Convergence of finite difference methods applied to initial-boundary value problems for nonlinear hyperbolic-parabolic systems

Author(s):
Bodenmann, Rudolf Paul

Publication Date:
1996

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001646818

Diss. ETH No. 11670

Convergence of Finite Difference Methods Applied to Initial-Boundary Value Problems for Nonlinear Hyperbolic-Parabolic Systems

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
RUDOLF PAUL BODENMANN
Dipl. Math. ETH
born 16th July 1968
citizen of Urnäsch AR and Australia

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. R. Jeltsch, examiner
Prof. Dr. J. Marti, co-examiner

1996

Abstract

A technique to prove convergence of finite difference schemes applied to initial-boundary value problems for nonlinear hyperbolic-parabolic systems of partial differential equations is presented in this thesis.

The hyperbolic-parabolic systems have smooth coefficients and the initial and boundary data are chosen such that the respective initial-boundary value problem is well posed. Thus, a unique smooth solution exists locally.

The time dependent problems are discretised with finite difference methods. We distinguish two cases: the compact schemes and general high order methods. The compact methods are chosen such that the solution can be computed by using only the given data. Usually, such a scheme is only first order accurate. High order methods use wider stencils and thus, artificial boundary conditions have to be introduced.

Convergence is proved by applying a linearisation technique. First, we construct a function which is high order consistent with the scheme, the pilot function. Linearising the scheme at the pilot function and proving stability of this linearisation leads to a local stability estimate for the nonlinear scheme. Convergence then follows in analogy to Lax's equivalence theorem for linear problems, which states that 'stability is equivalent to convergence' provided that some consistency assumption holds.

The pilot function is constructed by taking the analytical solution and adding higher order error terms. These terms are smooth functions and, in the case of high order methods, boundary layer terms which depend on the reciprocal of the step size.

To prove stability of the linearised scheme, we apply the energy method. To do so, it is necessary to have a summation-by-parts formula. For the high order methods, the boundary conditions have to be chosen appropriately to make summation-by-parts possible. Having energy estimates for the space discretisations, we can prove stability of the overall schemes, i.e. the semi-discrete problems integrated with the implicit Euler method or with an implicit high order Runge-Kutta method.

Finally, it follows that the numerical solution of the compact methods converge at first order to the analytical solution. For the high order method, treated in this thesis as an example, we prove second order convergence.

Kurzfassung

In dieser Dissertation wird ein Argument vorgestellt, um die Konvergenz finiter Differenzenverfahren für Anfangsrandwertaufgaben zu nichtlinearen hyperbolisch-parabolischen Systemen von partiellen Differentialgleichungen zu beweisen.

Die betrachteten hyperbolisch-parabolischen Systeme haben glatte Koeffizienten und die Anfangs- und Randdaten werden so gewählt, dass das jeweilige Anfangsrandwertproblem gut gestellt ist und daher lokal eine eindeutige Lösung besitzt.

Die zeitabhängigen Probleme werden mit finiten Differenzenverfahren diskretisiert. Wir unterscheiden zwei Fälle: Die kompakten Verfahren und allgemeine Methoden höherer Ordnung. Die kompakten Verfahren werden so konstruiert, dass die physikalischen Randbedingungen ausreichen, um die numerische Lösung zu berechnen. Ein solches Verfahren ist im allgemeinen von erster Ordnung. Weil Verfahren höherer Ordnung in der Regel einen breiteren Differenzenstern besitzen, müssen hier künstliche Randbedingungen eingeführt werden.

Um Konvergenz nachzuweisen, wenden wir eine Linearisierungstechnik an. Zunächst wird eine Funktion definiert, die von hoher Ordnung konsistent ist mit dem Verfahren, diese nennen wir Pilotfunktion. Das Verfahren wird an der Pilotfunktion linearisiert, und wir können Stabilität für das so erhaltene lineare Verfahren nachweisen. Aus der linearen Stabilität erhalten wir lokal eine Stabilitätsungleichung für das nichtlineare Verfahren. Konvergenz folgt dann in Analogie zum Äquivalenztheorem von Lax für lineare Probleme, welches besagt, dass, Konsistenz vorausgesetzt, Stabilität äquivalent ist mit Konvergenz.

Die Pilotfunktion besteht aus der exakten Lösung des analytischen Problems und Korrekturtermen höherer Ordnung. Diese sind glatte Funktionen und, im Fall der Verfahren höherer Ordnung, Grenzschichtterme, welche vom Kehrwert der Schrittweite abhängen.

Für den Nachweis der linearen Stabilität wenden wir die Energiemethode an. Zu diesem Zweck benötigen wir eine partielle Summationsformel; diese ist für kompakte Verfahren immer gegeben. Bei den Verfahren höherer Ordnung müssen hingegen die numerischen Randbedingungen geeignet gewählt werden. Mit Hilfe der Energieabschätzungen für die Raumdiskretisierungen erhalten wir Stabilität der vollen Diskretisierungen, die sich aus den semidiskreten Problemen ergeben, wenn in der Zeit mit einem impliziten Euler- oder einem geeigneten impliziten Runge-Kutta-Verfahren höherer Ordnung integriert wird.

Es folgt, dass die numerische Lösung, berechnet mit einem kompakten Verfahren, mit erster Ordnung gegen die analytische Lösung konvergiert. Für das Verfahren, welches wir in der vorliegenden Dissertation als Beispiel eines Verfahrens höherer Ordnung untersuchen, erhalten wir Konvergenz von zweiter Ordnung.