Doctoral Thesis

# Galois theory for combinatory algebras and its application to recursion theory

**Author(s):**
Gloor, Oliver Patrik Andreas

**Publication Date:**
1995

**Permanent Link:**
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001494903

Diss. ETH No. 11095

# Galois Theory for Combinatory Algebras
## and its
## Application to Recursion Theory

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
OLIVER PATRIK ANDREAS GLOOR
Dipl. Math. ETH
born August 29, 1964
citizen of Birrwil (Aargau)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. E. Engeler, examiner
Prof. Dr. G. Jäger, co-examiner

1995

# Abstract


The objective of this work was to investigate equations in Combinatory Algebras. Whenever a theory for equations and equation solving is to be developed for a type of structures, the paradigm of Galois Theory may apply and serve to discuss how a structure can be extended to provide solutions of an equation and to investigate the relation between the extended and the original structure (i.e., intermediate structures and automorphism groups). Therefore, we develop a Galois theory, first for models of an arbitrary universal theory and then specialized for combinatory algebras.

The richness of the expressiveness of combinatory algebras allows us to represent not only the partial recursive functions, but functions of any degree of computability in them. This can be done in a uniform and adequate way. Namely, the functions and schemes are represented as objects regardless of their arity, and the functions of a degree form a subalgebra. Then, the semi-lattice of degrees is isomorphically embedded in the lattice of subalgebras of a sufficiently rich combinatory algebra. Furthermore, we can express relations between degrees like the jump in an algebraic manner, namely by the solutions of a set of equations. This approach leads to an algebraization of this central topic of recursion theory.

# Zusammenfassung

Die klassische Galoistheorie behandelt Probleme, welche zum Teil bereits in der Antike diskutiert wurden, unter anderem die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, die Konstruierbarkeit regulärer Polygone mit Zirkel und Lineal, sowie die Verdoppelung des Würfels.

Diese Probleme können auf die Suche nach Nullstellen von univariaten Polynomen zurückgeführt werden. Geschlossene Lösungen für Polynome vom Grad zwei, drei und vier wurden bis Mitte des 16. Jahrhunderts gefunden. Schliesslich fand Évariste Galois (1811–1832) hinreichende und notwendige Bedingungen, wann die Nullstellen eines Polynoms durch Wurzeln dargestellt werden können. Die Galoistheorie zeigt, wie ein Körper um Lösungen einer Gleichung erweitert werden kann, und wie diese Erweiterung zum ursprünglichen Körper in Beziehung steht (das heisst, wie Automorphismengruppen und Zwischenkörper korrespondieren).

Der Erfolg der Galoistheorie für die Behandlung algebraischer Gleichungen gab Anlass, diese Methode auch für Differentialgleichungen einzusetzen. Tatsächlich wird die differentielle Galoistheorie heute eingesetzt, um für gewisse Klassen von Differentialgleichungen Lösungen zu berechnen.

Wie Gruppen und Körper gehören auch kombinatorische Algebren zu den fundamentalen Strukturen der Mathematik. Sie können verwendet werden, um algebraische, algorithmische und auch relationale Strukturen zu modellieren. Wenn eine solche Struktur in eine kombinatorische Algebra eingebettet wird, sind in der Einbettung automatisch auch aus den Operationen dieser Struktur aufgebaute Berechnungen

als Objekte vorhanden. Probleme und Fragestellungen bezüglich dem ursprünglichen Bereich können in der Einbettung oft als Gleichungen dargestellt werden. Lösungen dieser Gleichungen können dann nicht nur Repräsentanten der ursprünglichen Struktur, sondern auch Berechnungen sein.

Das Ziel dieser Arbeit war, Gleichungen in kombinatorischen Algebren zu untersuchen. Dazu wurde eine Galoistheorie entwickelt, zuerst für beliebige universelle Theorien und anschliessend für den Spezialfall von kombinatorischen Algebren.

Die Ausdrucksstärke von kombinatorischen Algebren erlaubt nicht nur die Einbettung von partiell rekursiven Funktionen, sondern auch von Funktionen eines beliebigen Berechenbarkeitsgrades (Degree). Ein Degree ist durch ein Orakel gegeben: als Menge der Funktionen, welche mit Hilfe dieses Orakels berechnet werden können. Diese Einbettung geschieht in einer uniformen Weise, indem sowohl die Funktionen wie auch die Schemen (Rekursion, Komposition) unabhängig von ihrer Stelligkeit als Objekte repräsentiert werden. Funktionen eines bestimmten Degrees bilden dann eine Subalgebra. So wird der Halbverband dieser Degrees isomorph in den Verband der Subalgebren eines Graphmodells (und anderen kombinatorischen Algebren) eingebettet.

Der kleinste Degree enthält die partiell rekursiven Funktionen. Es stellt sich die Frage, welche anderen Degrees — welche Subalgebren in der Einbettung — durch Lösungen von Gleichungen erzeugt werden. Exemplarisch wird gezeigt, dass der Jump, der eine Beziehung zwischen verschiedenen Degrees herstellt, als Lösung von (endlichen vielen) Gleichungen dargestellt werden kann.

Wenn unendliche Mengen von Gleichungen in Betracht gezogen werden, können auch beliebige Funktionen als deren Lösung definiert werden.

Dieser Ansatz führt zu einer Algebraisierung dieser zentralen Begriffe der Rekursionstheorie.