

Diss. ETH No. 11432

Dominik Gruntz

On Computing Limits in a Symbolic Manipulation System

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZÜRICH

for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
Dominik Wolfgang Gruntz
Dipl. Informatik-Ing. ETH
born May 26, 1964
citizen of Basel-Stadt, BS



CatE

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. G. H. Gonnet, examiner
Prof. Dr. M. Bronstein, co-examiner
Dr. J. Shackell, co-examiner

1996

Zusammenfassung

In dieser Dissertation stellen wir einen Algorithmus zum Berechnen von einseitigen Grenzwerten vor. Das Bestimmen von Grenzwerten wird in einem Computeralgebra-System in vielen Algorithmen benötigt, etwa beim Berechnen endlicher Integrale oder aber um qualitative Informationen über eine Funktion zu erhalten.

Der Algorithmus, der vorgestellt wird, ist sehr kompakt, einfach zu verstehen und einfach zu implementieren. Zudem löst er das sogenannte Auslöschungsproblem, unter dem andere, klassische Ansätze leiden. Der Schlüssel liegt darin, dass eine Funktion als ganzes betrachtet in eine Reihe entwickelt wird, und zwar in jenem Teilausdruck, der alle anderen dominiert. Mit diesem Ansatz unterscheidet sich unser Algorithmus von allen anderen auf Reihenentwicklung basierten Algorithmen, die normalerweise einen rekursiven Ansatz über die Struktur der gegebenen Funktion verwenden. Hier müssen bei allen Approximationen stets exakte Restglieder mitgeführt werden, damit das Problem der gegenseitigen Auslöschung von Termen gelöst werden kann, und dies kann sich beim Berechnen von Grenzwerten unangenehm bemerkbar machen (intermediate expression swell). Unser Ansatz umgeht diese Probleme und eignet sich daher besonders zur Implementation in Computeralgebra-Programmen.

Im ersten Kapitel werden ältere Ansätze diskutiert, welche immer noch die Basis von in aktuellen Computeralgebra-Systemen eingebauten Grenzwertberechnungsalgorithmen bilden. Danach präsentieren wir unseren Algorithmus detailliert anhand von exp-log Funktionen und vergleichen ihn mit anderen aktuellen Algorithmen und Ansätzen zur Berechnung von Grenzwerten von exp-log Funktionen.

In einem weiteren Kapitel zeigen wir, wie der Algorithmus für weitere Funktionen erweitert werden kann. Diese Erweiterungen sind so gestaltet, dass sie einfach in heutigen Computeralgebra-Programmen implementiert werden können. Obwohl wir dabei einen sehr pragmatischen Ansatz verfolgt haben, hat sich herausgestellt, dass sehr viele Funktionen damit behandelt werden können.

Des weiteren stellen wir einen Algorithmus zur Berechnung von (verallgemeinerten, hierarchischen) asymptotischen Reihen vor, der auf unserem Algorithmus zur Berechnung von Grenzwerten aufbaut. Dieser Algorithmus wird kurz diskutiert und an Beispielen demonstriert.

In einem letzten Kapitel gehen wir schliesslich auf spezielle Probleme bei der Implementation in einem Computeralgebra-Programm ein und stellen eine Implementation des Algorithmus in MAPLE vor. Diese Implementation wird dann anhand von Beispielen mit Grenzwertalgorithmen in anderen Computeralgebra-Systemen verglichen.

Abstract

This thesis presents an algorithm for computing (one-sided) limits within a symbolic manipulation system. Computing limits is an important facility, as limits are used both by other functions such as the definite integrator and to get directly some qualitative information about a given function.

The algorithm we present is very compact, easy to understand and easy to implement. It also overcomes the cancellation problem other algorithms suffer from. These goals were achieved using a uniform method, namely by expanding the *whole* function into a series in terms of its most rapidly varying subexpression instead of a recursive bottom up expansion of the function. In the latter approach exact error terms have to be kept with each approximation in order to resolve the cancellation problem, and this may lead to an intermediate expression swell. Our algorithm avoids this problem and is thus suited to be implemented in a symbolic manipulation system.

After discussing older approaches which are still prevalent in current computer algebra systems we present our algorithm in the context of exp-log functions. The algorithm is then compared with other approaches to compute limits of exp-log functions.

We show then how the algorithm can be extended to larger classes of functions. This extension has been designed in the spirit of symbolic manipulation systems, i.e., we have tried to find an algorithm which can easily be implemented in today's computer algebra systems. Although a very pragmatic approach is used for this extension, it turns out that many functions can be covered.

Furthermore we present an algorithm for computing hierarchical asymptotic series, which is based on our limit computation algorithm. This algorithm is discussed and results are presented.

In a final chapter we focus on some particular problems which appear during an actual implementation in a symbolic manipulation system. We show an implementation of the algorithm in MAPLE and compare it on a set of examples with other implementations of limit algorithms in other symbolic manipulation systems.