Diss. ETH No. 11928

Asymptotic Completeness of N-Body Quantum Systems with Long-Range Interactions

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH
(ETH Zürich)

for the degree of
Doctor of Natural Sciences

presented by
Daniel Schenker, Dipl. Phys. ETH
born December 7, 1964
citizen of Walterswil SO

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. G. M. Graf, examiner
Prof. Dr. W. Hunziker, co-examiner

1996

Abstract

In this thesis, asymptotic completeness of N-body quantum systems with long-range potentials

$$V(x) = \mathrm{O}(|x|^{-\mu}) \quad (|x| \to \infty), \qquad \mu > 3/4,$$

is proven. Figuratively speaking this means that for large times stable clusters of particles — *e.g.* atoms or molecules — are formed, and their interaction involves only the center-of-mass motions of the clusters.

Our result is not completely new, for it has been already shown by Derezinski for $\mu > \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$, and by Sigal and Soffer for $\mu \geq 1 - 2^{-N-2}$. However, in our opinion the proof presented here is clearer and simpler than the ones cited above.

This work has been inspired by a new proof of asymptotic completeness for short-range systems of Walter Hunziker, which is reflected in the strategy:

The proof is by induction in subsystems. Since the particles in the long-range case can not be asymptotically free, time dependent potentials $W_a(x;t)$ are generated in a natural way by the induction step. To make the statement of asymptotic completeness close under induction, we couple the autonomous system in question from the very first to an auxiliary, otherwise free particle with configuration space Y by means of a time-dependent potential $W(x,y;t)$.

To perform the induction step we have to tell states where asymptotically at least two clusters separate ballistically, from states which have no ballistic component. To do so we use an asymptotic observable γ^+, which is obtained by the Heisenberg derivative γ_t of a time-scaled Yafaev function g_t,

$$g_t(x) = t^\delta g(t^{-\delta}x),$$

and whose existence for certain δ is proven in Section 5. Moreover, we show that γ^+ is in fact independent of the parameter δ, provided it is admissible. Intuitively this means, that there are no states which (asymptotically) propagate as $x(t) \sim t^\delta$, with δ admissible. This observation is crucial for the proof, for it allows us to optimize δ seperately when investigating the behaviour of states in $\operatorname{Ran}\gamma^+$ as well as when investigating that of states in $\operatorname{Ker}\gamma^+$.

States in $\operatorname{Ran}\gamma^+$ are superpositions of states, which for large times consist of at least two clusters, *i.e.*, which are asymptotically a-clustered with $\#a \geq 2$. Since the individual clusters in such states asymptotically separate ballistically, the intercluster interaction I_a may be multiplied with a sub-ballistic cutoff $\chi(|x|_a > t^{1-\epsilon})$, *i.e.*, replaced by a time-dependent potential W_a, decaying explicitly in t. Mathematically this is described by the existence of the Deift–Simon wave operators $\mathcal{W}_a$, which will be proven in Section 5 assuming δ is big enough ($\delta \geq 1 - \epsilon$). Using then the induction hypothesis on $\operatorname{Ran}\mathcal{W}_a$

shows that states in $\operatorname{Ran}\gamma^+$ *are in fact scattering states, i.e.,* asymptotic completeness holds on $\operatorname{Ran}\gamma^+$ (Section 7).

On the other hand, states in $\operatorname{Ker}\gamma^+$ are (asymptotically) bound. This property, which is a more or less direct consequence of the Mourre estimate in the short-range case, is in fact the "hard part" in the long-range case. The particular problem which has to be solved is to show that the original system and the auxiliary particle asymptotically decouple, respectively that (asymptotically) $W(x, y; t)$ can be replaced by $W(0, y; t)$. Heuristically, this can be done if $|x| \approx g_t$ does not grow too fast along Schrödinger trajectories. Indeed, in Section 6 we will show that, roughly speaking, $0 \leq g_t(x(t)) \lesssim t^{\delta'}$ on $\operatorname{Ker}\gamma^+$ for some $\delta' < \mu$, provided $\mu > 3/4$. With the help of this estimate we are able to prove the "decoupling" above and therewith asymptotic completeness on $\operatorname{Ker}\gamma^+$ (Section 7).

Kurzfassung

In dieser Dissertation wird gezeigt, dass N-Körper Quantensysteme mit langreichweitigen Potentialen

$$V(x) = O(|x|^{-\mu}) \quad (|x| \to \infty), \qquad \mu > 3/4,$$

asymptotisch vollständig sind. Bildlich gesprochen bedeutet dies, dass sich für grosse Zeiten stabile Cluster von Teilchen — z.B. Atome oder Moleküle — bilden, deren gegenseitige Wechselwirkung nur noch die Schwerpunktbewegungen der Cluster involviert.

Dieses Resultat ist nicht ganz neu, wurde es doch schon von Derezinski für $\mu > \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$, und von Sigal und Soffer für $\mu \geq 1 - 2^{-N-2}$ gezeigt. Wir sind jedoch der Ansicht, dass der hier präsentierte Beweis klarer und einfacher ist als die oben zitierten Arbeiten.

Inspiriert wurde diese Arbeit durch einen neuen Beweis Asymptotischer Vollständigkeit kurzreichweitiger Systeme von Walter Hunziker, was sich auch in der Strategie niederschlägt:

Wir führen den Beweis via Induktion in Subsystemen. Da die Teilchen im langreichweitigen Fall nicht asymptotisch frei sein können, werden durch den Induktionsschritt auf eine natürliche Art zeitabhängige Potentiale $W_a(x;t)$ erzeugt. Damit die Behauptung Asymptotischer Vollständigkeit unter Induktion schliesst, koppeln wir von Anfang an das ursprüngliche, autonome System durch ein zeitabhängiges Potential $W(x, y; t)$ mit einem weiteren, sonst freien Teilchen mit Konfigurationsraum Y.

Um den Induktionsschritt auszuführen, müssen Zustände, bei denen sich asymptotisch mindestens zwei Cluster ballistisch voneinander entfernen, von andern Zuständen unterschieden werden können. Dazu benützen wir die asymptotische Observable γ^+, welche aus der Heisenberg-Ableitung γ_t einer zeitlich skalierten Yafaev-Funktion g_t,

$$g_t(x) = t^{\delta} g(t^{-\delta} x),$$

gewonnen wird, und deren Existenz für bestimmte δ in Abschnitt 5 bewiesen ist. Dabei zeigt sich, dass γ^+ effektiv unabhängig vom Parameter δ ist, solange dieser überhaupt zulässig ist. Anschaulich bedeutet dies, dass es keine Zustände gibt, welche (asymptotisch) gemäss $x(t) \sim t^{\delta}$, δ zulässig, propagieren. Diese Beobachtung ist entscheidend für den Beweis, erlaubt sie uns doch bei der Behandlung von Zuständen in $\operatorname{Ran} \gamma^+$ und $\operatorname{Ker} \gamma^+$ beide Male δ optimal zu wählen.

Zustände in $\operatorname{Ran} \gamma^+$ setzen sich aus Zuständen zusammen, welche für grosse Zeiten aus mindestens zwei Clustern bestehen, d.h., asymptotisch "a-clustered" sind mit $\#a \geq 2$. Da sich bei solchen Zuständen die einzelnen Cluster asymptotisch ballistisch entfernen, kann die Intercluster-Wechselwirkung I_a mit einem sub-ballistischen Cutoff $\chi(|x|_a > t^{1-\epsilon})$ multipliziert, d.h. durch ein zeitabhängiges Potential W_a, welches explizit in t abfällt, ersetzt werden. Dieser Sachverhalt wird mathematisch durch die Existenz der Deift–Simon

Wellenoperatoren $\mathcal{W}_a$ beschrieben, welche ebenfalls in Abschnitt 5 für grosse δ ($\delta \geq 1-\epsilon$) bewiesen ist. Die Anwendung der Induktionsvoraussetzung auf Zustände in Ran $\mathcal{W}_a$ zeigt dann, dass Zustände in Ran γ^+ effektiv Streuzustände sind, d.h., dass Asymptotische Vollständigkeit auf Ran γ^+ gilt (Abschnitt 7).

Zustände in Ker γ^+ hingegen sind (asymptotisch) gebunden. Diese Aussage, welche im kurzreichweitigen Fall mehr oder weniger direkt aus der Mourreschen Ungleichung folgt, ist im langreichweitigen Fall der "harte Teil". Die besondere Schwierigkeit dabei ist zu zeigen, dass das ursprüngliche System und das zusätzlich eingeführte Teilchen asymptotisch entkoppeln, respektive dass (asymptotisch) $W(x,y;t)$ durch $W(0,y;t)$ ersetzt werden kann. Heuristisch kann dies getan werden, falls $|x| \approx g_t$ entlang einer Schrödinger-Trajektorie nicht allzu rasch wächst. Tatsächlich zeigen wir in Abschnitt 6 dass, grob gesagt, $0 \leq g_t(x(t)) \lesssim t^{\delta'}$ auf Ker γ^+ für ein $\delta' < \mu$, vorausgesetzt $\mu > 3/4$. Mit Hilfe dieser Abschätzung kann dann obige "Entkopplung" (Abschnitt 6) und damit Asymptotische Vollständigkeit auf Ker γ^+ (Abschnitt 7) bewiesen werden.