Diss. ETH Nr. 10189

Spectral, ergodic and cohomological problems in dynamical systems

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZÜRICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
OLIVER KNILL
Dipl. Math. ETH
born Oktober 22, 1962
citizen of Appenzell/AI

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Oscar Lanford III, examiner
Prof. Dr. Alain-Sol Sznitman, co-examiner

1993

Abstract

• We showed for $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ that every $SL(2, \mathbb{K})$ cocycle over an aperiodic dynamical system can be perturbed in $L^\infty(X, SL(2, \mathbb{K}))$ on a set of arbitrary small measure, so that the perturbed cocycle has positive Lyapunov exponents. We applied these results to show that coboundaries in $L^\infty(X, \mathbb{T}^1)$ or $L^\infty(X, SU(2))$ are dense.
• We proved, that Lyapunov exponents of $SL(2, \mathbb{R})$ cocycles over an aperiodic dynamical system depend in general in a discontinuous way on the cocycle. We related the problem of positive Lyapunov exponents to a cohomology problem for measurable sets.
• We showed the integrability of infinite dimensional Hamiltonian systems obtained by making isospectral deformations of random Jacobi operators over an abstract dynamical system. Each time-1 map of these so-called random Toda flows can be expressed by a QR decomposition.
• We proved that a random Jacobi operator L over an abstract dynamical system can be factorized as $L = D^2 + E$, where E is real and below the spectrum of L and where D is again a random Jacobi operator but defined over a new dynamical system which is an integral extension. An isospectral random Toda deformation of L corresponds to an isospectral random Volterra deformation of D. The factorization leaded to super-symmetry and commuting Bäcklund transformations.
• We showed that transfer cocycles of random Jacobi operators move according to zero curvature equations, when the Jacobi operators are deformed in an isospectral way. We showed that every $SL(2, \mathbb{R})$ cocycle over an aperiodic system is cohomologuous to a transfer cocycle of a random Jacobi operator. We attached to any $SU(N)$ random discrete gauge field a random Laplacian. From the density of states of this operator, it can be decided whether the gauge field has zero curvature or not. A cohomology result of Feldmann-Moore leaded to the existence of random Harper models with arbitrary space-dependent magnetic flux.
• We gave a new short integration of the periodic Toda flows using the representation of the Toda flow as a Volterra flow. We made the remark that the Toda lattice with two particles is equivalent to the mathematical pendulum. This gives a Lax representation for the mathematical pendulum. We rewrote the first Toda flow as a conservation law for the Green function of the deformed operator. We described a functional calculus for abelian integrals obtained by looking at an abelian integral on the hyperelliptic Toda curve as a Hamiltonian of a time-dependent Toda flow.
• By renormalisation of dynamical systems and Jacobi operators, we constructed almost periodic Jacobi operators in $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}))$ having the spectrum on Julia sets J_E of the quadratic map $z \mapsto z^2 + E$ for real $E < -R$ with R large enough. The density of states of these operators is equal to the unique equilibrium measure μ_E on J_E. The set of so constructed random operators forms a Cantor set in the space of random Jacobi operators over the von Neumann-Kakutani system $T : X \to X$, a group translation on the compact topological group of dyadic integers which is a fixed point of a renormalisation map in the space of dynamical systems. The

Cantor set of operators is an attractor of the iterated function system built up by two renormalisation maps $\Phi_E^{\pm}$.
• We proved that a sufficient conditions for the existence of a Toda orbit through a higher dimensional Laplacian L is that L is not a stationary point of the first Toda flow and that it is possible to factor $L = D^2 + E$, where D is a random Laplacian over an integral extension. Random Laplacians appeared in a variational problem which has as critical points discrete random partial difference equations.
• We considered differential equations in $L^\infty(X)$ which form a thermodynamic limit of cyclic systems of ordinary differential equations. We considered also infinite dimensional dynamical systems describing the motion of infinite particles with pairwise interaction. The motion of random point vortex distributions can have a description as a motion of Jacobi operators.
• We constructed an analytic map $U : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, having a one-parameter family of two-dimensional real tori S_γ invariant, on which U is the Standard map family T_γ. We provided a rough qualitative picture of the dynamics of U and gave some arguments supporting the conjecture that the metric entropy of the Standard map T_γ is bounded below by $\log(\gamma/2)$.
• We introduced a generalized Percival variational problem of embedding an abstract dynamical systems in a monotone twist maps like for example the Standard map S_γ. Using the anti-integrable limit of Aubry and Abramovici, we showed that there exists a constant $\gamma_0 > 0$ such that every ergodic abstract dynamical system (X, T, m) with metric entropy $h_m(T) \leq \log(2)$ and $|\gamma| \geq \gamma_0$ can be embedded in the twist map S_γ. For such γ, the topological entropy of S_γ is at least $\log(2)$. Using a generalized Morse index, the integrated density of states of the Hessian at a critical point, we proved the existence of uncountably many different embeddings of some aperiodic dynamical systems.
• We studied several cohomologies for dynamical systems: For a group dynamical system $(\mathcal{R}, \mathcal{G})$ (the abelian group $\mathcal{R}$ is acting on the abelian group $\mathcal{G}$ by automorphisms) there is the Eilenberg-McLane cohomology. For a group dynamical system $(\mathbb{Z}, \mathcal{G})$ we define a sequence of Halmos homology and cohomology groups. For an algebra dynamical system $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{M}, \mathrm{tr})$ or for an group dynamical system $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{G})$, there is a discrete version of de Rham's cohomology.
• We studied the hyperbolic properties of bounded $SL(2, \mathbb{R})$ cocycles over a dynamical system. We investigated the relation between the rotation number of Ruelle for measurable matrix cocycles and the hyperbolic behavior of the cocycle. We showed that a cocycle is uniformly hyperbolic if and only if the rotation number is locally constant along a special deformation of the given cocycle. We proved that the spectrum of a cocycle acting on $L^2(X, \mathbb{C}^2)$ is the same as the Sacker-Sell spectrum.

Kurzfassung

• Wir zeigten, dass für $\mathsf{K} = \mathsf{R}, \mathsf{C}$ jeder $SL(2, \mathsf{K})$ Kozyclus über einem aperiodischen dynamischen System im Raum $L^\infty(X, SL(2, \mathsf{K}))$ auf einer Menge von beliebig kleinem Mass gestört werden kann, so dass der gestörte Kocyclus einen positive Lyapunovexponenten hat. We wendeten dieses Resultat an, um zu zeigen, dass Koränder dicht in $L^\infty(X, \mathsf{T}^1)$ oder $L^\infty(X, SU(2))$ liegen.

• Wir bewiesen, dass Lyapunovexponenten von $SL(2, \mathsf{R})$ Kozyclen über einem aperiodischen dynamischen System im Allgemeinen unstetig vom Kozyclus abhängen. Wir finden eine Beziehung zwischen dem Problem, positive Lyapunovexponenten zu zeigen und dem Kohomolgieproblem für messbare Mengen.

• Wir zeigten die Integrabilität von unendlich dimensionalen Hamilton'schen Systemen, die durch isospektrale Deformation von zufälligen Jacobioperatoren über einem dynamischen System erhalten werden. Die Zeit-1-Abbildung von diesen sogenannten zufälligen Todaflüssen kann durch eine QR-Zerlegung ausgedrückt werden.

• Wir bewiesen, dass ein zufälliger Jacobioperator L faktorisiert werden kann als $L = D^2 + E$, wo E reell und unterhalb des Spektrums von L liegt und D wieder ein zufälliger Jacobioperator über einer Integralerweiterung des alten Systems ist. Einer isospektralen zufälligen Todadeformation von L entspricht eine isospektrale zufällige Volterradeformation von D. Die Faktorisierung führte zu Supersymmetrie und kommutierenden Bäcklundtransformationen.

• Wir zeigten, dass Transferkozyklen unter isospektraler Deformation von zufälligen Jacobioperatoren sich gemäss Nullkrümmungsgleichungen bewegen. Wir zeigten, dass jeder $SL(2, \mathsf{R})$-Kozyklus über einem aperiodischen dynamischen system kohomolog zu einem Transferkozyklus eines zufälligen Jacobiopertators ist. Wir adjungierten zu jedem diskreten $SU(N)$ Eichfeld einen zufälligen Laplaceoperator dessen Zustandsdichte entscheidet ob das Eichfeld Krümmung Null hat oder nicht. Ein Kohomologieresultat von Feldmann und Moore führte zur Existenz von zufälligen Harpermodellen mit beliebigem ortsabhängigem magnetischem Fluss.

• Wir gaben eine neue kurze Integration des periodischen Toda Systems. Wir machten eine Bemerkung, die zu einer Lax-darstellung des mathematischen Pendels führte. Wir transformierten den ersten Todafluss als Erhaltungssatz für die Greenfunktion des deformierten Operators. Wir beschrieben ein Funktionalkalkül für abelsche Integrale indem ein abel'sches Integrale auf einer hyperelliptischen Todakurve als Hamiltonfunktion für ein zeitabhängiges Todasystem betrachtet wurde.

• Mittels Renormalisierung von dynamischen Systemen und Jacobioperatoren konstruierten wir fastperiodische Jacobioperatoren in $\mathcal{B}(l^2(\mathsf{Z}))$, die das Spektrum auf Juliamengen J_E der quadratischen Abbildung $z \mapsto z^2 + E$ haben. Die Zustandsdichte von diesen Operatoren ist gleich dem eindeutigen Gleichgewichtsmass μ_E auf J_E. Die Menge der so konstruierten zufälligen Operatoren bilden eine Cantormenge im Raum der zufälligen Jacobioperatoren über dem von Neumann-Kakutani-system $T : X \to X$, einer Gruppentranslation auf der kompakten topologischen Gruppe der dyadischen ganzen Zahlen die ein Fixpunkt einer Renormalisierungsabbildung

im Raum der dynamischen Systeme ist. Die Cantormenge von Operatoren ist ein Attraktor eines iterierten Funktionensystems, das durch zwei Renormalisierungsabbildungen $\Phi_E^{\pm}$ gebildet wird.

• Wir zeigten, dass eine hinreichende Bedingung für die Existenz von einem Todafluss durch einen höher dimensionalen diskreten Laplaceoperator L ist, dass L nicht ein stationärer Punkt vom ersten Todafluss ist und dass es möglich ist, eine Faktorisierung $L = D^2 + E$ zu machen, wo D ein zufälliger Laplaceoperator über einer Integralerweiterung ist. Zufällige Laplaceoperatoren gibt es in einem Variationsproblem, dessen kritische Punkte durch partielle Differenzengleichungen beschrieben werden.

• Wir betrachteten Differentialgleichungen in $L^\infty(X)$, die einen thermodynamischen Limes von zyklischen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen oder die Bewegung von unendlich vielen Teilchen mit Paarwechselwirkung beschreiben. Die Bewegung von zufälligen Punktwirbelkonfigurationen hat manchmal eine Beschreibung als Bewegung von einem Jacobioperator.

• Wir konstruierten eine analytische Abbildung $U : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$, die eine einparametrige Familie von zwei-dimensionalen reellen Tori S_γ invariant hat, auf denen U die Standardabbildung T_γ ist. Wir machten eine grobe qualitative Beschreibung von U und gaben ein paar Argumente, die die Vermutung unterstützen, dass die metrische Entropie der Standardabbildung von unten durch $\log(\gamma/2)$ abschätzbar ist.

• Wir führten ein verallgemeinertes Percival'sches Variationsproblem zur Einbettung von abstrakten dynamischen Systemen in einer monotone Twistabbildung S_γ ein. Unter Benützung des anti-integrablen Limes von Aubry und Abramovici zeigten wir, dass für grosse γ jedes ergodische abstrakte dynamische System (X, T, m) mit metrischer Entropie $h_m(T) \leq \log(2)$ in die Standardabbildung S_γ einbebettet werden kann. Für grosse γ ist die topologische Entropie von S_γ mindestens log(2). Unter Benützung eines verallgemeinerten Morseindex bewiesen wir die Existenz von überabzählbar vielen verschiedenen Einbettungen von dynamischen Systemen.

• Wir studierten verschiedene Kohomologieen für dynamische Systeme: Für ein dynamisches System $(\mathcal{R}, \mathcal{G})$, wo eine abelsche Gruppe $\mathcal{R}$ auf einer abelschen Gruppe $\mathcal{G}$ operiert, gibt es die Eilenberg-McLane-Kohomologie. Im Falle $\mathcal{R} = \mathbb{Z}$ definierten wir eine Folge von Halmos Kohomologie- und Halmos Homologie gruppen. Für ein dynamisches System, $(\mathbb{Z}^d, \mathcal{M}, \mathrm{tr})$, wo $\mathbb{Z}^d$ auf der Algebra $\mathcal{M}$ mittels Spur erhaltenden Algebraautomorphismen operiert, definierten wir eine diskrete Version von de Rham's Kohomologie.

• Wir studierten das hyperbolische Verhalten von beschränkten, messbaren $SL(2, \mathbb{R})$-Kozyklen über einem dynamischen System. Wir untersuchten die Relation zwischen der Rotationszahl von Ruelle für messbare Matrixkozyklen und dem hyperbolischen Verhalten der Kozyklen. Wir zeigten, dass ein Kozyklus uniform hyperbolisch ist, genau dann wenn die Rotationszahl konstant ist in einer Umgebung des Kozyklus. Wir betrachteten auch verschiedene Spektren von Matrixkozyklen und bewiesen, dass das Spektrum des Kozyklus als Operator auf $L^2(X, \mathbb{C}^2)$ gleich dem Sacker-Sell Spektrum ist.