Diss. ETH No. 10673

Rational Transmitting Boundaries for Time-Domain Analysis of Dam-Reservoir Interaction

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Technical Science

presented by

Benedikt Weber
Dipl. Bau-Ing. ETH, M.S. Stanford University
born on August 6, 1953
citizen of Hohenrain LU

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Hugo Bachmann, examiner
Prof. Dr. Edoardo Anderheggen, co-examiner
PD Dr. Jürgen Halin, co-examiner

1994

Abstract

Dynamic analysis of dam-reservoir interaction is conveniently performed using finite elements. An intrinsic problem is that only the dam and the nearfield of the reservoir can be modeled directly. The farfield has to be idealized as a semi-infinite channel which is represented by a special boundary. This boundary is called *transmitting boundary* because waves are transmitted through it from the nearfield to the farfield. The rigorous frequency-domain analysis leads to two qualitatively different types of solution. Below the cut-off frequency, which corresponds to the fundamental frequency of the channel cross-section, the pressure decays exponentially with distance and no energy is transmitted. Above the cut-off frequency, pressure waves propagate to infinity taking energy out of the nearfield which results in radiation damping.

For a time-domain analysis, as required for nonlinear problems, a transmitting boundary has to be formulated in the time domain. The main difficulty is to find an algorithm that takes care of both the decaying and the wave propagation parts of the solution. Various methods proposed in the literature are shown to be inappropriate for problems involving a cut-off frequency because they either do not capture the different types of solution, as viscous boundaries, or because they are computationally inefficient as convolution or boundary elements.

The route taken here is an approach based on rational approximation and therefore is given the name *rational boundaries*. The frequency-domain solution is approximated by a linear time-invariant system expressed as a set of linear differential equations with constant coefficients. These differential equations can be solved efficiently using the same time integration algorithm as for the finite element part of the model.

Rational approximation for systems is difficult because of two main problems. Firstly, the determination of the coefficients is a nonlinear problem. Secondly, there is the additional constraint that the resulting system be stable. In a first step, simple methods approximating either the transfer function or the *Markov parameters* are explained. The approximation of the Markov parameters leads in a natural way to the *Hankel matrix* which plays the key role in more advanced methods.

An important point is the duality between discrete-time and continuous-time systems. The link between the two domains is the *bilinear transform.* The bilinear transform maps a continuous-time system to a discrete-time system and vice versa. The approximation for a continuous-time system can be done in the mapped discrete-time domain. The approximation is then transformed back to the original continuous-time domain. Because the stability regions are mapped onto each other, the bilinear transform preserves stability. This procedure has two major advantages. Firstly, the Hankel matrix can easily be calculated because the system is discrete-time and secondly, the whole frequency axis up to infinity can be included because it is mapped to the (finite) unit circle. Taking into account the high frequencies is important to preserve *causality* which in turn is necessary for *stability.*

Two methods based on the the *singular value decomposition* of the Hankel matrix are explained, the Carathéodory-Fejér (CF) method and the *balanced realization*. The CF method is the most accurate of all methods investigated and leads to an almost circular error curve in the complex plane. Unfortunately, it cannot easily be extended to the *multivariable* case. The favorite method is the balanced realization method because it is numerically robust and equally well applicable for scalar as for multivariable systems.

A special feature of the proposed algorithm is the transformation of the approximating system to a *symmetric second-order* form which is the form of the finite element matrices. The farfield can therefore be implemented by appending the second-order matrices of the farfield to the mass, damping and stiffness matrices of the nearfield.

Various examples including analyses of full-size three-dimensional models confirm the accuracy and efficiency of the method.

Keywords: dam-reservoir interaction, earthquake analysis, finite elements, transmitting boundaries, transmitting boundaries in time-domain, radiation condition, rational approximation, linear system approximation, Hankel matrix, singular value decomposition, balanced realization.

Zusammenfassung

Die dynamische Berechnung der Staumauer-Stausee-Wechselwirkung wird geeigneterweise mit Finiten Elementen durchgeführt. Ein wesentliches Problem dabei ist, dass nur die Mauer und das Nahgebiet des Stausees direkt modelliert werden können. Das Ferngebiet muss als halbunendlicher Kanal idealisiert werden und wird durch einen speziellen Rand representiert. Dieser Rand heisst *durchlässiger Rand*, weil Wellen vom Nahgebiet ins Ferngebiet durchgelassen werden. Die genaue Analyse im Frequenzbereich zeigt zwei qualitativ verschiedene Lösungen. Unterhalb der Grenzfrequenz, die der Grundfrequenz des Kanalquerschnittes entspricht, fällt der Druck exponentiell mit der Distanz ab, und es wird keine Energie abgestrahlt. Oberhalb der Grenzfrequenz wandern die Wellen ins Unendliche und transportieren Energie weg aus dem Nahbereich, was sich als Abstrahlungsdämpfung äussert.

Für eine Berechnung im Zeitbereich, wie sie für nichtlineare Probleme nötig ist, muss ein durchlässiger Rand im Zeitbereich formuliert werden. Die Hauptschwierigkeit ist dabei einen Algoritmus zu finden, der sowohl den abfallenden Teil der Lösung wie auch die Wellenausbreitung berücksichtigt. Es wird gezeigt, dass verschiedene in der Literatur vorgeschlagene Lösungen für Probleme mit einer Grenzfrequenz unzulänglich sind, da sie rechnerisch nicht effizient sind, wie zum Beispiel die Faltung oder die Randelemente.

Der hier eingeschlagene Weg ist ein Verfahren basierend auf rationaler Approximation und wird daher als *"rationale Ränder"* bezeichnet. Die Lösung im Zeitbereich wird durch ein lineares, zeitinvariantes System approximiert, das als System von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt wird. Diese Differentialgleichungen können mit dem gleichen Algoritmus, der für den Finite-Elemente-Teil des Modells benützt wird, effizient gelöst werden.

Die rationale Approximation von Systemen ist aus zwei Gründen schwierig. Erstens ist die Bestimmung der Koeffizienten ein nichtlineares Problem, und zweitens besteht die zusätzliche Bedingung, dass das gefundene System stabil sein muss. In einem ersten Schritt werden einfache Methoden erklärt, die entweder direkt die Uebertragungsfunktion oder dann die *Markov-Parameter* approximieren. Die Approximation der Markov-Parameter führt in natürlicher Weise zur *Hankel-Matrix*, die eine Schlüsselrolle für kompliziertere Methoden spielt.

Ein wichtiger Punkt ist die Dualität zwischen zeitlich diskreten und kontinuierlichen Systemen. Die Verbindung beider Bereiche ist durch die *bilineare Transformation* gegeben. Die bilineare Transformation ist eine Abbildung zwischen zeitlich diskreten und kontinuierlichen Systemen. Die Approximation eines zeitlich kontinuierlichen Systems kann im zeitlich diskreten Bereich ausgeführt werden. Die Approximation wird dann in den ursprünglichen, zeitlich kontinuierlichen Bereich zurücktransformiert. Da die Stabilitätsgebiete ineinander abgebildet werden, bleibt die Stabilität bei der bilinearen Transformation erhalten. Dieses Vorgehen hat zwei bedeutende Vorteile. Erstens kann die Hankel-Matrix einfach berechnet werden, da das System zeitlich diskret ist und zweitens kann die ganze Frequenzachse bis ins Unendliche erfasst werden, da sie in den (endlichen) Einheitskreis transformiert wird. Die Erfassung hoher Frequenzen ist wichtig für die Erhaltung der *Kausalität*, die ihrerseits eine Voraussetzung für die *Stabilität* ist.

Zwei Methoden werden erklärt, die auf der *Singulärwertzerlegung* der Hankel-Matrix basieren, die Carathéodory-Fejér-Methode (CF-Methode) und die *"Balanced Realization"*. Die CF-Methode ist die genaueste von allen untersuchten Methoden und führt zu einer fast kreisförmigen Fehlerkurve in der komplexen Ebene. Leider kann diese Methode nicht einfach auf den Fall von *Mehrfreiheitsgradsystemen* übertragen werden. Die bevorzugte Methode ist die "Balanced Realization", da sie numerisch robust ist und sowohl auf Einfreiheitsgrad- wie auch auf Mehrfreiheitsgradsysteme angewendet werden kann.

Eine Spezialität des vorgeschlagenen Algoritmus' ist die Transformation des approximierten Systems auf ein symmetrisches System *zweiter Ordnung* von der gleichen Form wie die Finite-Element-Matrizen. Das Ferngebiet kann daher berücksichtigt werden, indem die Matrizen des Ferngebietes an die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen des Nahbereichs angekoppelt werden.

Mehrere Beispiele, einschliesslich Berechnungen von grossen dreidimensionalen Modellen, bestätigen die Genauigkeit und die Effizienz der Methode.

Schlüsselwörter: Staumauer-Stausee-Wechselwirkung, Erdbebenberechnung, Finite Elemente, Durchlässige Ränder, Rationale Approximation, Approximation linearer Systeme, Hankel Matrix, Singulärwertzerlegung, Balanced Realization.