

Diss. ETH ex. B

Diss. ETH No. 11891

**On the Solution of a Reduced Form of
the Navier-Stokes Equations (PNS)
for Internal Incompressible Flows**

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
DOCTOR OF TECHNICAL SCIENCES

presented by

MARTIN SCHOLTYSIK

Dipl. Masch.-Ing. ETH
born July 10, 1964
citizen of Niederdorf (BL)



accepted on the recommendation of
Prof. Dr. T.K. Fanneløp, examiner
Prof. Dr. G. Yadigaroglu, co-examiner
Prof. Dr. B. Müller, co-examiner

October 1996

Abstract

A space marching method is developed to solve a reduced (parabolised) form of the 3D steady Navier-Stokes equations for internal incompressible flows. Finite differences and a collocated variable arrangement are used to discretise the equations.

Two alternatives are presented in this work, a single-pass method and a multiple-pass method. The single-pass method involves an approximation of the streamwise pressure gradient and computes the entire flow field with only one pass through the spatial domain. The approximation limits the applicability of the method to slender flows. The multiple-pass method needs the storage of the complete 3D pressure field but does not approximate the streamwise pressure gradient. Repeated passes through the domain are required to find the solution.

The method includes a new scheme to solve the incompressible 2D and reduced 3D Navier-Stokes equations. The procedure combines a high-order upwind scheme often used for compressible flows (real or artificial) with the concept of a pressure-correction equation. In this approach, denoted artificial pressure diffusion (APD), the time derivative of the Laplacian of the pressure is introduced in the continuity equation. In the steady state, all time derivatives vanish and the unmodified continuity and momentum equations are satisfied. Two alternatives of the new scheme are presented, the segregated approach and the fully-coupled approach. The same spatial discretisation is used for both methods. The segregated approach is similar to the SIMPLEC method. No momentum interpolation or artificial dissipation is needed. The fully-coupled approach solves the modified continuity and the momentum equations as one implicit system similar to the artificial compressibility method. The system of linear equations is solved with a LU-SGS solver. Satisfactory rate of convergence is obtained.

The effects of turbulence are modelled with the simple algebraic *Baldwin-Lomax* turbulence model, modified for corner flows.

The new computer code has been tried on several test cases. The 2D laminar driven square cavity (*Re*-numbers from 100 to 10'000) shows very good agreement with other computations found in the literature. The developing flow

in a square duct of constant cross section and curvature at different *Dean*-numbers is used as test case for the 3D formulation.

The present study includes a detailed comparison with the experimental data obtained in the boundary-layer channel of the Institute of Fluid Dynamics at the ETH Zürich. The channel was designed to investigate the effect of lateral convergence/divergence of the streamlines at the edge of the boundary layer in the absence of a streamwise pressure gradient. The solution of the present method is also compared to the boundary-layer solution and the solutions of the compressible thin-layer Navier-Stokes equations.

The methods developed herein give good prediction for both the divergent and the convergent case. The boundary-layer method fails in the case of the convergent flow. Good agreement is found with the compressible Navier-Stokes method in general. The turbulence model limits the accuracy of the solutions obtained.

Zusammenfassung

Eine räumlich fortschreitende Rechenmethode zur Lösung der reduzierten (parabolisierten) inkompressiblen 3D Navier-Stokes Gleichungen wird vorgestellt. Die Differentialgleichungen werden mit finiten Differenzen diskretisiert. Geschwindigkeit und Druck werden an der gleichen Stelle in Raum gespeichert.

Es werden zwei Varianten der Rechenmethode vorgestellt. Die erste Variante löst die Grundgleichungen mit einem einzigen Durchgang durch das Rechengebiet unter Verwendung einer Näherung für den Druckgradienten in Hauptstromrichtung. Die zweite Variante kommt ohne diese Näherung aus, setzt aber die Speicherung des gesamten 3D Druckfeldes voraus. Hier muss das Rechengebiet mehrfach durchlaufen werden, bis die Lösung gefunden ist.

Beide Varianten verwenden zur Lösung der 2D sowie der vereinfachten 3D Navier-Stokes Gleichungen ein neues Verfahren mit Namen "künstliche Druckdiffusion" (APD). In diesem Verfahren werden eine Upwind Diskretisierung hoher Genauigkeit mit dem Konzept einer Projektionsmethode kombiniert. In der Kontinuitätsgleichung wird die zeitliche Ableitung vom Laplace Operator des Druckes eingeführt. Zwei Lösungsmethoden werden vorgeschlagen. In der ersten werden die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen in einem iterativen Prozess jeweils abwechselnd gelöst. Dieses gestaffelte Vorgehen ist ähnlich wie jenes der SIMPLEC Methode. In der zweiten Lösungsmethode werden die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen zusammen als ein implizites Gleichungssystem gelöst. Dazu wird ein LU-SGS Lösungsalgorithmus verwendet, welcher voll vektorisierbar ist und eine ausreichende Konvergenzgeschwindigkeit erreicht.

Das einfache algebraische Turbulenzmodell von *Baldwin und Lomax* wird zur Modellierung der turbulenten Effekte verwendet. Zur Berechnung der Eckenströmung wird es modifiziert.

Das neu erstellte Computerprogramm wird anhand verschiedener Testfälle getestet. Die Resultate für die 2D Hohlraumströmung bei Re -Zahlen von 100 bis 10^4 zeigen sehr gute Übereinstimmung mit den Referenzlösungen der Literatur. Die 3D Gleichungen werden anhand der Strömung in einem Kanal mit

quadratischem Querschnitt und konstanter Krümmung in Hauptstromrichtung überprüft.

Die vorliegende Studie untersucht die turbulente Strömung im Grenzschichtkanal des Institutes für Fluidodynamik der ETH Zürich. Der Kanal soll den Effekt seitlicher Konvergenz/Divergenz der Stromlinien am äusseren Rand der Grenzschicht auf eine turbulente Strömung ohne Druckgradienten in Hauptstromrichtung aufzeigen. Die Resultate der vorliegenden Methode werden mit experimentellen Daten, Resultaten einer Grenzschicht Methode sowie einer kompressiblen Navier-Stokes Methode verglichen.

Die Lösung der vorliegenden Methode stimmt recht gut mit den Vergleichslösungen sowie mit den Messungen überein. Gute Resultate werden auch im etwas problematischeren Fall konvergenter Aussenstromlinien erzielt, bei dem die Grenzschichtmethode versagt. Das einfache Turbulenzmodell begrenzt die Genauigkeit der berechneten Strömung.