Numerisch effiziente Methoden der Mehrkörperdynamik

Author(s):
Melliger, Oskar Franco

Publication Date:
1994

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001374256

Diss. ETH Nr. 10755

Numerisch effiziente Methoden der Mehrkörperdynamik

ABHANDLUNG
Zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

OSKAR FRANCO MELLIGER
dipl. Masch.-Ing. ETH
geboren am 19. März 1961
von Zürich und Birr AG

angenommen auf Antrag von

PD Dr. J. Halin, Referent
Prof. Dr. H. Brauchli, Korreferent

1994

Kurzfassung

Wir befassen uns in dieser Arbeit mit der Auswertung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen und zeigen, wie sich der Rechenaufwand mit numerischen Verfahren, die auf schwachbesetzte Matrizen zugeschnitten sind, reduzieren lässt, auch wenn ein grosser Teil der Matrizenelemente von null verschieden sind. Die Mehrkörpersysteme seien statisch bestimmt gebunden und sollen ausschliesslich zeitunabhängige, reibungsfreie Bindungen aufweisen. Lage und Geschwindigkeitszustand der Mehrkörpersysteme werden redundant beschrieben. Die gewählte Beschreibung des Geschwindigkeitszustandes der Körper führt zu diagonalen und konstanten Massenmatrizen. Die Bewegungsgleichungen werden mit einer Methode formuliert, welche auf den Euler-Lagrange Gleichungen basiert und Projektoren verwendet, die bezüglich der Massenmatrix orthogonal sind. Sie hat bei Mehrkörpersystemen mit reibungsfreien Bindungen den Vorteil, dass die Differentialgleichungen, die Lage und Geschwindigkeitszustand der Systeme beschreiben, von den algebraischen Gleichungen für die Reaktionskräfte in den Bindungen entkoppelt vorliegen.
Die zeitlichen Ableitungen von Lagekoordinaten und kanonischen Impulsen kann man auf zwei Arten berechnen: mit einer "direkten" oder einer "indirekten" Methode. Der Rechenaufwand setzt sich bei beiden Methoden aus dem Lösen linearer Gleichungssysteme und Matrizenoperationen zusammen. Die Koeffizientenmatrix bei der direkten Methode ist symmetrisch indefinit. Sie besitzt eine Blockstruktur, die aus dem Gebiet der Optimierung mit Nebenbedingungen bekannt ist. Die Koeffizientenmatrix bei der indirekten Methode ist symmetrisch, positiv definit und ihre Dimension ist um mehr als die Hälfte kleiner als die der Koeffizientenmatrix bei der direkten Methode. Beide Koeffizientenmatrizen und auch die übrigen Matrizen sind in der Regel nicht vollbesetzt, d.h. sie enthalten Elemente, die null sind.
Zum Lösen der linearen Gleichungssysteme stehen sowohl geeignete direkte als auch iterative Verfahren zur Verfügung. Abschätzungen zum Rechenaufwand für verschiedene iterative Verfahren zeigen, dass die direkten Verfahren schneller sind, wenn man die schwache Besetzung der Koeffizientenmatrizen ausnützt. Wir konzentrieren uns deshalb auf die direkten Verfahren.
Beim linearen Gleichungssystem der direkten Methode lässt sich der Rechenaufwand verringern, indem man entweder die Blockstruktur der Koeffizientenmatrix ausnützt oder Versionen der bekannten numerischen Verfahren einsetzt, welche nur die Nicht-Null-Elemente der Koeffizientenmatrizen berücksichtigen. Zwei Verfahren, welche die Blockstruktur ausnützen, sind Bildraummethode und Nullraummethode; Versionen, die nur mit den Nicht-Null-Elementen arbeiten, existieren für die meisten direkten Verfahren.

Weil die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems der indirekten Methode keine typische Struktur aufweist, sind Versionen der numerischen Lösungsverfahren, die auf dünnbesetzte Koeffizientenmatrizen zugeschnitten sind, das einzige Mittel zur Verringerung des Rechenaufwandes. Die Koeffizientenmatrix kann man als Produkt einer Matrix mit ihrer Transponierten betrachten. Deshalb bietet sich die Möglichkeit, entweder die Koeffizientenmatrix selbst oder eine der beiden am Produkt beteiligten Matrizen zu zerlegen.
Die diagonale Struktur der Massenmatrix gestattet bei der direkten Methode massgebliche Vereinfachungen des Lösungsansatzes und ihre Konstanz führt bei beiden Methoden zu wesentlichen Einsparungen beim Rechenaufwand.
Die für Testsysteme verschiedener Grösse gemessenen Rechenzeiten zeigen, dass die Variante der indirekten Methode, bei der eine der beiden zum Produkt gehörenden Matrizen faktorisiert wird, beim Lösen der linearen Gleichungssysteme am schnellsten ist. Die indirekte Methode mit dieser Variante zum Lösen des linearen Gleichungssystems ist auch der effizienteste Weg, um die Bewegungsgleichungen auszuwerten.
Die Erkenntnisse dieser Arbeit sind in die Entwicklung des Programms DYNAMITE eingeflossen, mit dem man Dynamik und inverse Dynamik von ebenen und räumlichen Mehrkörpersystemen simulieren kann, deren Körper starr sind.

Abstract

We present several ways to compute the equations of motion of multibody systems efficiently. We show that computational costs can be reduced using sparse matrix techniques even if most of the elements in the matrices involved are non-zero. We consider here only statically determined systems with scleronomic i.e. time-independent constraints. There are no friction forces acting on the systems.
We describe multibody systems redundantly. The velocity variables chosen lead to a diagonal and constant mass matrix. The equations of motion are formulated using mass-orthogonal projections in velocity space. This results in a system of ordinary differential equations describing the positions and velocities of the constrained system which is separated from the algebraic equations for the constraint reactions.
There are two ways to compute the time derivatives of positions and momenta numerically: we call them the "direct" and "non-direct" methods respectively. With both methods, systems of linear equations have to be solved and additional operations involving matrix calculus have to be executed. The coefficient matrix arising with the direct method is symmetric indefinite and its structure is well known from the fields of constrained optimization. The coefficient matrix which has to be dealt with when using the non-direct method is symmetric, positive definite. Its dimensions are less than half the dimensions of the coefficient matrix arising from the direct method. For most multibody systems the coefficient matrices and the other matrices needed to compute the equations of motion are sparse and many numerical operations can be avoided using sparse matrix techniques.
Appropriate direct and iterative methods exist to solve our systems of linear equations. Estimation of the number of operations needed to solve these systems using sparse matrix techniques shows that the direct methods are faster than the iterative ones. We therefore concentrate on direct methods.
When solving the system of linear equations arising in the direct method, the number of operations needed can be reduced either by making use of the coefficient matrix's block structure or by using numerical methods adapted to sparse matrices. Two examples for the former are the range space method and the null space method. Versions for solving systems of linear equations tailored to sparse coefficient matrices exist for most numerical methods. The mass matrix being diagonal allows us to simplify the computation of the equations of motion substantially no matter which approach we use.
Since the coefficient matrix corresponding to the system of linear equations of the non-direct method has no typical structure, sparse matrix techniques are the only way to reduce the number of operations when computing its so-

lution. The coefficient matrix can be regarded as the product of a matrix multiplied by its transpose. This leads to the possibility of either decomposing the coefficient matrix itself or one of the two matrices in the product.
Comparing the times measured for the computation of the solutions of our systems of linear equations for multibody systems of different sizes shows that solving the system arising with the non-direct method is much more efficient than solving the one in the direct method, and that decomposing one of the two matrices in the product forming the coefficient matrix is faster than decomposing the coefficient matrix itself. The most efficient way to compute the equations of motion is the non-direct method combined with the faster variant for solving the corresponding system of linear equations. The constant mass matrix leads to a reduction of the computational costs for all methods tested.
The most appropriate methods in terms of computational costs discussed here have been implemented in the program DYNAMITE. DYNAMITE allows the simulation of dynamics and inverse dynamics for planar and spatial multibody systems consisting of rigid bodies.