Typical and deviant behaviour of Brownian motion among Poissonian obstacles

Author(s):
Povel, Tobias

Publication Date:
1996

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001732293 →

Diss. ETH No. 11951

Typical and deviant behaviour of Brownian motion among Poissonian obstacles

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
TOBIAS POVEL
dipl. Math. ETH
born May, 15th, 1967
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof Dr. A.S. Sznitman, examiner
Prof Dr. E. Bolthausen, co-examiner

1996

Abstract

We consider a one dimensional Brownian motion moving among random traps resp. in a random potential. The traps are modeled as a Poisson point process of constant intensity $\nu > 0$, resp. the random potential is given as the sum of translations of a given fixed nondegenerate , nonnegative bounded "shape" function W at the Poisson points.

We derive in the context of the trapping environment the limiting distribution of Brownian motion with a constant drift $|h| \in (0, \nu)$ under the conditional probability measure that the particle has survived for a long time t. In contrast to the case $h = 0$, we show that both the suitably scaled as well as the unscaled process starts at resp. feels the "boundary" of the trap free region in which the particle survives for a long time.

Our second result is the derivation of a large deviation principle for the position at large times t of an "annealed" Brownian motion in a Poissonian potential in the critical spatial scale $t^{1/3}$. Here "annealed" refers to the fact that averages are both taken with respect to the path and environment measure. Our result shows in particular that the dimension $d = 1$ is "singular" in this problem in the sense that in contrast to $d \geq 2$ with critical scale $t^{d/d+2}$, treated by Sznitman, the rate function exhibits three different regimes, depending where the position of the path at time t lies. In particular in $d = 1$ the rate function depends on a constant $c_1 = (\frac{\pi^2}{\nu - \beta_0(1)})^{1/3}$, where $\beta_0(1)$ is the one dimensional "annealed Lyapounov exponent" introduced by Sznitman. This constant c_1 marks one of the "borders" in the three different scenarios of Brownian motion in a Poissonian potential, which performs a "large excursion" in the $t^{1/3}$ scale.

It is known that $\beta_0(1) \leq \nu$, and we show that at least for shape functions W with small enough "area" $\beta_0(1) < \nu$, which implies that in these cases $c_1 < \infty$. However we introduce the "annealed δ - Lyapounov exponent" β_δ^c, which is an analogue object to $\beta_0(1)$, and derive a formula for it which leads to the conjecture that in general we expect $\beta_0(1) < \nu$, i.e. $c_1 < \infty$.

In any case, our large deviation result has a natural application to a one dimensional annealed Brownian motion with a constant drift in a Poisson potential.

Kurzfassung

Wir betrachten eine eindimensionale Brownsche Bewegung zwischen zufälligen „tödlichen" Hindernissen resp. in einem zufälligen Potential, wobei die Hindernisse durch einen Poissonschen Punktprozess mit konstanter Intensität $\nu > 0$ modelliert werden. Das zufällige Potential wird wie folgt konstruiert: gegeben ist eine nichtdegenerierte, nichtnegative, beschränkte „Umriss Funktion" W mit kompaktem Träger, sowie eine Konfiguration von Poissonschen Punkten. Das Poissonsche Potential wird nun als Summe der zu den Poissonschen Punkten verschobenen Funktion W definiert. Wir berechnen den schwachen Grenzwert des bedingten Wahrscheinlichkeitsmasses einer Brownschen Bewegung mit konstanter Drift $|h| \in (0, \nu)$, konditioniert auf das Ereignis, dass das Teilchen lange Zeit zwischen den Poissonschen Hindernissen überlebt, wobei wir annehmen, dass der Prozess beim Besuch eines Hindernisses getötet wird. Im Gegensatz zu der Situation in der $h = 0$ ist, zeigen wir, dass sowohl der geeignet skalierte als auch der unskalierte Prozess am Rand desjenigen Intervalls startet, resp. diesen „fühlt", welches keine Hindernisse enthält, und in welchem der Prozess lange Zeit überlebt.

Das zweite Resultat ist die Herleitung eines „Prinzips grosser Abweichungen" für die Position Z_t nach langer Zeit t, einer eindimensionalen Brownschen Bewegung in einem Poissonschen Potential, in der kritischen räumlichen Skala $t^{1/3}$, wobei wir bzgl. des Poissonschen Masses als auch des Pfadmasses mitteln. Unser Resultat zeigt insbesondere, dass die Dimension $d = 1$ in diesem Problem „singulär" ist, denn im Gegensatz zum Fall $d \geq 2$ mit kritischer Skala $t^{d/d+2}$, welcher von Sznitman behandelt wurde, weisst die Ratenfunktion drei verschiedene Bereiche auf, je nachdem, wo sich der Pfad zur Zeit t befindet. Diese Bereiche werden durch die Konstanten $c_0 = (\frac{\pi^2}{\nu})^{1/3}$ und $c_1 = (\frac{\pi^2}{\nu - \beta_0(1)})^{1/3}$ begrenzt, wobei $\beta_0(1)$ der von Sznitman eingeführte eindimensionale „gemittelte" Lyapunov-Exponent ist. Es ist bekannt, dass $\beta_0(1) \leq \nu$, und wir zeigen für Umrissfunktionen W mit genügend kleiner „Fläche": $\beta_0(1) < \nu$, d. h. $c_1 < \infty$. Wir führen den „gemittelten δ-Lyapounov-Exponenten" β_δ^c ein, welcher eine analoge Grösse zu $\beta_0(1)$ ist, und leiten eine Formel für β_δ^c her, welche zur Vermutung führt, dass im allgemeinen $\beta_0(1) < \nu$, d. h. $c_1 < \infty$ ist.

Auf jeden Fall hat das obige „Prinzip der grossen Abweichungen" eine natürliche Anwendung auf das Problem einer Brownschen Bewegung mit konstanter Drift in einem Poissonschen Potential.