Diss. ETH Nr. 10395

Die Gleichungen der ersten Variation redundant modellierter Starrkörpersysteme

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels
DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von
GEORGES DEVAQUET
Dipl. Masch. Ing. ETH
geboren am 12. Mai 1963
von Luxemburg

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. H. Brauchli, Referent
Prof. Dr. W. Schumann, Korreferent

25. Feb. 94 H. Brauchli

Zusammenfassung

Die Modellierung mechanischer Starrkörpersysteme mit überzähligen Koordinaten erlaubt es, einige Nachteile der klassischen Beschreibungsmethoden zu umgehen. Beispielsweise ist es unmöglich, den Konfigurationsraum von Systemen, die geschlossene Schleifen enthalten, mit einer einzigen minimalen Koordinatenkarte singularitätenfrei zu parametrisieren. Redundante Parametrisierungen erlauben des weiteren einen modularen Aufbau der Bewegungsgleichungen, der den Einbezug bereits bekannter Bewegungsgleichungen von Subsystemen in der Modellierung vereinfacht und eine computergerechte Standardisierung erlaubt.

Diese Vorteile vererben sich auch auf die Gleichungen der ersten Variation, die auf redundanten Modellgleichungen aufbauen. Die Kenntnis dieser Gleichungen wird bei Problemstellungen wie der Untersuchung der Stabilität vorgegebener Bewegungen, der Sensitivität von Bewegungen auf Systemparameteränderungen oder bei Zweipunkt-Randwertproblemen vorausgesetzt.

In dieser Arbeit wird eine systematische, algebraisierte Methode zur Herleitung der Gleichungen der ersten Variation von Bewegungsgleichungen mechanischer Starrkörpersysteme hergeleitet. Die zur Linearisierung um eine Referenztrajektorie herangezogenen Bewegungsgleichungen basieren auf der Projektionsmethode, die sich einer redundanten Systemmodellierung bedient.

Diese Beschreibung parametrisiert eine Mannigfaltigkeit, in welcher der Konfigurationsraum des mechanischen Systems als Untermannigfaltigkeit eingebettet ist. Für den Konfigurationsraum ist keine explizite Koordinatendarstellung bekannt; er ist implizit durch algebraische Bindungsgleichungen, die linear in den Geschwindigkeiten sind, definiert. Mit diesen Bindungsgleichungen wird ein Feld von Projektoren gebildet, welche die Tangentialräume der einbettenden Mannigfaltigkeit in den Punkten des Konfigurationsraumes auf mit den Bindungen verträgliche, lineare

Unterräume abbilden. Dieses Feld von Projektoren wird benutzt, um in der einbettenden Mannigfaltigkeit eine Familie von linearen Zusammenhängen zu definieren. Jeder lineare Zusammenhang aus dieser Familie definiert eine kovariante Ableitung im einbettenden Raum. Die Restriktion aller so erhaltenen kovarianten Ableitungen auf den Konfigurationsraum sind untereinander äquivalent. Die Differentiation des Geschwindigkeitsvektors des mechanischen Systems mit einer solchen kovarianten Ableitung entspricht der Beschleunigung. Mit diesem Ausdruck für die Beschleunigung erhält man ein verallgemeinertes Newtonsches Gesetz für die Bewegung des betrachteten Systems, wobei die Differentialgleichungen der Bewegung von den Reaktionskräften entkoppelt sind, sofern keine reaktionsabhängigen, dissipativen Kräfte vorhanden sind.

Die Gleichungen der ersten Variation berechnen sich anhand dieser Bewegungsgleichungen auf analoge Art zur Deviation von Geodäten in einer Mannigfaltigkeit. Die kovariante Ableitung der Bewegungsgleichungen in Richtung eines Störungsvektorfeldes entlang einer vorgegebenen Referenztrajektorie führt auf ein Anfangswertproblem für die Evolution dieser Störung. In diesen Gleichungen kommen der Krümmungstensor und der Torsionstensor vor. Falls nur holonome Bindungen betrachtet werden, verschwindet der Torsionstensor identisch auf der Konfigurationsuntermannigfaltigkeit, und der Krümmungstensor entspricht dem Riemannschen Krümmungstensor des Konfigurationsraumes. Für den Fall holonomer Bindungen bedarf es zur Generierung der Gleichungen der ersten Variation, außer der Ableitung der verallgemeinerten Kräfte, keine weiteren Angaben, die nicht bereits von den Bewegungsgleichungen her verfügbar sind. Sind anholonome Bindungen zu berücksichtigen, so muß man die partiellen Ableitungen des zum linearen Zusammenhang gehörenden Torsionstensors berechnen. Diese sind nicht aus den Bewegungsgleichungen bekannt.

Die Gleichungen der ersten Variation sind tensorielle Gleichungen. Diese Eigenschaft wird benutzt, um einige von J.L. Synge hergeleitete Aussagen über die Stabilität von Bewegungen auf redundante Systembeschreibungen zu erweitern.

Abstract

The modelling equations of rigid multibody systems, with redundant coordinates, allows to suppress some disadvantages of classical modelling methods. It is for instance impossible to find a parametrical representation for the configuration space with a minimal set of coordinates that doesn't comprise singularities in the presence of closed loops. An excess in the number of coordinates can further lead to a modularly structured set of equations of motion. Already known equations of motion of subsystems can thus easily be included in the model. The modularity in the structure also allows for a standardisation of the evolution equations that are suitable for use in multibody simulation packages.

These advantages are transmitted to the equations for the first variation generated on the basis of a redundant description. The knowledge of these equations is presumed for tackling problems concerning stability analysis of given motions, sensitivity analysis of trajectories to changes in system parameters or two-point boundary value problems.

In this thesis, a systematic, algebraic method is derived to generate the equations for the first variation of the equations of motion for rigid multibody systems. The equations of motion, to be linearized along a reference trajectory, are based on a projection method using redundant coordinates.

The coordinates parametrize a manifold in which the configuration space of the mechanical system is imbedded as a submanifold. There is no need for an explicite parametric representation of the configuration space. It is implicitely defined through algebraic constraint equations which are linear *in the velocities. The constraint equations* serve to define a field of projections. At each point of the configuration space this projection maps the tangent space of the imbedding manifold onto a linear subspace that is compatible with the constraints. A family of linear connections is defined in the imbedding manifold using the field of projections. Each linear connection of this family implicates a corresponding covariant derivation. The restrictions of the covariant derivations to the configuration

submanifold are all equivalent. Applying a covariant derivation, defined in this manner, to the velocity vector of the mechanical system leads to a generalized Newton's law of motion. If no dissipative, reaction-dependent forces are present, the differential equations of motion are decoupled from the reaction forces.

The equations for the first variation of the evolution equations are computed analogously to the geodesic deviation on a manifold. The covariant derivative of the equations of motion in the direction of a perturbation vector, defined along the reference trajectory, leads to an initial value problem for the evolution of the perturbation. The curvature tensor and the torsion tensor appear in these equations. If all the constraints are holonomic, the torsion tensor vanishes and the curvature tensor corresponds to the Riemannian curvature tensor of the configuration submanifold. Almost all the data needed to generate the equations for the first variation already appear in the equations of motion. Only the variation of the forces has to be additionally computed. In the presence of nonholonomic constraints the partial derivatives of the torsion tensor must be calculated, since they are not available from the equations of motion.

The equations for the first variation are tensorial. This property is used to extend some stability theorems derived by J.L. Synge for trajectories in manifolds to trajectories in submanifolds.