Pressure driven incompressible Navier-Stokes equations

Author(s):
Keller, Philipp Leonard

Publication Date:
1996

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001624587

Diss. ETH No. 11596

Pressure Driven Incompressible Navier–Stokes Equations

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
PHILIPP LEONARD KELLER
dipl. Math. ETH
born January, the 29th, 1965
citizen of Füllinsdorf (BL)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. J. T. Marti, examiner
Prof. Dr. R. Jeltsch, co-examiner

1996

Kurzfassung

Wir zeigen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangs–Randwertproblems der inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen in einem zweidimensionalen Gebiet Ω. Als spezielle Randbedingungen geben wir den Druck beim Ein– und beim Auslass vor, und wir verlangen, dass die Geschwindigkeitsverteilung beim Ein– und Auslass identisch einer vorgegebenen, normal zum Rand des Gebiets stehenden Geschwindigkeitsfunktion modulo eines zeitabhängigen skalaren Faktors ist. Der Geschwindigkeitsvektor wird in zwei Komponenten zerlegt, von denen die erste die Randbedingungen erfüllt und die zweite auf dem Rand verschwindet. Die erste Komponente wird gewählt als eine feste, vorgegebenen Vektorfunktion multipliziert mit einer skalaren, nur von der Zeit abhängigen Variablen. Durch die Wahl der festen Vektorfunktion als Lösung einer Stokes Gleichung werden die Existenz– und Eindeutigkeitsbeweise stark vereinfacht, und die Techniken von R. Temam [Tem84] und V. Girault and P.–A. Raviart [GR86] können angewandt werden.

Wir zeigen die Existenz einer kompakten, invarianten Menge $\mathcal{A}$, gegen die alle Lösungen der schwachen Navier–Stokes Gleichungen konvergieren. Die Hausdorffsche Dimension dieser Menge wird nach oben abgeschätzt, wobei sich zeigt, dass die obere Schranke hauptsächlich von dem vorgegebenen Druck am Rand und der Viskosität abhängt.

Wir beschreiben ein numerisches Galerkinverfahren basierend auf der Verwendung divergenzfreier Vektorfunktionen als Basisfunktionen eines endlichdimensionalen Raumes S^{2m} zur Approximation der Lösungen der schwachen Navier–Stokes Gleichungen.

Durch die Zerlegung des Approximationsraumes in zwei Unterräume S^m und W^m, wobei W^m von divergenzfreien Präwavelets generiert wird, ergeben sich weitere, nichtlineare Galerkinverfahren. Diese beruhen auf der Tatsache, dass die Komponente der Lösung, die in W^m liegt, kleiner ist als diejenige in S^m.

Abstract

In this dissertation we show the existence and uniqueness of the solution of an initial boundary value problem of the incompressible Navier–Stokes equations in a two–dimensional domain Ω. We impose as special boundary conditions the pressure at the in– and at the outflow and we demand that the velocity distribution at the inflow and outflow is equal to a given velocity function, normal to the boundary of the domain, multiplied with a scalar factor depending only on the time. We decompose the velocity vector field in two parts, one part which satisfies the boundary conditions and one part vanishing on the boundary. The part of the velocity function satisfying the boundary condition can be set equal to a given function times a scalar variable depending only on the time. By taking the given function as the solution of a Stokes problem many proofs of existence and uniqueness are greatly simplified and the techniques of R. Temam [Tem84] and V. Girault and P.–A. Raviart [GR86] are easily applied.

We also show the existence of a compact invariant set towards which all solutions of the weak Navier Stokes equations converge. It will be shown that the Hausdorff dimension of this set is finite and that the dimension depends mainly on the given pressure at the boundary and the viscosity.

We present a numerical Galerkin scheme using divergence free vector functions as basis functions of a finite dimensional space S^{2m} to approximate the weak Navier Stokes equations. Furthermore we introduce a decomposition of the approximation space into two subspaces, S^m and W^m, where W^m is spanned by a set of divergence free pre–wavelet functions. We will propose several nonlinear Galerkin schemes to approximate the solution, based on the fact that the part of the solution in W^m is much smaller than the one in S^m.