Diss. ETH No. 10979

Description and analysis of 3-D shapes by parametrization of closed surfaces

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
Christian Michael Brechbühler
Dipl. Inf. Ing. ETH
born 13th of March, 1964
citizen of Huttwil, Bern

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Guido Gerig, examiner
Dr. Nicholas Ayache, directeur de recherche, co-examiner

1995

Abstract

The general problem addressed in this thesis is the description of the *form* of an m-dimensional manifold embedded in $\mathbb{R}^n$. A planar curve, e.g., is a one-dimensional manifold in two-dimensional space, hence $m = 1, n = 2$. And $m = 1, n = 3$ stands for a space curve. But the case of particular interest is $m = 2, n = 3$, i.e. a surface in 3D. We achieve the description in two steps. First a continuous one-to-one mapping between the manifold and an appropriate m-dimensional parameter space U is constructed. This step is called *parametrization*; it defines n functions $x_i : U \hookrightarrow \mathbb{R}$, or one vectorial function $x : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Then each of the functions $x_i(u)$ is expanded into a series of a fixed set of basis functions defined on U. The coefficients in the series expansions form a descriptor of the shape.

The surface of a simply connected 3D object is a closed surface homeomorphic to the sphere. The unit sphere suggests itself as the parameter space, and spherical harmonics are suitable as basis functions. The parametrization establishes true area ratios in parameter space and minimizes distortions. Standardization yields generic shape descriptors which are invariant to pose and size of the object. Due to the nature of the basis functions, spherical harmonic descriptors capture shape in a global way.

The new methods are illustrated with both simple and complex 3-D test objects. Potential applications are recognition, classification and comparison of convoluted surfaces.

Zusammenfassung

Diese Arbeit beleuchtet das allgemeine Problem der Formbeschreibung einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die im Raum $\mathbb{R}^n$ eingebettet ist. Für $m = 1, n = 2$ ist dies eine zweidimensionale Kurve, und $m = 1, n = 3$ steht für eine Kurve im Raum. Der interessanteste Fall aber ist $m = 2, n = 3$, d.h. eine Fläche in 3D. Es sind zwei Schritte zu unterscheiden. Zuerst wird eine stetige eineindeutige Abbildung zwischen der Mannigfaltigkeit und einem geeigneten m-dimensionalen Parameterraum konstruiert. (Es ist nicht immer möglich, U auf einen Teil von $\mathbb{R}^m$ abzubilden.) Dieses definiert n skalare Funktionen $x_i : U \hookrightarrow \mathbb{R}$ oder eine vektorielle $x : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Danach wird jede der Funktionen $x_i(u)$ in eine Reihe entwickelt, wobei der selbe Satz von auf U definierten Basisfunktionen zur Anwendung kommt. Die Koeffizienten der Reihenentwicklung bilden einen Deskriptor der Form.

Die Oberfläche eines einfach zusammenhängenden 3D Objektes ist eine geschlossene, zur Kugel homöomorphe Fläche. Die Einheitskugel bietet sich als Parameterraum an, und die sphärischen harmonischen Funktionen bilden eine geeignete Basis. Eine Standardisierung der Koeffizienten ergibt invariante Formdeskriptoren, welche unabhängig von der Grösse und Lage des Objektes sind. Aufgrund der Natur der Basisfunktionen erfassen sphärische harmonische Deskriptoren Form auf eine globale Art.

Sowohl einfache 3D Testobjekte als auch Beispiele komplizierterer Formen aus der Medizin illustrieren die neuen Methoden. Mögliche Anwendungen liegen in der modellbasierten Erkennung, der Klassifikation und im quantitativen Formvergleich auch verschlungener Oberflächen.