -k_{13} \\ \hline & & & & k_{22} & -k_{23} \\ \hline & & & & & k_{33} \\ \hline \end{array}$$

$$S = \sin \theta \quad C = \cos \theta$$

Bild A.7: Globale Elementsteifigkeitsmatrix $[K] = [K_1] + [K_2]$

Aehnlich der Beziehung (A.1) für ein einzelnes Element können die Beziehungen zwischen Knotenkräften und Verschiebungen für das ganze System wie folgt geschrieben werden:

$$[K]\{w\} = \{P\} \quad (\text{A.8})$$

wobei $\{w\}$ alle Knotenverschiebungen und $\{P\}$ alle Knotenkräfte des Systems enthält.

Die Steifigkeitsmatrix $[K]$ für das ganze System wird durch Superposition aller Elementsteifigkeitsmatrizen ermittelt.

Nachdem die Steifigkeitsmatrix $[K]$ und der Lastvektor $\{P\}$ für das ganze System bestimmt sind, müssen die Gleichungen noch den gegebenen Randbedingungen

angepasst werden. Wenn zum Beispiel eine Verschiebung w_i gleich null sein muss, kann dies so erreicht werden, dass der Steifigkeitskoeffizient k_{ii} durch eine sehr grosse Zahl (z.B. 10^{50}) ersetzt wird.

Die Lösung des Gleichungssystems (A.8) kann sehr effizient gefunden werden, wenn die Symmetrie und die Bandcharakteristik der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt werden. Mit den berechneten Verschiebungen $\{w\}$ können die Knotenkräfte aus (A.1) bestimmt werden. Die globalen Verschiebungen müssen dabei mit $[R]$ in lokale Verschiebungen transformiert werden.

BEZEICHNUNGEN

B	Querschnittsbreite
D	Duktilitätsparameter
D_b	Betondruckkraft
E	Elastizitätsmodul
EI	Biegesteifigkeit
F_B	Bügelquerschnitt
F_b	Betonfläche
F_k	Betonfläche innerhalb Querarmierung
F_s	Querschnittsfläche der Zugarmierung
F'_s	Querschnittsfläche der Druckarmierung
F_u	Betonfläche ausserhalb Querarmierung
H	Querschnittshöhe
[K]	Steifigkeitsmatrix
K	Momentenverhältnis ($= m_1/m_2$)
M	Moment
M^0	Moment beim Stützenkopf
M^u	Moment beim Stützenfuss
N	Normalkraft
{P}	Lastvektor
P_E	Eulerlast
P_u	Traglast
U_B	Bügelumfang
U	Formänderungsenergie
W	Horizontallast
a, k	Konstante für die Beschreibung der linearen m- θ -Beziehung
d_b	Betondruckkraft, dimensionslos ($= D_b/B \cdot H \cdot \beta$)
d_s	Stahldruckkraft, dimensionslos ($= F'_s \cdot \sigma_s / B \cdot H \cdot \beta$)
l	Stützenlänge
l_p	Länge der Pendelstütze
l_k	Knicklänge

l_p	Länge des plastischen Gelenkes
Δl_p^M	Plastische Gelenklänge aus Querschnittsanalyse
Δl_p^G	Plastische Gelenklänge (Betrachtung am Stabelement)
m	Moment, dimensionslos ($= M/B \cdot H^2 \cdot \beta$)
m_R	Rissmoment
m_s	Moment der Armierung
m_u	Bruchmoment
m_1	Moment der beidseitig eingespannten Stütze 1
m_2	Moment der einseitig gelenkig gelagerten Stütze 2
p	Achsiallast, dimensionslos ($= P/B \cdot H \cdot \beta$)
s	Bügelabstand
u, w	Verschiebungen in x- resp. y-Richtung
$\{w\}$	Verschiebungsvektor
w	Horizontalkraft, dimensionslos ($= W/B \cdot H \cdot \beta$)
x, y, z	Koordinaten
z_s, z'_s	Lage der Längsarmierung
z	Stahlzugkraft, dimensionslos ($= F_s \cdot \sigma_s / B \cdot H \cdot \beta$)
α	Federkonstante (rad/mt)
β	Betonfestigkeit
β_z	Zugfestigkeit des Stahles
γ	$= l/l_p$
Δ	Horizontale Stützenkopfverschiebung
Δ_o	Festgehaltene Stützenkopfverschiebung
Δ_p	Plastische Stützenkopfverschiebung
ϵ	Dehnung resp. Stauchung
ϵ_b	Betonstauchung
$\epsilon_{b,1}$	Stauchung bei Erreichen der Betonfestigkeit β
ϵ_s	Stahldehnung
$\epsilon_{0,2}$	Stahldehnung bei Streckgrenze
ϵ_{sf}	$= \sigma_{sf} / E$
ϵ_{sv}	Stahlverformung bei Beginn der Verfestigung

ϵ_{50}	Stauchung, bei der die Festigkeit um die Hälfte abgenommen hat
$\dot{\epsilon}$	Verformungsgeschwindigkeit (= $d\epsilon/dt$)
θ	Drehwinkel
θ_p	Plastische Rotation
λ	Lastfaktor für proportionale Lasten
λ_D	Lastfaktor für Dauerlasten
μ	Armierungsgehalt (= $F_s/B \cdot H$)
μ'	Armierungsgehalt (= $F'_s/B \cdot H$)
μ_q	Querarmierungsgehalt (= $F_B \cdot U_B/B \cdot H \cdot s$)
ξ	= x/l , dimensionslose Koordinate
ξ_n	Lage der neutralen Axe
σ_b	Betonspannung
σ_s	Stahlspannung
σ_{sf}	Fliessspannung des Stahles
$\sigma_{0,2}$	Streckgrenze
σ_k	Spannung innerhalb Querarmierung
σ_u	Spannung ausserhalb Querarmierung
σ_p	Proportionalitätsgrenze
ϕ	Krümmung
$\phi_{p,m}$	mittlere, plastische Krümmung im Gelenk l_p
ω	Bezogener Armierungsgehalt, Zugseite (= $\mu \cdot \sigma_{sf}/\beta$)
ω'	Bezogener Armierungsgehalt, Druckseite (= $\mu' \cdot \sigma_{sf}/\beta$)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] IVBH Symposium 1974 in Quebec, Einführungsbericht "Bemessung und Sicherheit von Stahlbeton-Druckgliedern"
- [2] Aas-Jakobsen K., Grenacher, M.: "Berechnung unelastischer Rahmen nach der Theorie 2. Ordnung", Bericht Nr. 45, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, Januar 1973.
- [3] Aas-Jakobsen, K., Grenacher, M.: "Analysis of Slender Reinforced Concrete Frames", IVBH Abhandlungen, Band 34 I, 1974.
- [4] MacGregor, J.G., Delhafen, U.H., Haye, S.: "A Re-examination of the EI Value for Slender Columns", Reinforced Concrete Columns, Special Publication, American Concrete Institute, 1974.
- [5] Menn, C.: "Einfache Methode zur Berechnung der Bruchlast von schlanken Druckgliedern", IVBH Symposium 1974 in Quebec: "Bemessung und Sicherheit von Stahlbeton-Druckgliedern", Vorbericht.
- [6] Grenacher, M.: "Zur Frage der Lagerung von Stahlbetonstützen bei aufgezungenen Verformungen", IVBH Symposium 1974 in Quebec: " Bemessung und Sicherheit von Stahlbeton-Druckgliedern", Schlussbericht.
- [7] Rasch, Ch.: "Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 154, 1962.
- [8] Ramu, P., Grenacher, M., Baumann, M., Thürlimann, B.: "Versuche an gelenkig gelagerten Stahlbetonstützen unter Dauerlast", Institut für Baustatik, ETH Zürich, 1969, Versuchsbericht Nr. 6418-1, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.
- [9] Sargin, M.: "Stress-Strain Relationship for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections", University of Waterloo, Ontario, Canada, 1971.
- [10] Badawy, M.: "Einfluss der Längs- und Querarmierung auf die Tragfähigkeit und Verformbarkeit von gedrungenen Stahlbetonstützen". Eidgenössische Materialprüfungs- und Versuchsanstalt für Industrie, Bauwesen und Gewerbe, Dübendorf, Zürich, Bericht Nr. 199, 1973.

- [11] Richart, F.E., Brandtzaeg, A., Brown, R.L.: "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses", Bulletin No 185, Engineering Experiment Station, University of Illinois, Urbana, 1928.

- [12] Rüschi, H., Stöckli, S.: "Versuche an wandelbewehrten Stahlbetonsäulen unter kurz- und langfristig wirkenden Lasten", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 205, 1969.

- [13] Roy, E.H., Sozen, M.A.: "A Model to Simulate the Response of Concrete to Multi-Axial Loading", Civil Engineering Studies, Structural Research Series No 268, University of Illinois, Urbana, 1963.

- [14] Oelhafen, U.H.: "Formänderungen von Stahlbetonstützen unter exzentrischer Druckkraft", Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 31, 1970, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart.

- [15] Grenacher, M., Thürlimann, B.: "Kriechknicken von Stahlbetonstützen", IVBH Symposium 1970 in Madrid: "Der Einfluss des Kriechens, Schwindens und der Temperaturänderungen in Stahlbetonkonstruktionen", Schlussbericht.