Optimal binary space partitions for orthogonal objects

Author(s):
Viet Hai, Nguyen

Publication Date:
1996

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001696082

DISS. ETH No. 11818

Optimal Binary Space Partitions for Orthogonal Objects

A dissertation submitted to the
Swiss Federal Institute of Technology
(ETH)
Zürich

for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
Nguyen Viet Hai
MSc. Comp. Sci., Asian Institute of Technology

born March 24, 1962
citizen of Vietnam

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. P. Widmayer, examiner
Prof. Dr. E. Welzl, co-examiner

1996

Abstract

In this thesis we study efficient geometric algorithms and data structures which are essential for the implementation of spatial databases and computer graphics. We focus on the basic problem of partitioning the data space in order to support divide-and-conquer algorithms.

For geometric problems, where the input is a set of objects in space, a variation of the divide-and-conquer paradigm, which has recently attracted much research effort, is the binary space partition technique. In a binary space partition, a hyperplane divides the object space into two subspaces, each of which can then be divided recursively, until all objects are separated.

We start by looking at the problem of computing a balanced cut for a set S of axes-parallel hyperrectangles in $\mathbb{R}^d$ and its applications to the construction of balanced binary space partitions for S. The reason we consider hyperrectangles in $\mathbb{R}^d$ is simple. In geographic information systems and computer graphics, a frequently used technique for obtaining an approximate representation of geometric data is the bounding-box method. In this model, the bounding boxes of geometric objects are used as geometric keys for accessing and organizing geometric data in a spatial access structure. We give an optimal algorithm to compute the best possible balanced cuts for S. The complexity bound on balanced cuts derived in our analysis for the set of hyperrectangles can be generalized to any set of convex d-dimensional objects. We then consider the problem of constructing a binary space partition of small size for a set S of n d-dimensional axes-parallel non-overlapping hyperrectangles. In general, it is impossible to obtain a binary space partition of linear size for S even in $\mathbb{R}^3$. Therefore, it is interesting to look for special cases in which a binary space partition of linear size exists. We show that if the hyperrectangles of the set S satisfy a so-called r-boundedness property, then there is always a binary space partition tree of linear size for S. This result is extended to a class of convex r-bounded objects in $\mathbb{R}^d$.

We further investigate a generalization of balanced cutting and binary space partitioning to facilitate the design of divide and conquer algorithms for solving geometric problems on rectangles. In particular, we consider the problem of computing a staircase separator for a set S of n axis-parallel, disjoint rectangles in the plane. We present new upper bounds on the quality of staircase separators and we propose efficient sequential and optimal parallel algorithms for computing these staircase separators. One interesting application of a result on staircase separators is that a rectilinear binary space partition tree for S can be constructed in optimal $\Theta(n \log n)$ time, an improvement of a factor of $\log n$ over previously known algorithms.

Finally, we study the free space partitioning problem and present a simple and elegant proof of a formula on the number of rectangles in a minimum free space partitioning. The formula is the main key to deriving a polynomial time algorithm for computing a minimum free space partition of a rectilinear layout.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir effiziente geometrische Algorithmen und Datenstrukturen, die wesentliche Grundlage sind zur Implementation von räumlichen Datenbanken und sowie in der Computergraphik. Speziell betrachten wir das Problem der Partitionierung des Datenraumes, um divide-and-conquer-Algorithmen zu unterstützen.

Im allgemeinen ist bei geometrischen Problemen eine Menge von Objekten im Raum gegeben. Eine Variante des divide-and-conquer-Paradigmas hierfür ist das Prinzip der binären Raumpartitionierung (binary space partition, kurz BSP). Bei dieser Technik teilt eine Hyperebene den Datenraum in zwei Unterräume, die jeweils wieder solange rekursiv geteilt werden, bis jedes Objekt separiert ist.

Wir beginnen mit dem Problem, einen balancierten Schnitt für eine Menge S von achsenparallelen Rechtecken im $\mathbb{R}^d$ zu berechnen und studieren Anwendungsmöglichkeiten hiervon zur Konstruktion von balancierten BSPs für S. Der Grund für das Betrachten von Hyperrechtecken ist einfach: In geographischen Informationssystemen und in der Computergraphik werden zur approximativen Repräsentation von geometrischen Daten häufig die kleinsten diese umgebenden Rechtecke benutzt, die sogenannten bounding boxes. Dabei dienen die bounding boxes von geometrischen Objekten als Schlüssel zum Zugriff und zur Organisation der Daten in einer räumlichen Zugriffsstruktur. Wir entwickeln einen optimalen Algorithmus, um den besten balancierten Schnitt für S zu berechnen. Die entwickelte Komplexitätsschranke für balancierte Schnitte kann auf eine beliebige Menge von konvexen d-dimensionalen Objekten verallgemeinert werden. Danach betrachten wir das Problem, eine kleine BSP zu berechnen für eine Menge S von n d-dimensionalen achsenparallelen Hyperrechtecken, die sich nicht überlappen. Im allgemeinen ist es schon im $\mathbb{R}^3$ nicht möglich, eine BSP linearer Grösse für S zu berechnen, aber es gibt Spezialfälle, in denen trotzdem eine lineare BSP existiert. Wir zeigen, falls, die Hyperrechtecken der Menge S sogenannt r-gebunden sind, dann existiert immer eine lineare BSP. Daraus folgt direkt die Existenz einer BSP linearer Grösse für eine Klasse von konvexen Objekten im $\mathbb{R}^d$, vorausgesetzt, dass die bounding boxes der Objekte r-gebunden sind und keine k bounding boxes einen gemeinsamen inneren Punkt haben.

Weiterhin zeigen wir eine Verallgemeinerung der Technik des balancierten Schnittes und der BSP zur Erleichterung des Designs von divide-and-conquer-Algorithmen auf Rechtecken, z.B. für das Finden eines rechtwinkligen kürzesten Pfades. Speziell betrachten wir das Berechnen eines staircase separators für eine Menge S von n achsen-parallelen disjunkten Rechtecken in der Ebene. Wir zeigen neue obere Schranken für die Güte eines staircase separators für eine Menge S von n achsen-parallelen disjunkten Rechtecken in der Ebene und geben effiziente sequentielle und optimale parallele Algorithmen zur Berechnung solcher staircase separators. Eine interessante Anwendung dieser Resultate ist, dass das rechtwinklige BSP für S in der Zeit $\Theta(n \log n)$ berechnet werden kann. Das ist optimal und gleichzeitig eine Verbesserung der bisher bekannten Komplexität um den Faktor $\log n$.

Schliesslich betrachten wir noch ein weiteres Partitionierungsproblem, das sogenannte free space partitioning problem. Wir zeigen einen einfachen und eleganten Beweis einer Formel über die Anzahl der Rechtecke in einer minimalen free space Partionierung. Diese Formel ist der Hauptschlüssel zur Entwicklung eines polynomialen Algorithmus zur Berechnung einer minimalen free space Partionierung in einer rechtwinkligen Umgebung.