

**Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums
komplexer, reparierbarer Systeme**

ABHANDLUNG

Zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

RALPH BEAT BRINKMANN

Dipl. El.-Ing. ETH
geboren am 13. April 1962
von Solothurn

Angenommen auf Antrag von:

Prof. Dr. A. Birolini, Referent
Prof. Dr. J. Hugel, Korreferent



1997



00100003216355

Den Herren Professor Dr. A. Birolini, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, und Dr. B. Gerlach, Humboldt - Universität in Berlin, möchte ich meinen Dank aussprechen. In zahlreichen Diskussionen haben sie mit zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen.

Herrn Professor Dr. J. Hugel, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, möchte ich für die Übernahme des Korreferats danken.

Der Firma Georg Fischer Rohrleitungssysteme AG in Schaffhausen danke ich für die mir gewährte Unterstützung.

Duane, Prince of Faultland

Folio 1635
Act III, Scene I
enter Duane

Duane's soliloquy

To fail, or not to fail, — that is the question: —
Whether 'tis better in the field to suffer
The losses and breakdowns of degraded systems,
Or to take specs against a sea of low bids,
And by exposing end them? — To flaw, to fault, —
No more; any by a fault to say we end
The defects and the thousand natural stress's
That parts are heir to, — 'tis a distribution
Devoutly to be wish'd. To work, — to live, —
To live! perchance to work: — ah, there's the goal;
For in that cage of cards what fault may come,
When I have discarded this wornout card,
Must give me pause: there's the wearout
That makes calamity of my growth curve;
For who would bear the failure modes of
Over-stress'd parts, the failure mechanisms,
The fears of 217'd parts, the Curve's Decay,
The transients of systems, and the spurns
Of good designs by corrupted managements,
When they themselves might their quietus make
With an ESD? what parts could survive,
To shake and roll under combat flight
But that the dread of something after flight, —
The electronic graveyard, from whose die
No component returns, — puzzles their fate,
And makes them rather bear those faults we have
Than end up in failure analysis?
Thus even do some parts even wearout in infancy;
And thus the exponential distribution
Is cast full of flaws and flagellations;
As new generations of circuitry,
With half-micron, megabit memories,
Fail in synchronicity. —

Ralph Stannard
1985 June 2
[Stan85]

**Meinen Eltern,
meiner Frau
und
meinen beiden
Kindern**

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	1
Summary	3
1. Einleitung, Problemstellung	5
2. Grundlagen zum Begriff des Zuverlässigkeitswachstums	7
2.1. Historische Entwicklung	7
2.2. Testdatenerfassung und Ausfallklassifizierung	8
2.3. Managementaspekte	9
2.4. Modellierung reparierbarer Systeme	9
3. Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums	11
3.1. Bekannte Modelle	11
3.1.1. Deterministische Modelle	13
3.1.1.1. Modell nach Duane	13
3.1.1.2. Weitere deterministische Modelle	16
3.1.2. Stochastische Modelle	18
3.1.2.1. Modelle basierend auf dem inhomogenen Poisson-Prozess	18
3.1.2.1.1. AMSAA-Modell	18
3.1.2.1.2. Modifiziertes AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell	24
3.1.2.1.3. Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell	28
3.1.2.1.4. Lewis/Shedler-Modell	32
3.1.2.1.5. Yamada/Osaki-Modell	32
3.1.2.2. Weitere stochastische Modelle	34
3.2. Auswahl der bekannten Modelle für die weiteren Untersuchungen	37
3.3. Aufstellung neuer Modelle	39
3.4. Kostenbetrachtungen	45
4. Anwendung der Modelle auf Testdaten aus der Praxis	48
4.1. Visualisierung der Testdaten	48
4.2. Entwicklung der Untersuchungsmethode	52
4.3. Erzeugung zusätzlicher Datensätze	55
4.4. Vergleich des grundsätzlichen Verhaltens	58
4.4.1. Vergleichsgrößen	58
4.4.1.1. D , W^2 und A^2	58
4.4.1.2. Maximaler Wert der Likelihood-Funktion	67
4.4.2. Vergleich anhand zusätzlich erzeugter Daten	68
4.4.2.1. Anpassungstests basierend auf der empirischen Verteilungsfunktion	68
4.5. Vergleich der Extrapolationseigenschaften	71
4.6. Schlussfolgerungen	75
5. Aufstellung einer Prozedur zur Modellauswahl	76

Anhang A: Inhomogene Poisson-Prozesse	81
Anhang B: Parameterschätzung und Anpassungstests	84
B.1. Maximum-Likelihood-Schätzung	84
B.2. Methode der kleinsten Quadrate	88
B.3. Anpassungstests für eine vollständig gegebene Verteilungsfunktion	89
B.4. Anpassungstests für eine Verteilungsfunktion mit unbekannten Parametern	90
Anhang C: Newton-Raphson-Näherungsverfahren	91
Anhang D: Datenmaterial	92
Literaturverzeichnis	96

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt einen Beitrag auf dem Gebiet der Untersuchung der Zuverlässigkeit komplexer, reparierbarer Systeme dar. Thema ist die Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums, d.h. die Modellierung der Verbesserung der Zuverlässigkeit aufgrund der Korrektur von Entwicklungs- und Konstruktionsfehlern, von Fehlern im Fertigungs- und Prüfablauf sowie aufgrund der Beseitigung von Schnittstellenproblemen, alles Fehler, die sich als Ausfälle systematischer Natur zeigen.

Neue Modelle auf der Basis des inhomogenen Poisson-Prozesses werden entwickelt, welche für die vorliegenden Datensätze eine passendere Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums als die bekannten Modelle erlauben.

Nach einer kurzen Einleitung in die Problemstellung werden die Grundlagen zum Begriff des Zuverlässigkeitswachstums dargelegt. Insbesondere wird auf die Bedeutung einer sauberen und detaillierten Testdatenerfassung und auf die Unterschiede zwischen reparierbaren und nichtreparierbaren Systemen eingegangen.

Der Übersicht über die verschiedenen Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme wird genügend Platz eingeräumt, insbesondere der Darlegung der Modelle, die auf dem inhomogenen Poisson-Prozess beruhen. Die deterministischen Modelle werden nur kurz skizziert. Die Beschreibung der stochastischen Modelle umfasst die grundlegenden Modellgleichungen sowie die Verfahren zur Schätzung der Parameter. Die Modifikation eines verbreiteten Modells führt zu einem Modell, welches zur Beschreibung von Software-Qualität vorgeschlagen wurde. Zur Schätzung der Modellparameter wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Maximum-Likelihood Methode verwendet, da die Methode der kleinsten Quadrate bei einzelnen Modellen zu unrealistischen Resultaten führt.

Als Resultat umfassender Untersuchungen werden neue Modelle auf der Basis des inhomogenen Poisson-Prozesses vorgeschlagen, welche sich auf multiplikative Kombinationen von Mittelwertfunktionen verschiedener inhomogener Poisson-Prozesse stützen. Zum Schluss der Modellbetrachtungen wird ein Kostenmodell zur Bestimmung der kostenoptimalen Dauer eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms vorgestellt.

Die neuen Modelle werden anschliessend zusammen mit den bekannten Modellen einem umfassenden Vergleich unterzogen, um ihre Praxistauglichkeit zu untersuchen. In einem ersten Schritt werden die vorhandenen Daten visualisiert. Dabei musste im Hinblick auf eine sinnvolle Auswertung ein Datensatz in zwei Zeitabschnitte unterteilt werden, da der zugrundeliegende stochastische Prozess nicht über den gesamten Datenbereich als unverändert angesehen werden konnte. Im Anschluss daran wird eine Untersuchungsmethode dargelegt, welche einen eingehenden Vergleich der Modelle ermöglicht; als Basis für den Vergleich dienen sechs Testdatensätze von Zuverlässigkeitswachstums-Programmen aus der Literatur. Da das Datenmaterial für eine aussagekräftige Untersuchung vom Umfang her gesehen ungenügend ist (es steht jeweils nur *eine* Realisierung pro stochastischem Prozess zur Verfügung), wird eine Methode entwickelt, welche die Erzeugung zusätzlicher Realisierungen der betrachteten Prozesse ermöglicht, dies unabhängig von den Modellannahmen, sondern nur auf der Basis der Original-Datensätze und der Annahme des inhomogenen Poisson-Prozesses als Beschreibung der zugrundeliegenden stochastischen Prozesse; die Methode beruht auf einem Zusammenhang zwischen dem inhomogenen Poisson-Prozess und Ordnungsstatistiken.

Die Evaluation der Modelle bezüglich ihrer Eignung zur Beschreibung des Prozesses des Auftretens von systematischen Ausfällen geschieht einerseits anhand der Vergleichsgrößen D (Kolmogorow-Smirnow Statistik), W^2 (Cramér-von Mises Statistik) und A^2 (Anderson-Darling Statistik) sowie anhand der maximalen Werte der Likelihood-Funktionen, und andererseits auf der Basis von Testverfahren (Anderson-Darling Statistik A^2), um erhärtete Aussagen zu erhalten. Der Vergleich der Modelle wird mit der Untersuchung der Extrapolationseigenschaften (statistische Vorhersage über den weiteren Verlauf aufgrund vorliegender Testdaten) abgeschlossen.

Zwei der im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen neuen Modelle erweisen sich, anhand der verwendeten sechs Testdatensätze, als den anderen Modellen überlegen in bezug auf die grundsätzliche Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums bzw. die Güte von Extrapolationen in die Zukunft.

Die Aufstellung einer Prozedur, die es dem Ingenieur in der Praxis erlaubt, für einen gegebenen Datensatz ein geeignetes Modell zu ermitteln, schliesst die Arbeit ab.

Summary

The present work gives a contribution in the field of reliability growth modeling of complex repairable systems, i.e. of the modeling of the reliability improvement as a consequence of the elimination of design, manufacturing, assembling, or testing flaws / errors, which are the cause for systematic failures.

New models based on nonhomogeneous poisson processes are developed that allow a better description of the reliability growth as with the known models, at least for six data sets given in the literature.

Following a short introduction, the concept of reliability growth is discussed, insisting on the importance of a careful registration of the test data and on the difference between repairable and non-repairable systems.

Enough room is reserved to the description of the known reliability growth models for complex repairable systems, essentially based on nonhomogeneous poisson processes. The deterministic models are only sketched roughly. For the stochastic models considered, the basic equations as well as the procedures for the estimation of the model parameters are reviewed and extended. The modification of a well known model leads to a model that was proposed for the description of software quality. For the estimation of the model parameters, maximum likelihood is used, also because the method of least squares produces unrealistic results with some models.

As a result of comprehensive investigations, new models on the basis of nonhomogeneous poisson processes are proposed. These models are based on the combination by multiplication of mean value functions of nonhomogeneous poisson processes. Also a cost model for the determination of cost-optimum duration of a reliability growth program is presented.

In a further chapter, the new models are broadly compared with the known models, among other things to examine their suitability in practice. In a first step, the available failure data is visualized. One database had to be divided in two periods with regard to a sensible interpretation, because the underlying stochastic process could not be considered as unchanged over the whole range of data. A method of examination is expounded that allows a thorough comparison of the models. The basis for the comparison is formed by six sets of test data from reliability growth programs known in the literature. Because the size of the failure data is insufficient for a reasonably good statistical investigation (only *one* realization per stochastic process is available), a method is developed that makes it possible to produce additional realizations of the considered processes (merely based on the hypothesis of the nonhomogeneous poisson process as a description of the underlying stochastic processes). The method is based on a correlation between nonhomogeneous poisson processes and order statistics.

The evaluation of the models regarding their suitability to describe the process of the occurrence of the systematic failures, is done on the one hand based on the metrics of comparison D (Kolmogorow-Smirnow statistics), W^2 (Cramér-von Mises statistics) and A^2 (Anderson-Darling statistics) as well as maximum value of the Likelihood-functions, and on the other hand based on goodness-of-fit tests (Anderson-Darling statistics A^2), to get confirmed evidence. The comparison of the models is concluded with the examination of the capacities of extrapolation, i.e. of the statistical prediction of the further development of the failure process based on the existing test data.

With regard to the six data sets used, two of the new models proposed in the present work turn out to be superior to the other models for the description of the reliability growth and for the quality of extrapolations to the future, respectively.

A procedure that allows to an engineer in the practice to find out a suitable model for an existing data set closes the present work.

1. Einleitung, Problemstellung

Die Erfahrung zeigt, dass für komplexe Systeme die Zuverlässigkeit auf Prototypenebene oft unter der Zielvorstellung liegt, dies insbesondere wenn neue Technologien verwendet werden. Zurückzuführen sind solche Abweichungen in der Regel auf Entwicklungs- und Konstruktionsfehler, auf Schnittstellenprobleme sowie Fehler im Fertigungs- und Prüfablauf. Solche Fehler verursachen systematische Ausfälle und ihre Beseitigung durch geeignete Korrekturmaßnahmen führt zu einem Wachstum der Zuverlässigkeit.

Die Aktivitäten zur Erreichung eines *Zuverlässigkeitswachstums*, auch als *TAAF* (*Test, Analyze, And Fix*) - Process bezeichnet, sind Teil der Anstrengungen zur Sicherung der Qualität und Zuverlässigkeit komplexer Systeme. Das Konzept des Zuverlässigkeitswachstums umfasst dabei folgende wesentlichen Bestandteile:

1. Erkennen von Fehlern mittels Tests.
2. Eliminierung der erkannten Probleme durch Korrekturmaßnahmen.
3. Bestätigung der Wirksamkeit der Korrekturmaßnahmen.
4. Dokumentation der Ereignisse speziell bezüglich Ursachen (Fehler) und eingeleiteter Korrekturmaßnahmen.
5. Verfolgung und Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums.

Die Tests als solche bewirken kein Zuverlässigkeitswachstum, sie stellen nur ein Hilfsmittel dar zur entsprechenden Verbesserung der Zuverlässigkeit. Die Ermittlung der Ursache und der Auftrittshäufigkeit der während eines Tests auftretenden Ausfälle soll eine Klassifizierung derselben und die Einleitung der notwendigen Massnahmen erlauben. Dabei sind folgende drei Kategorien zu unterscheiden:

1. Systematische Ausfälle: gehen auf Fehler in der Entwicklung oder Fertigung zurück, ihre Beseitigung geschieht durch entsprechende Korrekturmaßnahmen wie Design-, Komponenten- oder Prozessänderungen → Zuverlässigkeitswachstum.
2. Frühausfälle: lassen sich durch Vorbehandlung der kritischen Bauteile, Baugruppen oder Systemteile eliminieren → Verbesserung der Zuverlässigkeit, die aber *nicht* als Zuverlässigkeitswachstum bezeichnet wird, da diese nicht permanent wie im Falle der Korrektur von Fehlern ist (kann für jedes produzierte System notwendig werden).
3. Ausfälle mit konstanter (zeitunabhängiger) Ausfallrate: es wird jeweils nur eine Reparatur, d.h. ein Austausch des ausgefallenen Teils durchgeführt, ohne weitergehende Massnahmen.

Zwingende Voraussetzung für die Verfolgung eines Zuverlässigkeitswachstums ist eine detaillierte Testdatenerfassung. Diese sollte Informationen über die Zeit (normalerweise kumulative Testzeit) bis zum Auftreten eines als systematisch klassifizierten Ausfalles, die Ausfallursache (Fehler) und die entsprechende Korrekturmaßnahme enthalten.

Ein Zuverlässigkeitswachstums-Programm bedarf einer Planung und Kontrolle. Es gilt, ein Ziel für die Zuverlässigkeit zu setzen und dessen Einhaltung zu überprüfen sowie entsprechende Mittel zur Erreichung dieses Ziels zuzuteilen.

Eine mathematische Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums-Prozesses ermöglicht die Verfolgung des erreichten Zuverlässigkeitswachstums und in vielen Fällen die Abschätzung der erreichbaren Zuverlässigkeit, unter der Annahme, dass der zugrundelie-

gende stochastische Prozess unverändert über die Zeit bleibt. Eine solche Modellierung erlaubt eine grosse Reduktion der Testzeit im Vergleich zu den üblichen Methoden zur Bestimmung der Zuverlässigkeit; die statistische Auswertung erfolgt nicht separat nach jedem Ausfall, sondern die Informationen über die einzelnen Ausfallzeiten früherer Versionen des untersuchten Systems werden gesamthaft berücksichtigt, um die Zuverlässigkeit der aktuellen Version zu schätzen.

In bezug auf die Modellierung besteht grundsätzlich kein Unterschied zwischen Hardware-Zuverlässigkeits- und Software-Qualitätswachstum, da die Ursachen für die systematischen Ausfälle, nämlich die eingangs erwähnten Fehler, in beiden Fällen vorkommen können.

Nach einer kurzen Darlegung des Begriffs des Zuverlässigkeitswachstums (Kap. 2) und einer Übersicht über die verschiedenen Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme (Kap. 3) erfolgt in Kap. 4 ein Vergleich zwischen bekannten und den im Rahmen dieser Arbeit neu aufgestellten Modellen (alle basierend auf dem inhomogenen Poisson-Prozess) anhand von Testdaten aus der Praxis. Um die getroffenen Aussagen erhärten zu können, werden ausgehend von den zur Verfügung stehenden Originaldaten zusätzliche Datensätze erzeugt und diese für den Modellvergleich mit Hilfe von Anpassungstests herangezogen. Im Kap. 3 wird auch ein Kostenmodell aufgestellt, welches es erlaubt, die kostenoptimale Dauer eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms abzuschätzen. Im Kap. 5 wird ferner eine Prozedur zur Modellauswahl für eine konkrete Anwendung vorgestellt. Grundlagen zu den verwendeten stochastischen Prozessen und statistischen Verfahren sowie das dem Kapitel 4 zugrundeliegende Datenmaterial werden in den Anhängen A bis D angegeben.

2. Grundlagen zum Begriff des Zuverlässigkeitswachstums

2.1. Historische Entwicklung

In der Flugzeugindustrie wurde in den fünfziger Jahren ein Lernprozess im Laufe der Prototypen- oder Erstserienfertigung und beim Anlaufen der Serienproduktion beobachtet, indem mit steigender Produktionsstückzahl die Fertigungsprozesse immer besser beherrscht wurden. Dieser Sachverhalt wurde in Form eines deterministischen Zusammenhangs zwischen der Anzahl Stunden (oder der entsprechenden Kosten), die zur Herstellung eines bestimmten Produkts benötigt wurden (Y), und der Anzahl produzierter Einheiten (X) ausgedrückt [Wrig36]:

$$Y = K \cdot X^N = K \cdot X^{\frac{\ln B}{\ln 2}} \quad (1)$$

K entspricht hier dem Aufwand zur Herstellung des ersten Produkts und B dem Prozentsatz der Reduktion bei Verdopplung der Produktionsstückzahl ($B < 1$). Die Werte für B wurden im Bereich von 0.7 bis 0.95 ermittelt.

Im Jahre 1962 (General Electric Bericht) bzw. 1964 [Duan64] erweiterte James T. Duane diese wichtige Beziehung als erster auch auf den Zuwachs der Zuverlässigkeit im Laufe eines Entwicklungsprogramms. Bis zu dieser Veröffentlichung basierten die bekannten Techniken zur Abschätzung einer Zuverlässigkeit vor allem auf Analysen zu einem bestimmten Zeitpunkt. Änderungen der Zuverlässigkeit bedingt durch Korrekturmaßnahmen konnten somit nur durch eine vollständige Analyse nach Einführung der Verbesserungen erfasst werden. Die Informationen aus dem zeitlichen Verlauf der Fortschritte in bezug auf die Zuverlässigkeit wurden nicht verwertet. Duane fand bei seiner Untersuchung der Testdaten, die während der Entwicklung von fünf verschiedenen Systemen (komplexe hydromechanische Vorrichtungen, Flugzeuggeneratoren und Flugzeugtriebwerke) angefallen sind, vergleichbare zeitliche Änderungen in der Zuverlässigkeit, welche sich mathematisch durch einen an die Beziehung für den Produktions-Lernprozess angelehnten Zusammenhang beschreiben liessen:

$$\lambda_z = K \cdot (\Sigma H)^{-\alpha}, \quad (2)$$

wobei

$$\lambda_z = \frac{\Sigma F}{\Sigma H}$$

ΣF = kumulative Anzahl systematischer Ausfälle

ΣH = kumulative Anzahl Betriebsstunden

K = Konstante

α = Parameter.

Im doppelt-logarithmischen Massstab erscheint obige Funktion als Gerade. Die Rate, mit welcher die Zuverlässigkeit wächst, ist abhängig davon, wie schnell vorhandene Fehler ermittelt werden und wie effektiv die eingeleiteten Korrekturmaßnahmen diese Probleme beseitigen, ohne neue Quellen für Fehler einzuführen. Die obige Beziehung bleibt gültig, solange ein Programm zur Aufdeckung und Behebung von Fehlern besteht. Erstmals

wurde hiermit eine Verfolgung des Fortschritts eines Entwicklungsprogramms und die Planung von Zuverlässigkeitswachstums-Programmen ermöglicht.

Anwendungen des Modells von Duane auf Produktentwicklungen finden sich z.B. in [Beza75, Chen87, Clar79, Corm81, Imai79, Mead75, Mead77, Peac75, Poll74, Pras74]. Der Artikel von Duane war Ausgangspunkt zu verschiedenen weiteren mathematischen Modellen zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums (Übersichten z.B. enthalten in [Bala78, Dhill80, Fink88, Jaya76, Jewe86, MIL338]). Studien der Anwendbarkeit des Duane-Modells auf militärische Systeme führten zu einer Modifikation des Modells, indem der Zusammenhang zwischen der Anzahl systematischer Ausfälle und der Anzahl Betriebsstunden statistisch interpretiert wurde (AMSAA-Modell) [Crow74, 75, 78, 82]. Das AMSAA-Modell ist eines der heute am meisten benutzten Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums komplexer Systeme.

2.2. Testdatenerfassung und Ausfallklassifizierung

Grundlage für ein erfolgreiches Zuverlässigkeitswachstums-Programm ist eine saubere Testdatenerfassung und eine eindeutige Ausfallklassifizierung. Überlagert zu den *systematischen Ausfällen*, welchen nur mit geeigneten Korrekturmaßnahmen wie Design-, Komponenten- oder Prozessänderungen begegnet werden kann, treten die *Frühausfälle*, die sich durch Vorbehandlung der kritischen Bauteile, Baugruppen oder Systemteile reduzieren lassen, und die *Ausfälle mit konstanter Ausfallrate*, wo jeweils nur eine Reparatur (oder ein Austausch, ohne weitergehende Massnahmen) vorzusehen ist, auf (vgl. Kap. 1). Dies bedeutet eine Trennung zwischen den Frühausfällen, den Ausfällen mit konstanter (*zeitunabhängiger*) Ausfallrate und den systematischen Ausfällen, deren Auftretenshäufigkeit als Funktion der Entwicklungs- oder Testzeit ausgedrückt werden kann. Demnach lässt sich die Ausfallhäufigkeit des Systems als Summe dieser Einzelfaktoren darstellen.

Nur die Korrektur von Fehlern (als Ursache für systematische Ausfälle) durch technische oder operative Verbesserungen führt zu einem eigentlichen *Wachstum* der Systemzuverlässigkeit. Ist eine Korrekturmaßnahme erfolgreich, so wird damit das erneute Auftreten des entsprechenden (systematischen) Ausfalls für *alle* zu produzierenden Systeme ausgeschlossen. Eine Vorbehandlung verbessert nur die Zuverlässigkeit der Systeme, die dem entsprechenden Vorbehandlungsschritt auch tatsächlich unterzogen wurden. Eine Reparatur hingegen verhindert das zukünftige Auftreten des entsprechenden Ausfalls nicht. In diesen beiden letzten Fällen spricht man dementsprechend nicht von Zuverlässigkeitswachstum.

Ein System zur Meldung von Ausfällen und Einleitung von entsprechenden Korrekturmaßnahmen wird oft als Qualitätsdaten-System [Biro91] und im Militärbereich (USA) als *FRACAS* (Failure Reporting, Analysis, and Corrective Action System) bezeichnet [MIL2055]. Es sollen *alle* Ausfälle, die bei Tests von der Entwicklungsphase an auftreten, gemeldet, untersucht und klassifiziert werden, denn nur so kann über geeignete Korrekturmaßnahmen entschieden werden. Eine Datensammlung enthält mindestens folgende Positionen pro Ausfall:

1. Beschreibung des Symptoms und der Auswirkungen.
2. Betriebsdauer bis zum Auftreten des Ausfalls.
3. Betriebsbedingungen zum Ausfallzeitpunkt.

4. Angaben zur Konfiguration des Testobjekts zum Ausfallzeitpunkt.
5. Datum und Zeit des Ausfalls.
6. Klassifizierung des Ausfalls.
7. Getroffene Korrekturmassnahme.

Als Quellen für Ausfalldaten kommen Zuverlässigkeitstests, Vorbehandlungsschritte, Umweltprüfungen, Annahmetests, Produktionstests wie InCircuit- oder Funktionsprüfungen, Feldversuche und Erfahrungen aus dem Betrieb in Frage. Die Zuverlässigkeitstests stellen eindeutig die wichtigste Quelle dar, da sie speziell zum Zweck der Verfolgung der Zuverlässigkeit geplant und durchgeführt werden.

2.3. Managementaspekte

Zum Management eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms [MIL189] gehört das Aufstellen von Prozeduren für die Planung und die Durchführung entsprechender Tests (Festlegung der Anzahl Testobjekte, der Testbedingungen und der Testdauer), das Bereitstellen von Schätzmethode zur Beurteilung des Zuverlässigkeitsfortschritts während der Entwicklung und der Fertigung, die Zuteilung von personellen und materiellen Mitteln zur Erreichung der geforderten Zuverlässigkeit und nicht zuletzt die Sicherstellung der Kommunikation zwischen dem Projektleiter und den Verantwortlichen für Test, Ausfallanalyse und Realisierung der Korrekturmassnahmen (Feed-Back).

Ein Zuverlässigkeitswachstums-Programm stellt einen Teil der allgemeinen Strategie zur Sicherstellung der Qualität und Zuverlässigkeit eines Produkts dar; es ersetzt nicht die sonstigen Anstrengungen in Richtung Zuverlässigkeitsanalysen in der Entwicklungsphase (Ausfallraten- und Ausfallartenanalysen, Entwurfsüberprüfungen), Wahl und Qualifikation der Bauteile, Vorbehandlung der kritischen Komponenten sowie Einhaltung der Entwicklungs- und Konstruktionsrichtlinien bezüglich Zuverlässigkeit [Biro91].

2.4. Modellierung reparierbarer Systeme

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auf die Untersuchung des Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme. Diese unterscheiden sich in ihrem Verhalten grundsätzlich von den nichtreparierbaren Systemen, bei welchen die Zuverlässigkeit als Überlebenswahrscheinlichkeit ausgedrückt wird, weil nur ein *einzig* Ausfall vorkommen kann, und deshalb die Beschreibung oft auf die Ausfallrate beschränkt wird.

Für Produkte, die nach einem Ausfall repariert werden können, wird die Zuverlässigkeit durch die *Intensität* oder *Häufigkeit* des Auftretens von Ausfällen (*Rate of Occurrence Of Failures, ROCOF*) beschrieben. Somit kommt der Verteilung der Zeit bis zum ersten Ausfall beträchtlich weniger Bedeutung zu als im Falle der nichtreparierbaren Produkte. Im weiteren werden im allgemeinen die Zeiten zwischen den Ausfällen nicht *unabhängig* und *identisch* verteilt sein.

Die beiden Grössen Ausfallrate und Ausfallintensität sind prinzipiell verschieden. Sie weisen nur bis zum ersten Ausfall eines Systems eine vergleichbare Bedeutung auf. Ein System, welches ein Zuverlässigkeitswachstum zeigt, weist eine mit der Zeit abnehmende Ausfallintensität auf. Die zeitliche Abfolge der Ausfälle lässt sich wie gesagt nicht durch

eine einzige Verteilungsfunktion darstellen. Die Untersuchung kann mit Hilfe stochastischer Punktprozesse erfolgen. Dabei wird der zugrundeliegende stochastische Prozess der Ausfallzeiten durch einen einfacheren angenähert. Als wichtigster erscheint in diesem Zusammenhang der inhomogene Poisson-Prozess (*NonHomogeneous Poisson-Process, NHPP*).

3. Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums

Die direkteste und einfachste Methode, um die aktuelle Zuverlässigkeit eines gegebenen Systems abzuschätzen, liegt in der Verwertung der Zeit zwischen den beiden letzten Ausfällen. Um eine aussagekräftige Schätzung der Zuverlässigkeit zu erhalten, ist eine grosse Anzahl von Wiederholungen der entsprechenden Prüfung (mit unverändertem System) nötig. Besser wäre es, die angesammelte Information über die Zeiten zwischen den Ausfällen verwenden zu können. Dies erfordert die Anwendung eines mathematischen Modells, welches dem zugrundeliegenden Zuverlässigkeitswachstum Rechnung trägt.

Die Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums ermöglicht die Verfolgung des *erreichten* Zuwachses der Zuverlässigkeit. So lassen sich Situationen erkennen, wo es nötig ist, die Anstrengungen für die Fehleraufdeckung und -beseitigung zu intensivieren oder einzustellen. Wünschbar ist zudem eine Abschätzung der in der Zukunft *erreichbaren* Zuverlässigkeit (Extrapolation), unter der Annahme, dass der zugrundeliegende stochastische Prozess unverändert bleibt.

Eine Anwendung der Modelle setzt voraus, dass mögliche Korrekturmassnahmen nach jedem systematischen Ausfall implementiert werden. Nur dann lässt sich das Modell zur Abschätzung der jeweiligen Zuverlässigkeit verwenden. Werden hingegen verschiedene Korrekturmassnahmen erst zusammen am Ende einer Testphase realisiert (Delayed Fixes), so kann der entsprechende Sprung in der Zuverlässigkeit nicht mehr mit dem Modell beschrieben werden, sondern nur noch mit Hilfe von Ingenieuranalysen der jeweiligen Auswirkung der Korrekturmassnahmen.

Bei der Modellierung wird in der Regel ein mathematischer Zusammenhang gebildet zwischen der kumulativen Anzahl systematischer Ausfälle und der entsprechend kumulierten Testzeit zum jeweiligen Auftretenszeitpunkt. Es gilt hier aber zu beachten, dass ein Zuverlässigkeitswachstum lediglich als Resultat der *erfolgreichen* Korrekturmassnahmen erfolgt. Verfahren zur Schätzung der Modellparameter sind u.a. die Maximum-Likelihood-Methode und die Methode der kleinsten Quadrate.

3.1. Bekannte Modelle

Modelle zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums können bezüglich dem Parameterraum in parametrisch oder nichtparametrisch und bezüglich der statistischen Eigenschaften in deterministisch oder stochastisch eingeteilt werden. Als unabhängige Variable wird in der Regel die Zeit (t) angenommen. Die Modelle lassen sich aber auch auf andere Situationen übertragen, wie z.B., wenn festgestellt wird, dass die Anzahl Ein- / Ausschaltzyklen als massgebender Faktor erscheint.

Den *parametrischen* Modellen liegt die Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums als Funktion der Zeit in Form einer Gleichung mit Parametern zugrunde. Sie bieten somit die Möglichkeit zur Planung eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms und, was wichtiger ist, zur Voraussage der zeitlichen Entwicklung der Zuverlässigkeit. Dieser Ansatz erfordert Annahmen über die Form des Zuverlässigkeitswachstums, basierend auf der Erfahrung mit ähnlichen Wachstumsprogrammen. Die relativ kleine Anzahl Parameter (meist zwei oder drei) im Modell wird dann aufgrund der Daten über die Auftretenszeit-

punkte der systematischen Ausfälle geschätzt. Eine Zusammenstellung der 1984 bekannten Modelle ist in [MIL189, MIL 338] enthalten.

Die *nichtparametrischen* Modelle [VDI4009] können demgegenüber wegen des Fehlens funktioneller Ansätze nur zu einer Kontrolle des Zuverlässigkeitswachstums eingesetzt werden, d.h. die Zuverlässigkeitskenngrößen können nur für Zeiträume geschätzt werden, für die auch Daten vorliegen. Es wird angenommen, dass der Lernprozess in diskreten, gut definierten Etappen stattfindet. Nur die Anzahl der in diesen Intervallen aufgetretenen systematischen Ausfälle wird verwendet zur Abschätzung des erreichten Wachstums. Hauptnachteil dieses Ansatzes ist die Tatsache, dass Extrapolationen in die Zukunft nicht möglich sind. Aus diesem Grund werden nachfolgend nur parametrische Modelle behandelt.

Die Modellierung beschränkt sich bei allen nachfolgend beschriebenen Modellen auf die systematischen Ausfälle und wird ohne Berücksichtigung von spezifischen Informationen über den Typ der jeweiligen Ausfallursache (Fehler) durchgeführt, einzig die Testzeit bis zum Auftreten eines systematischen Ausfalls ist relevant. Es wird hingegen davon ausgegangen, dass das Auftreten eines als systematisch erkannten Ausfalls Anlass zu einer sofortigen Korrekturmaßnahme zur Beseitigung des auslösenden Fehlers ist.

Bei der Beschreibung der Modelle wird folgende Notation verwendet:

t = kumulative Testzeit

$N(t)$ = Anzahl systematischer Ausfälle in $(0,t]$ → Zählprozess (Zufallsgröße)

$N^*(t_i)$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{stochastische Modelle: beobachteter Datensatz, interpretiert als Realisierung} \\ \text{des stochastischen Prozesses } N(t) \\ \text{deterministische Modelle: beobachteter Datensatz} \end{array} \right.$

$M(t)$: $\left\{ \begin{array}{l} \text{stochastische Modelle: Mittelwertfunktion} = E\{N(t)\} = \text{erwartete} \\ \text{Anzahl systematischer Ausfälle in } (0, t] \\ \text{deterministische Modelle: Beziehung für die Anzahl systematischer} \\ \text{Ausfälle in } (0, t] \end{array} \right.$

$m(t)$ = $dM(t)/dt$ = Intensität (Häufigkeit) der systematischen Ausfälle,

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau.$$

3.1.1. Deterministische Modelle

Die *deterministischen* Modelle bilden einen mathematischen Zusammenhang (Funktionsgleichung) zwischen einer Zuverlässigkeitskenngrösse und einem Fortschrittsmass wie der Zeit (Testzeit, Betriebszeit) oder der Anzahl Versuche.

Eine Abweichung zwischen der Modellvorstellung $M(t_i)$ und dem beobachteten Datensatz $N^*(t_i)$ kann z.B. folgendermassen dargestellt werden:

$$N^*(t_i) = M(t_i) + \epsilon_i \quad (3)$$

Die Zufälligkeit der Daten wird hier durch einen zufälligen Fehler ϵ_i (z.B. Messungenauigkeiten) beschrieben. Enthält das Modell Parameter, so werden diese so gewählt, dass eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen den gegebenen Testdaten und dem durch die Funktionsgleichung beschriebenen Verlauf erreicht und somit ϵ_i minimiert wird. Dies kann auf graphischem Weg geschehen. Zu genaueren Resultaten führt die Bestimmung der Parameter mit der Methode der kleinsten Quadrate (Minimierung der Summe der Quadrate der Abstände zwischen den Datenpunkten und der angenommenen Funktion).

3.1.1.1. Modell nach Duane

James T. Duane veröffentlichte im Jahre 1964 eine grundlegende Arbeit [Duan64] über die Untersuchung von systematischen Veränderungen der Zuverlässigkeit von hydromechanischen Systemen, Flugzeuggeneratoren und -triebwerken. Dabei wurden nach dem Auftreten von systematischen Ausfällen jeweils technische oder operative Verbesserungen vorgenommen. Es fanden also eigentliche Anstrengungen zur Erreichung eines Zuverlässigkeitswachstums statt. Duane fand einen Zusammenhang zwischen der kumulativen Ausfallhäufigkeit (definiert als die totale Anzahl Ausfälle systematischer Natur seit Programmstart dividiert durch die kumulative Betriebszeit seit Beginn) und der kumulativen Betriebszeit. Aufgetragen im doppelt-logarithmischen Massstab ergab sich eine näherungsweise lineare Beziehung (Bild 1). Die Neigung der jeweiligen Geraden stellt ein direktes Mass für die Zunahme der Zuverlässigkeit dar.

Mathematisch lässt sich der Zusammenhang wie folgt ausdrücken (die Notation wurde gegenüber der von Duane verwendeten leicht abgewandelt, um im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine einheitliche Bezeichnungsweise zu erhalten):

$$h_z(t) = K \cdot t^{-\alpha}, \quad (4)$$

wobei

$$h_z(t) = \frac{M(t)}{t} = \text{kumulative Ausfallhäufigkeit}$$

$M(t)$ = Anzahl systematischer Ausfälle bis zum Zeitpunkt t , $t \geq 0$

t = kumulative Betriebszeit

K = Konstante > 0

α = Wachstumsparameter > 0 .

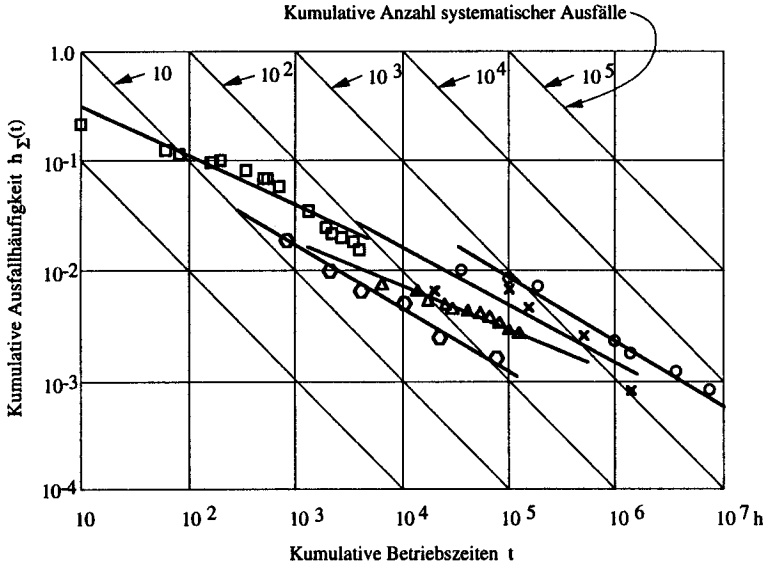


Bild 1 Originaldaten von Duane [Duan64]

Beziehung (4) gilt solange, wie sich der zugrundeliegende Prozess nicht ändert. Aus (4) lassen sich direkt die Anzahl systematischer Ausfälle in Funktion der Zeit angeben:

$$M(t) = K \cdot t^{-\alpha}. \quad (5)$$

Der Parameter α repräsentiert die Schnelligkeit, mit welcher Fehler gefunden und entsprechende Korrekturmaßnahmen eingeleitet werden und variierte bei der Studie von Duane zwischen den Werten 0.35 und 0.5. Spätere Quellen berichten, dass wegen der Zeitverzögerung für die Aufdeckung von Fehlern und das Finden von Verbesserungslösungen dieser Parameter nicht grösser als 0.6 bis 0.7 werden kann [Fink85, Herd78].

Aus Gleichung (5) folgt:

$$\ln \frac{M(t)}{t} = \ln K - \alpha \cdot \ln t. \quad (6)$$

Das Zuverlässigkeitswachstum wird hier also durch eine fallende Gerade mit Neigung α beschrieben. Da man intuitiv ein Zuverlässigkeitswachstum mit einer steigenden Geraden verbindet, wird meist die Beziehung

$$\ln \frac{t}{M(t)} = \alpha \cdot \ln t - \ln K \quad (7)$$

verwendet.

Duane hat auch eine Gleichung für die momentane Ausfallhäufigkeit (definiert als Ausfallhäufigkeit über ein begrenztes Zeitintervall) abgeleitet:

$$h_m(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M(t)}{\Delta t} = \frac{dM(t)}{dt} = (1 - \alpha) \cdot K \cdot t^{-\alpha}. \quad (8)$$

Die Schätzung der Parameter K und α kann graphisch anhand der den Daten angenäherten Geraden bestimmt werden. Da es sich um eine Darstellung der kumulativen Ausfallhäufigkeit handelt, enthält jeder der aufeinanderfolgenden Punkte alle Informationen, die auch schon in den vorhergehenden Punkten enthalten sind. Den neueren Testergebnissen sollte darum grösseres Gewicht beigemessen werden (Erzielung geringerer Abstände der Geraden zu den Messpunkten im Bereich grösserer Testzeit).

Eine genauere Parameterschätzung ist mit der Methode der kleinsten Quadrate (siehe dazu Anhang B) möglich. Da sich die Beziehung (5) auf eine Gerade transformieren lässt, wird die Bestimmung der Parameter speziell einfach. Es gilt:

$$\ln(M(t)) = \ln K + (1 - \alpha) \cdot \ln t. \quad (9)$$

Geht man davon aus, dass die zur Verfügung stehenden Testdaten aus den Wertepaaren

$$(t_i, N^*(t_i))$$

bestehen und bringt man die Beziehung (9) auf die Form

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (10)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \ln t_1 \\ 1 & \ln t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln t_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ln K \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \ln(N^*(t_1)) \\ \ln(N^*(t_2)) \\ \vdots \\ \ln(N^*(t_n)) \end{bmatrix},$$

so lässt sich die Lösung für \mathbf{x} nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen als

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}. \quad (11)$$

Oft wird in der Literatur auch eine Anpassung anhand von $t/M(t)$ (Gleichung(7)) vorgenommen.

Die Duane-Methode wird oft zur Abschätzung des Aufwands an Testzeit zur Erreichung eines geforderten Wertes für die momentane Ausfallhäufigkeit benützt. Dies geschieht durch Annahme geeigneter Werte für K und α . Diese Werte müssen in Beziehung stehen zur Ausfallhäufigkeit des betrachteten Systems vor Testbeginn und zur erwarteten Wirksamkeit des Entwicklungsprogramms in bezug auf das Auffinden und Eliminieren von Fehlern. Für die Wahl von α ist die Kenntnis der Wirksamkeit früherer, vergleichbarer Entwicklungsprogramme nützlich. Die Werte, die in der Literatur veröffentlicht wurden,

sind ziemlich vage und schwer zu interpretieren in bezug auf den entsprechend zu treibenden Aufwand für die Fehlerentdeckung und -beseitigung.

Vorbehalte in bezug auf die Anwendung des Duane-Modells beziehen sich vor allem auf die Überwachung eines Entwicklungsprogramms anhand eines festen Wertes für α (z.B. 0.5, wie von Duane vorgeschlagen) und auf das Verhalten des Modells für kleine und sehr grosse Werte der kumulativen Testzeit. Da der Parameter α in den zuvor hergeleiteten Beziehungen im Exponent erscheint und damit einen entsprechend grossen Einfluss auf das jeweilige Wachstum ausübt, ist aufgrund des weiten Bereichs möglicher Werte für α (~0 bis ca. 0.7) die Wahl eines festen Wertes für Planungszwecke nicht sinnvoll. Bezogen auf das Zeitverhalten hat Duane selbst erkannt, dass die Anwendung des Modells bei grossen kumulativen Testzeiten problematisch ist. Lässt man im weiteren in Gleichung (8) die kumulative Testzeit t gegen Null gehen, so erhält man eine momentane Ausfallhäufigkeit, welche gegen ∞ strebt, was vom physikalischen Standpunkt aus als unrealistisch erscheint. Es wurden denn auch in der Literatur verschiedentlich Fälle zitiert, wo sich frühe Testergebnisse nur mangelhaft durch das Duane-Modell (bzw. AMSAA-Modell) beschreiben liessen [z.B. Fink79, Jääs82]. Für eine weitere Erläuterung der obigen Sachverhalte siehe die entsprechenden Bemerkungen beim AMSAA-Modell (Abschnitt 3.1.2.1.).

3.1.1.2. Weitere deterministische Modelle

Verschiedene weitere deterministische Modelle (IBM-, Perkowski-Hartvigsen-, Lloyd-Lipow-, Aroef-, ARINC- und einfaches Exponential-Modell) sind in der Literatur bekannt. In [MIL338] finden sich die grundlegenden Beziehungen für diese Modelle.

Hier sei nur das unter dem Namen IBM bekanntgewordene Modell kurz beschrieben, das von N.Rosner 1961 vorgeschlagen wurde. Es basiert auf der Annahme, dass die während eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms auftretenden Ausfälle in zwei verschiedene Klassen eingeteilt werden können:

- 1) Ausfälle mit konstanter Ausfallrate λ ,
- 2) systematische Ausfälle.

Es wird vorausgesetzt, dass die maximale Anzahl der systematischen Ausfälle begrenzt ist ($= K_1$). Im Sinne des Zuverlässigkeitswachstums sind nur die Ausfälle der Klasse 2 von Interesse.

Wenn $\bar{M}(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch nicht aufgetretenen systematischen Ausfälle beschreibt, so wird im IBM-Modell folgende Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{M}(t)}{dt} = -K_2 \cdot \bar{M}(t) \quad (12)$$

angenommen. Dies bedeutet, dass die Änderungsrate von $\bar{M}(t)$ bezogen auf die Zeit proportional zur Anzahl noch nicht aufgetretener systematischer Ausfälle und somit am Anfang eines Testprogramms am grössten ist. Es scheint plausibel, dass es umso schwieriger ist, weitere Fehler zu finden, je mehr schon beseitigt worden sind.

Die Lösung der Gleichung (12) führt zu

$$\bar{M}(t) = K_1 \cdot e^{-K_2 \cdot t}, \quad K_1, K_2 > 0. \quad (13)$$

Für die Anzahl der bis zum Zeitpunkt t aufgetretenen systematischen Ausfälle gilt demnach

$$M(t) = K_1 - \bar{M}(t) = K_1 \cdot (1 - e^{-K_2 \cdot t}). \quad (14)$$

Für kleine Testzeiten $t \rightarrow 0$ gilt wie erwartet

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0. \quad (15)$$

Für $t \rightarrow \infty$ sind alle systematischen Ausfälle aufgetreten, d.h. es wird

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = K_1. \quad (16)$$

Die Häufigkeit von systematischen Ausfällen (Änderungsrate der Anzahl Ausfälle pro Zeiteinheit, vergleichbar mit der Ausfallintensität bei Annahme eines stochastischen Prozesses) für das oben beschriebene Modell lässt sich angeben als

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = K_1 \cdot K_2 \cdot e^{-K_2 \cdot t}. \quad (17)$$

Für die Grenzwerte erhält man demnach

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = K_1 \cdot K_2 < \infty \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0. \quad (19)$$

Weil das Modell von einer begrenzten maximalen Anzahl systematischer Ausfälle ausgeht, lässt sich zu jedem Zeitpunkt der Anteil der bereits aufgetretenen systematischen Ausfälle berechnen:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{\text{Anzahl der aufgetretenen systematischen Ausfälle}}{\text{Anzahl total auftretender systematischer Ausfälle}} \\ &= \frac{M(t)}{M(\infty)} = \frac{K_1 \cdot (1 - e^{-K_2 \cdot t})}{K_1} = 1 - e^{-K_2 \cdot t}. \end{aligned} \quad (20)$$

3.1.2. Stochastische Modelle

Bei den *stochastischen* Modellen versucht man der inhärenten Zufälligkeit der Zuverlässigkeitswachstums-Daten direkt Rechnung zu tragen. Statt wie bei den deterministischen Modellen den Zufall über einen Fehler e_i zu erfassen, wird dieser bei den stochastischen Modellen direkt in $N^*(t_i)$ berücksichtigt und somit $N^*(t_i)$ als (zufällige) Realisierung eines stochastischen Prozesses $N(t)$ interpretiert.

Als wichtigstes Verfahren zur statistischen Auswertung der Daten gilt die Maximum-Likelihood-Methode [Biro91]. Hierbei werden als Schätzung für die unbekannt Parameter diejenigen Werte gewählt, welche dem beobachteten Ereignis (gegebene Ausfallzeitpunkte) im zugrundegelegten Modell die grösste Wahrscheinlichkeit zuweisen.

3.1.2.1. Modelle basierend auf dem inhomogenen Poisson-Prozess

Viele der bekannten Modelle zur Beschreibung eines Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme basieren auf dem inhomogenen Poisson-Prozess (siehe Anhang A) mit zeitabhängiger Intensität zur Beschreibung des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses der systematischen Ausfälle. Das Wachstum der Zuverlässigkeit wird hier durch eine in Funktion der Zeit abnehmende Intensitätsfunktion beschrieben, was einer stochastischen Zunahme der Zeiten zwischen den systematischen Ausfällen entspricht. Nachfolgend seien die einzelnen Modelle näher beschrieben.

3.1.2.1.1. AMSAA-Modell

Das AMSAA (U.S. Army Materiel Systems Analysis Activity) Zuverlässigkeitswachstums-Modell wurde von L.H.Crow entwickelt [Crow74, 75, 78, 82]. Es stellt die statistische Version des Duane-Modells dar, ist heute das am meisten verwendete Modell zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme und ist zum IEC-Standard erklärt worden [IEC1164].

Das AMSAA-Modell basiert auf dem inhomogenen Poisson-Prozess mit einer aus den Beobachtungen von Duane abgeleiteten Mittelwertfunktion $M(t)$. Es gelten die folgenden Beziehungen ($N(t)$ = Anzahl systematischer Ausfälle in $(0,t]$, $M(t)$ = Mittelwertfunktion des inhomogenen Poisson-Prozesses = $E\{N(t)\}$ = erwartete Anzahl systematischer Ausfälle in $(0,t]$):

$$M(t) = E\{N(t)\} = \gamma \cdot t^\delta \quad (21)$$

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \gamma \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}, \quad \gamma > 0, \delta > 0. \quad (22)$$

Das AMSAA-Modell geht demnach von einem inhomogenen Poisson-Prozess mit der Intensität $m(t)$ nach Gleichung (22) aus. $\delta=1$ führt auf $m(t) = \gamma$ und somit auf den homogenen Poisson-Prozess. $\delta < 1$ bedeutet, dass $m(t)$ abnimmt in Funktion von t , was charakteristisch ist für ein Zuverlässigkeitswachstum. $\delta > 1$ hingegen führt zu einer Zuverlässigkeitsverschlechterung mit zunehmender Zeit t .

Da die obige Intensität eine Form aufweist, welche der Ausfallrate bei Annahme einer Weibull-Verteilung entspricht, wird der durch die Gleichungen (21) und (22) charakterisierte inhomogene Poisson-Prozess auch *Weibull-Prozess* genannt [Bain80, Crow82, Fink76, Hula90, Lee78, Thom81]. Dies wohl auch deshalb, weil die Zeit bis zum ersten Ausfall t_1 in diesem Modell eine Weibull-Verteilung

$$F(t_1) = 1 - e^{-\gamma t_1^\delta}, \quad 0 \leq t_1 < \infty, \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0 \quad (23)$$

aufweist. Entsprechendes gilt aber nicht mehr für die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Ausfällen. Dies im Gegensatz zum homogenen Poisson-Prozess, wo sowohl die Zeit bis zum ersten Ausfall wie auch die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Ausfällen unabhängig und exponentiell verteilt sind. Für den inhomogenen Poisson-Prozess sind diese Zeiten nicht statistisch *unabhängig und identisch verteilt*. Man sollte sich deshalb immer bewusst sein, dass der Weibull-Prozess und die Weibull-Verteilung zwei grundsätzlich verschiedenartige Konzepte darstellen. Die Bezeichnung Weibull-Prozess wird aus diesem Grund im weiteren nicht mehr benutzt.

a) Bestimmung der Modellparameter

Das Duane- und das AMSAA-Modell beschreiben grundsätzlich das Zuverlässigkeitswachstums-Verhalten gleich, wobei das Duane-Modell dieses Wachstum als deterministischen Gesetzen gehorchend ansieht, hingegen das AMSAA-Modell den statistischen Schwankungen Rechnung trägt. Letzteres ermöglicht demnach die Anwendung von Verfahren der Statistik zur Schätzung der freien Parameter im Modell, zur Angabe von Vertrauensbereichen und zur Bestimmung der Güte der Anpassung. Die zwei freien Parameter in der Gleichung (21) bzw. (22) lassen sich mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Schätzung (Anhang B) bestimmen. Angenommen, n systematische Ausfälle seien im Laufe eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms aufgetreten, die entsprechenden Ausfallzeiten (kumulative Testzeiten) seien t_1, t_2, \dots, t_n , und das Programm werde nach Ablauf der kumulativen Testzeit T abgebrochen. Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt (die Zeit T wird vorgegeben und somit ist n eine Zufallsgrösse), folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$L = e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) = e^{-\gamma T^\delta} \cdot \gamma^n \cdot \delta^n \cdot \prod_{i=1}^n t_i^{\delta-1} \quad (24)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = n \cdot \ln(\gamma \cdot \delta) - \gamma \cdot T^\delta + (\delta - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i. \quad (25)$$

Die geschätzten Parameter $(\hat{\gamma}, \hat{\delta})$ erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \frac{n}{\hat{\gamma}} - T^{\hat{\delta}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \delta} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \frac{n}{\hat{\delta}} - \hat{\gamma} \cdot T^{\hat{\delta}} \cdot \ln T + \sum_{i=1}^n \ln t_i \stackrel{!}{=} 0. \quad (27)$$

Nach einer einfachen Umformung folgt

$$\hat{\delta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{T}{t_i}\right)} \quad (28)$$

und

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{T^{\hat{\delta}}} . \quad (29)$$

Die entsprechenden Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall (Abbruch des Zuverlässigkeitswachstums-Programms zum Zeitpunkt des Auftretens des n-ten systematischen Ausfalls t_n , gegenüber dem *zeitgestutzten* Fall handelt es sich um eine prinzipiell andere Betrachtungsweise, da hier n vorgegeben wird und somit t_n eine Zufallsgrösse darstellt) lauten:

$$\hat{\delta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n-1} \ln\left(\frac{t_n}{t_i}\right)} \quad (30)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{t_n^{\hat{\delta}}} . \quad (31)$$

L.H.Crow hat in [Crow74] zusätzlich den Fall untersucht, wo ein Zuverlässigkeitstest anhand von mehr als einem System gleichzeitig durchgeführt wird. Unter der Annahme, dass K Systeme getestet werden und das q-te System von S_q bis T_q , $q=1,2,\dots,K$, beobachtet wird und in dieser Zeit N_q systematische Ausfälle zeigt, wobei t_{qi} , $i=1,2,\dots,N_q$, die Testzeit dieses Systems beim i-ten systematischen Ausfall darstellt, folgt für die Likelihood-Funktion im *zeitgestutzten* Fall ($t_{qN_q} < T_q$, T_q : im voraus festgelegte Zeit, N_q : Zufallsvariable \rightarrow Gleichung (B.4a) mit $M(S_q) \neq 0$ statt $M(0) = 0$)

$$L = \prod_{q=1}^K e^{M(S_q) - M(T_q)} \cdot \prod_{i=1}^{N_q} m(t_{qi}) = \prod_{q=1}^K e^{\gamma \cdot (S_q^{\delta} - T_q^{\delta})} \cdot \prod_{i=1}^{N_q} \gamma \cdot \delta \cdot t_{qi}^{\delta-1}, \quad (32)$$

und für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = \sum_{q=1}^K \left(\gamma \cdot (S_q^{\delta} - T_q^{\delta}) + N_q \cdot \ln(\gamma \cdot \delta) + (\delta - 1) \cdot \sum_{i=1}^{N_q} \ln t_{qi} \right). \quad (33)$$

Zur Bestimmung der Parameter $(\hat{\gamma}, \hat{\delta})$ muss die Log-Likelihood-Funktion maximiert werden, also

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \sum_{q=1}^K \left(S_q^{\hat{\delta}} - T_q^{\hat{\delta}} + \frac{N_q}{\hat{\gamma}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (34)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \delta} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \sum_{q=1}^K \left(\hat{\gamma} \cdot (S_q^{\hat{\delta}} \cdot \ln S_q - T_q^{\hat{\delta}} \cdot \ln T_q) + \frac{N_q}{\hat{\delta}} + \sum_{i=1}^{N_q} \ln t_{qi} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (35)$$

Durch Auflösen der Gleichungen (34) und (35) erhält man das in [Crow74] angegebene Resultat

$$\hat{\gamma} = \frac{\sum_{q=1}^K N_q}{\sum_{q=1}^K (T_q^{\hat{\delta}} - S_q^{\hat{\delta}})} \quad (36)$$

$$\hat{\delta} = \frac{\sum_{q=1}^K N_q}{\hat{\gamma} \cdot \sum_{q=1}^K (T_q^{\hat{\delta}} \cdot \ln T_q - S_q^{\hat{\delta}} \cdot \ln S_q) - \sum_{q=1}^K \sum_{i=1}^{N_q} \ln t_{qi}} \quad (37)$$

Diese Gleichungen lassen sich nur iterativ lösen. Die Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall ($t_{qN_q} = T_q$, T_q ist hier eine Zufallsvariable bei festem N_q) können entsprechend erhalten werden.

Der Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\delta}$ ist nicht erwartungstreu. Die Verzerrung wächst mit abnehmender Ausfallanzahl.

Ein *erwartungstreuer* Schätzwert $\bar{\delta}$ wird erhalten mit

$$\bar{\delta} = \frac{M-1}{M} \cdot \hat{\delta}, \quad (38)$$

wobei

$$M = \sum_{q=1}^K M_q, \quad \text{mit } M_q = \begin{cases} N_q & (\text{zeitgestutzt}) \\ N_q - 1 & (\text{ausfallgestutzt}) \end{cases}$$

und

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{q=1}^K M_q}{\sum_{q=1}^K \sum_{i=1}^{M_q} \ln \left(\frac{T_q}{t_{qi}} \right)}$$

Zusätzlich sind in [Crow74] Vertrauensbereiche für δ und γ sowie ein Anpassungstest (Cramér-Von Mises) angegeben, welcher es ermöglicht, abzuklären, ob das AMSAA-Modell für einen Satz vorliegender Ausfalldaten als gültige Approximation angesehen werden kann.

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die Gleichungen hergeleitet zur Bestimmung der Parameter im Falle, wo die zur Verfügung stehenden Daten aus der Anzahl der aufgetretenen systematischen Ausfälle in bestimmten Zeitintervallen $(0, T_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$; $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$; $N(T_1)=k_1$, $N(T_2)=k_2, \dots$, $N(T_n)=k_n$) bestehen (ein System im Test). Die Log-Likelihood-Funktion für diesen Fall lautet (Gleichung (B.6))

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left((k_i - k_{i-1}) \cdot \ln(\gamma \cdot [T_i^{\hat{\delta}} - T_{i-1}^{\hat{\delta}}]) - \ln([k_i - k_{i-1}]!) \right) - \gamma \cdot T_n^{\hat{\delta}}. \quad (39)$$

Die Schätzung der Parameter $(\hat{\gamma}, \hat{\delta})$ liefern die Gleichungen

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \frac{1}{\hat{\gamma}} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (k_i - k_{i-1})}_{k_n} - T_n^{\hat{\delta}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (40)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \delta} \right|_{\hat{\gamma}, \hat{\delta}} = \sum_{i=1}^n \left((k_i - k_{i-1}) \cdot \frac{T_i^{\hat{\delta}} \cdot \ln T_i^{\hat{\delta}} - T_{i-1}^{\hat{\delta}} \cdot \ln T_{i-1}^{\hat{\delta}}}{T_i^{\hat{\delta}} - T_{i-1}^{\hat{\delta}}} \right) - \hat{\gamma} \cdot T_n^{\hat{\delta}} \cdot \ln T_n^{\hat{\delta}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (41)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (40) in Gleichung (41) erhält man eine Beziehung, die nur noch von $\hat{\delta}$ abhängt. Eine Lösung ist aber auch hier nicht explizit, sondern nur iterativ möglich.

b) Diskussion

Sind die Parameter $\hat{\gamma}$ und $\hat{\delta}$ gemäss den geschilderten Verfahren bestimmt worden, so lässt sich auch die geschätzte Intensität der systematischen Ausfälle nach Ablauf der kumulativen Testzeit T angeben:

$$\hat{m}(T) = \hat{\gamma} \cdot \hat{\delta} \cdot T^{\hat{\delta}-1}. \quad (42)$$

Als Schätzung für die momentane mittlere Zeit bis zum nächsten systematischen Ausfall ($T_{\text{mittl.}}$) wird beim AMSAA-Modell in der Literatur der Wert

$$\hat{T}_{\text{mittl.}}(T) = \frac{1}{\hat{m}(T)} = \frac{1}{\hat{\gamma} \cdot \hat{\delta}} \cdot T^{1-\hat{\delta}} \quad (43)$$

verwendet. Weiter wird argumentiert, dass im Falle wo der Test nach dem Zeitpunkt T abgebrochen wird und später keine weiteren Modifikationen mehr am System vorgenommen werden, für die momentane mittlere Zeit bis zum nächsten systematischen Ausfall im Betrieb des Systems gelte (unter der Annahme einer konstanten Ausfallintensität im Betrieb)

$$T_{\text{mittl.}}(\text{im Betrieb}) = \hat{T}_{\text{mittl.}}(T) \quad (44)$$

Wie aber im Anhang A (Gleichungen (A.3) und (A.4)) gezeigt wird, gilt die Beziehung (43) nur im Falle eines homogenen Poisson-Prozesses exakt und somit nicht für den dem AMSAA-Modell zugrundeliegenden inhomogenen Poisson-Prozess. Gleichung (43) sollte deshalb als Näherung verstanden werden.

Die exakte Beziehung für $T_{\text{mittl.}}$ lässt sich ausgehend von der Gleichung (A.3) im Anhang A wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned}
 T_{\text{mitt.}}(t) &= \int_0^{\infty} e^{-[M(t+\tau)-M(t)]} d\tau = e^{\gamma \cdot t^{\delta}} \cdot \int_0^{\infty} e^{-\gamma \cdot (t+\tau)^{\delta}} d\tau \\
 &\stackrel{\text{Substitution: } \gamma \cdot (t+\tau)^{\delta} = y}{=} \frac{1}{\delta \cdot \gamma^{1/\delta}} \cdot e^{\gamma \cdot t^{\delta}} \cdot \int_{\gamma \cdot t^{\delta}}^{\infty} y^{1/\delta-1} \cdot e^{-y} dy \\
 &= \frac{1}{\delta \cdot \gamma^{1/\delta}} \cdot e^{\gamma \cdot t^{\delta}} \cdot \Gamma(1/\delta) \cdot \int_{\gamma \cdot t^{\delta}}^{\infty} \frac{y^{1/\delta-1}}{\Gamma(1/\delta)} \cdot e^{-y} dy \\
 &= \frac{1}{\delta \cdot \gamma^{1/\delta}} \cdot e^{\gamma \cdot t^{\delta}} \cdot \Gamma(1/\delta) \cdot \left(1 - \int_0^{\gamma \cdot t^{\delta}} \frac{y^{1/\delta-1}}{\Gamma(1/\delta)} \cdot e^{-y} dy\right) \\
 &= \frac{1}{\delta \cdot \gamma^{1/\delta}} \cdot e^{\gamma \cdot t^{\delta}} \cdot \Gamma(1/\delta) \cdot \left(1 - \Gamma(1/\delta, \gamma \cdot t^{\delta})\right), \tag{45}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} s^{\alpha-1} \cdot e^{-s} ds \quad \text{für } \alpha > 0 \quad (\text{vollständige Gamma - Funktion}),$$

$$\Gamma(\alpha, z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^z s^{\alpha-1} \cdot e^{-s} ds \quad \text{für } \alpha, z > 0 \quad (\text{unvollständige Gamma - Funktion}).$$

Abschliessend sei noch das Zeitverhalten der Intensität der systematischen Ausfälle näher untersucht. Bild 2 zeigt den entsprechenden Verlauf für eine realistische Wahl der Parameter γ und δ .

Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = \infty \tag{46}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0. \tag{47}$$

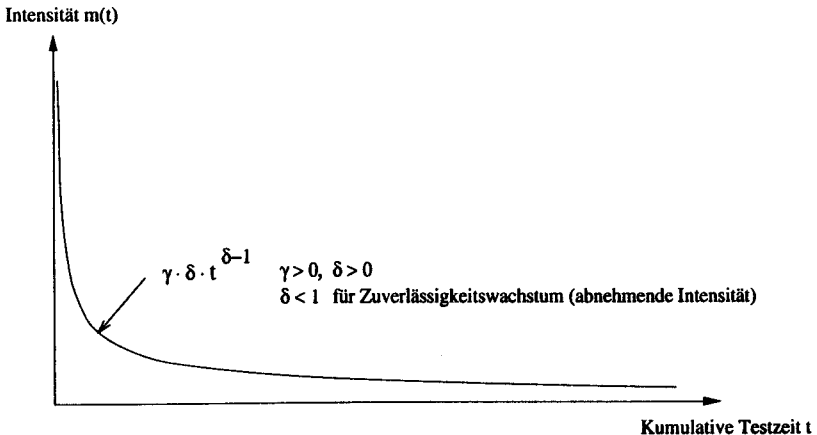


Bild 2 Intensitätsverlauf beim AMSAA-Modell

Ein Zuverlässigkeitswachstum bezieht sich nur auf die Beseitigung der systematischen Ausfälle durch Korrekturmaßnahmen. Hier scheint es denn auch realistisch, dass die entsprechende Intensität gegen Null geht für grosse Testzeiten (Gleichung (47)). Die Bedingung (46) und der damit verbundene überaus starke Abfall des Intensitätsverlaufs für kleine Werte von t mögen ein Grund für die in der Literatur festgehaltenen Schwierigkeiten [z.B. Fink79, Jääs82] einer Anpassung von frühen Testresultaten an den Verlauf der Intensität der systematischen Ausfälle im AMSAA-Modell sein.

3.1.2.1.2. Modifiziertes AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell

Als Basis für eine realitätsbezogene Modifikation bietet sich das heute am weitesten verbreitete Modell zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums von komplexen, reparierbaren Systemen an, nämlich das vorgängig beschriebene AMSAA-Modell.

Mittels einer Anpassung dieses Modells soll erreicht werden, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) < \infty \quad (48)$$

bzw.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{m(t)} > 0. \quad (49)$$

Als Modifikation sei

$$\frac{1}{m(t)} = c + \frac{1}{m_{\text{AMSAA}}(t)} \quad (50)$$

betrachtet. Die Intensität der systematischen Ausfälle lässt sich demnach schreiben als

$$m(t) = \frac{1}{c + \frac{1}{m_{\text{AMSAA}}(t)}} = \frac{1}{c + \frac{1}{\gamma \cdot \delta} \cdot t^{1-\delta}}. \quad (51)$$

Das Modell weist jetzt gegenüber dem AMSAA-Modell einen zusätzlichen Parameter auf. Es zeigt sich, dass die Mittelwertfunktion

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau$$

nicht elementar, sondern nur numerisch bestimmt werden kann.

Eine Anpassung an die im Rahmen der vorliegenden Arbeit zur Verfügung stehenden Ausfalldaten ergab das übereinstimmende Resultat

$$\delta \approx 0, \text{ wobei } \gamma \cdot \delta \neq 0. \quad (52)$$

Damit lässt sich die Gleichung (51) vereinfachen zu

$$m(t) = \frac{1}{c + \frac{1}{\gamma \cdot \delta} \cdot t^t} = \frac{\gamma \cdot \delta}{\gamma \cdot \delta \cdot c + t} \quad (53)$$

Die grundlegenden Beziehungen für das Modell lauten demnach wie folgt :

$$m(t) = \frac{\alpha}{\beta + t} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{\beta}} = m(0) \cdot \frac{1}{1 + \frac{t}{\beta}}, \quad \alpha, \beta > 0, t \geq 0 \quad (54)$$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau = \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \quad (55)$$

Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = \frac{\alpha}{\beta} < \infty \quad (56)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \quad (57)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0 \quad (58)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty \quad (59)$$

Das vorliegende Modell basiert somit wie das AMSAA-Modell auf der Grundannahme einer unbegrenzten Anzahl zu erwartender systematischer Ausfälle, weist aber im Gegensatz zu diesem zu Beginn des Testprogramms wie gefordert eine begrenzte Intensität der systematischen Ausfälle auf.

Interessanterweise zeigt das gemäss einem realitätsnahen Ansatz erhaltene obige Modell eine Struktur, welche mit derjenigen eines Modells übereinstimmt, welches zur Beschreibung von *Software-Qualität* vorgeschlagen worden ist. Es handelt sich dabei um das von J.D.Musa und K.Okumoto entwickelte "Logarithmische Poisson-Modell" [Musa84]. Nachfolgend seien die Annahmen, die zu eben diesem Modell geführt haben, kurz rekapituliert:

Annahme 1: Der zugrundeliegende stochastische Prozess sei ein inhomogener Poisson-Prozess.

Annahme 2: Zum Zeitpunkt $t=0$ seien noch keine systematischen Ausfälle beobachtet worden, d.h. $M(0)=0$ mit Wahrscheinlichkeit Eins.

Annahme 3: Die Ausfallintensität nimmt exponentiell ab mit der erwarteten Anzahl systematischer Ausfälle. Somit folgt für die Intensität der systematischen Ausfälle:

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = m_0 \cdot e^{-\Theta \cdot M(t)}, \quad (60)$$

wobei $m_0 = m(0)$: anfängliche Ausfallintensität

und Θ : Rate der Reduktion der normierten Ausfallintensität pro systematischem Ausfall.

Gemäss obigem Modell reduziert die Korrektur früher Fehler die Intensität stärker als die der späten Fehler. Erwähnt wird im weiteren die Verwandtschaft zu einem Modell, welches von P.Moranda vorgeschlagen wurde [Mora75] und in welchem die Ausfallintensität in geometrischer Form abnimmt (vgl. Abschnitt 3.1.2.2.).

Aus Gleichung (60) folgt unmittelbar:

$$M(t) = \frac{1}{\Theta} \cdot \ln(m_0 \cdot \Theta \cdot t + 1), \quad (61)$$

und

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \frac{m_0}{m_0 \cdot \Theta \cdot t + 1}. \quad (62)$$

Wie das AMSAA-Modell weist dieses Modell auch nur zwei freie Parameter auf. Als Verfahren zur Parameterbestimmung können wiederum die Methode der kleinsten Quadrate und die Maximum-Likelihood-Schätzung zur Anwendung gelangen (siehe Anhang B).

Nachfolgend seien zuerst die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für den Fall, wo n systematische Ausfälle im Rahmen eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms der Länge T (kumulative Testzeit) zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n aufgetreten sind, hergeleitet. Für die Modellbeschreibung gelten die Gleichungen (54) und (55). Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt, folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$L = e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) = \alpha^n \cdot \left(1 + \frac{T}{\beta}\right)^{-\alpha} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{1}{\beta + t_i} \quad (63)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = n \cdot \ln \alpha - \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{T}{\beta}\right) - \sum_{i=1}^n \ln(\beta + t_i). \quad (64)$$

Die geschätzten Parameter $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = \frac{n}{\hat{\alpha}} - \ln\left(1 + \frac{T}{\hat{\beta}}\right) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \hat{\alpha} = \frac{n}{\ln\left(1 + \frac{T}{\hat{\beta}}\right)}, \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} &= \frac{\hat{\alpha} \cdot T}{\hat{\beta}^2 + \hat{\beta} \cdot T} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\beta} + t_i} \stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow f(\hat{\beta}) &= \underbrace{\frac{n}{\ln\left(1 + \frac{T}{\hat{\beta}}\right)}}_{\hat{\alpha}} \cdot \frac{T}{\hat{\beta}^2 + \hat{\beta} \cdot T} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\hat{\beta} + t_i} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Hier ist keine explizite Lösung möglich. Eine numerische Näherungslösung lässt sich z.B. mit der Newton-Raphson-Methode berechnen (Gleichung (C.1)):

$$\hat{\beta} \approx \beta_0 + \left[\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta_0}^{-1} \cdot [f(\beta)]_{\beta_0}, \quad (67)$$

wobei

$$\left[\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} \right]_{\beta_0}^{-1} = \left[\frac{n}{\ln(1 + \frac{T}{\beta_0})} \cdot \frac{T}{(\beta_0^2 + \beta_0 \cdot T)^2} \cdot \left(-\frac{T}{\ln(1 + \frac{T}{\beta_0})} + 2\beta_0 + T \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(\beta_0 + t_i)^2} \right]^{-1}$$

$$f(\beta)_{\beta_0} = \frac{n}{\ln(1 + \frac{T}{\beta_0})} \cdot \frac{T}{\beta_0^2 + \beta_0 \cdot T} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta_0 + t_i}.$$

Ausgehend von der Schätzung β_0 wird die Beziehung (67) so oft zur Berechnung einer verbesserten Schätzung verwendet, bis eine Konvergenz erreicht ist. $\hat{\alpha}$ ergibt sich dann aus der Gleichung (65).

Anhand des Funktionsverlaufs von $\ln L$ muss im Einzelfall sichergestellt werden, dass die Bestimmung der Parameter gemäss den Gleichungen (65) und (66) die Likelihood-Funktion auch tatsächlich maximiert (globales Maximum).

Die entsprechenden Resultate für den *aussfallgestutzten* Fall lassen sich formal durch Ersetzen von T durch t_n in den Gleichungen (63) bis (67) erhalten. Hierbei sei allerdings noch betont, dass es sich beim aussfallgestutzten und beim zeitgestutzten Fall um zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen handelt (bei ersterem ist t_n , bei letzterem n eine Zufallsgrösse).

Das vorgängig beschriebene Modell bietet gegenüber dem AMSAA-Modell zusätzlich zu der Eigenschaft einer begrenzten Intensität bei Testbeginn den Vorteil, dass die Schätzung für die momentane mittlere Zeit bis zum nächsten systematischen Ausfall ($T_{\text{mittl.}}$) explizit berechnet werden kann. Ausgehend von Gleichung (A.3) erhält man

$$\begin{aligned} T_{\text{mittl.}}(t) &= e^{M(t)} \cdot \int_t^{\infty} e^{-M(x)} dx = \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot \int_t^{\infty} \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha} dx \\ &= \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{\alpha} \cdot \left[\frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \left(1 + \frac{x}{\beta}\right)^{1-\alpha} \right]_t^{\infty}, \end{aligned}$$

womit für $\alpha > 1$ folgt:

$$T_{\text{mittl.}}(t) = \frac{\beta}{\alpha-1} \cdot \left(1 + \frac{t}{\beta}\right) = \frac{\beta+t}{\alpha-1} = T_{\text{mittl.}}(0) + \frac{1}{\alpha-1} \cdot t. \quad (68)$$

Das Resultat nach Gleichung (68) bestätigt nochmals die im Zusammenhang mit dem AMSAA-Modell vorgebrachte Anmerkung, wonach für den inhomogenen Poisson-Prozess gilt:

$$T_{\text{mittl.}}(t) \neq \frac{1}{m(t)}. \quad (69)$$

Der zeitliche Verlauf der Intensität der systematischen Ausfälle ist in Bild 3 angegeben. Im Vergleich zum entsprechenden Verlauf bei Annahme des AMSAA-Modells (Bild 2) ist ein deutlicher Unterschied zu erkennen, indem beim modifizierten Modell der Abfall bei kleinen Testzeiten wesentlich weniger ausgeprägt ausfällt. Es ist aber weiterhin so, dass die Intensität zu Beginn am stärksten und dann immer weniger ändert, je grösser die kumulierte Testzeit und damit die Anzahl entdeckter und korrigierter Fehler ist [Jääs82]. Beide Verläufe gehen für sehr grosse Testzeiten gegen Null, was als realistisch erscheint von einem praktischen Standpunkt aus gesehen, wenn nur die systematischen Ausfälle modelliert werden sollen.

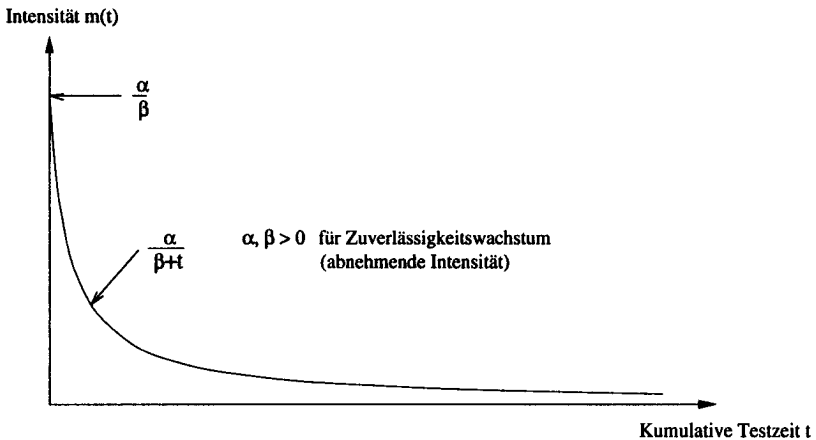


Bild 3 Intensitätsverlauf beim modifizierten AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell

3.1.2.1.3. Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell

Im Modell von D.R.Cox und P.A.W.Lewis [Cox66] erscheint als Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses

$$m(t) = e^{\alpha+\gamma t}. \quad (70)$$

Der Parameter γ wird negativ sein bei Situationen, wo ein Zuverlässigkeitswachstum beschrieben wird und somit eine mit der Zeit abnehmende Intensität der systematischen Ausfälle resultiert. Für die Mittelwertfunktion folgt

$$M(t) = E\{N(t)\} = \int_0^t e^{\alpha+\gamma\cdot\tau} d\tau = \frac{e^{\alpha}}{\gamma} \cdot (e^{\gamma t} - 1). \quad (71)$$

Die Untersuchung der Funktion für die Intensität der systematischen Ausfälle bei kleinen Zeiten und bei sehr grossen Zeiten liefert

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = e^{\alpha} < \infty \quad (72)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0. \quad (73)$$

Beide Werte sind realistisch für die Praxis.

Entsprechend gilt für die Mittelwertfunktion

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0 \quad (74)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \frac{-e^{\alpha}}{\gamma} < \infty \quad (\gamma < 0 \text{ für Zuverlässigkeitswachstum}). \quad (75)$$

Gleichung (75) bedeutet, dass die maximale Anzahl der zu erwartenden systematischen Ausfälle bei der obigen Modellierung im Gegensatz zum AMSAA-Modell begrenzt ist.

Ein Modell von der Struktur der Gleichungen (70) und (71) wurde von A.L.Goel und K.Okumoto im Zusammenhang mit der Beschreibung von Software-Qualität vorgeschlagen [Goel79]. Die entsprechenden, hier spezifisch auf ein Zuverlässigkeits-/Qualitätswachstum ausgerichteten Beziehungen für die Mittelwertfunktion und die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses lauten dann wie folgt:

$$M(t) = a \cdot (1 - e^{-t/b}), \quad a, b > 0 \quad (76)$$

$$m(t) = \frac{a}{b} \cdot e^{-t/b} \quad (77)$$

a stellt hier die erwartete maximale Anzahl systematischer Ausfälle dar, b ist ein Skalensparameter.

Folgende Annahmen lagen der Modellentwicklung zugrunde:

- (i) $M(0) = 0$
- (ii) $M(\infty) = a$
- (iii) Die erwartete Anzahl systematischer Ausfälle in $(t, t+\Delta]$ ist proportional zur erwarteten Anzahl noch nicht aufgetretener systematischer Ausfälle zum Zeitpunkt t , somit $M(t+\Delta) - M(t) = [a - M(t)] \cdot \Delta/b + o(\Delta)$.

Dies führt auf eine Differentialgleichung mit der oben erwähnten Lösung für $M(t)$.

Als Verfahren zur Bestimmung der freien Parameter a und b können hier wiederum die Methode der kleinsten Quadrate und die Maximum-Likelihood-Schätzung zur Anwendung gelangen (siehe Anhang B).

Nachfolgend seien zuerst die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für den Fall, wo n systematische Ausfälle im Rahmen eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms der Länge T (kumulative Testzeit) zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n aufgetreten sind, hergeleitet. Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt, folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$L = e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot e^{-a(1-e^{-T/b})} \cdot \prod_{i=1}^n e^{-t_i/b} \quad (78)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = n \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) - a \cdot (1 - e^{-T/b}) - \frac{1}{b} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad (79)$$

Die geschätzten Parameter (\hat{a}, \hat{b}) erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial a} \right|_{\hat{a}, \hat{b}} = \frac{n}{\hat{a}} - (1 - e^{-T/\hat{b}}) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \hat{a} = \frac{n}{1 - e^{-T/\hat{b}}} \quad (80)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial b} \right|_{\hat{a}, \hat{b}} = -n + \frac{\hat{a} \cdot T}{\hat{b}} \cdot e^{-T/\hat{b}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\hat{b}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (81)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (80) in die Gleichung (81) erhält man eine Beziehung, die nur noch von \hat{b} abhängt und die z.B. mit Hilfe der Newton-Raphson Methode (siehe Anhang C) gelöst werden kann. Anhand des Funktionsverlaufs von $\ln L$ muss dann im Einzelfall sichergestellt werden, dass die Bestimmung der Parameter gemäss den Gleichungen (80) und (81) die Likelihood-Funktion auch tatsächlich maximiert.

Die entsprechenden Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall lassen sich formal durch Ersetzen von T durch t_n in den Gleichungen (78) bis (81) erhalten. Hierbei sei allerdings noch betont, dass es sich beim ausfallgestutzten und beim zeitgestutzten Fall um zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen handelt (bei ersterem ist t_n , bei letzterem n eine Zufallsgrösse).

Der zeitliche Verlauf der Intensitätsfunktion ist in Bild 4 angegeben. Wie beim modifizierten AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell ist die Intensität bei $t = 0$ begrenzt.

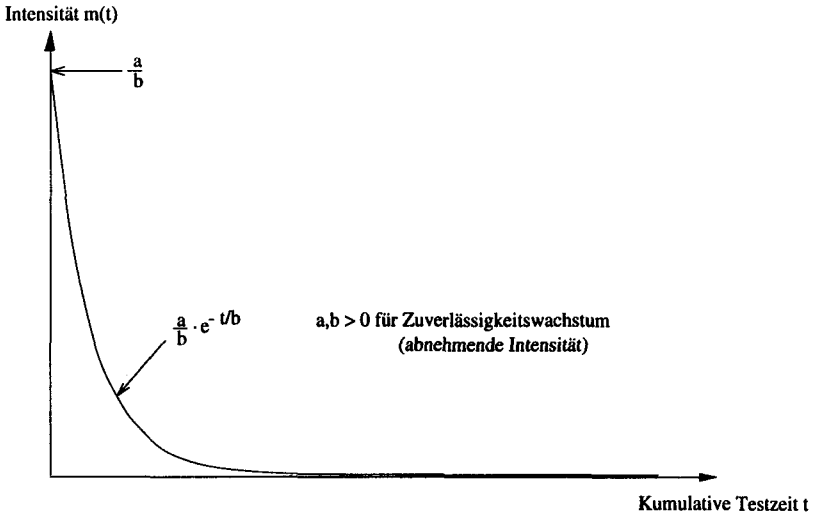


Bild 4 Intensitätsverlauf beim Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell

In [Goel79] sind auch die bedingte Verteilungsfunktion und der Erwartungswert von

$$\bar{N}(t) = N([t, \infty)),$$

der Anzahl der verbleibenden systematischen Ausfälle nach dem Zeitpunkt t angegeben, dies aber nicht korrekt. Bei Annahme des inhomogenen Poisson-Prozesses lauten die richtigen Beziehungen infolge der Eigenschaft der Nachwirkungsfreiheit (vgl. Anhang A) wie folgt:

$$\begin{aligned} \Pr\{\bar{N}(t) = x | N(t) = y\} &= \Pr\{\bar{N}(t) = x\} \\ &= \frac{(a - M(t))^x}{x!} \cdot e^{-(a - M(t))}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (82)$$

und

$$E[\bar{N}(t) | N(t) = y] = a - M(t), \quad (83)$$

sie sind somit unabhängig von y .

Das Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell lässt sich als stochastische Variante des IBM-Modells interpretieren, und zwar erhält ähnlich wie beim Übergang vom Duane zum AMSAA-Modell der deterministische Zusammenhang zwischen der Anzahl systematischer Ausfälle und der kumulativen Testzeit eine statistische Bedeutung im Rahmen der Modellierung durch einen inhomogenen Poisson-Prozess.

3.1.2.1.4. Lewis/Shedler-Modell

Das Modell von P.A.W.Lewis und G.Shedler [MIL338] entspricht einer Erweiterung des Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modells, indem für die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses gilt:

$$m(t) = e^{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \dots + \alpha_{10} \cdot t^{10}} \quad (84)$$

Die Mittelwertfunktion kann hier nicht elementar berechnet werden.

3.1.2.1.5. Yamada/Osaki-Modell

Das von S.Yamada und S.Osaki vorgeschlagene Zuverlässigkeitswachstums-Modell basiert auf der Beobachtung, dass bei Softwareentwicklungs-Prozessen die Anzahl der aufgetretenen systematischen Ausfälle in Funktion der Zeit oft einen S-förmigen Verlauf aufweist. Zu Beginn nimmt die Anzahl der systematischen Ausfälle nur allmählich zu, dann folgt eine Phase, wo diese Zunahme sehr rasch erfolgt und am Schluss flacht der entsprechende Verlauf wieder ab. Die Beziehungen für die Mittelwertfunktion und die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses lauten entsprechend wie folgt [Yama83]:

$$M(t) = c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d} \right) \cdot e^{-t/d} \right], \quad c, d > 0 \quad (85)$$

$$m(t) = \frac{c}{d^2} \cdot t \cdot e^{-t/d} \quad (86)$$

c stellt hier die erwartete maximale Anzahl systematischer Ausfälle dar, d ist ein Skalenparameter. Die Bestimmung der freien Parameter c und d kann auch bei diesem Modell wieder mit der Methode der kleinsten Quadrate und mit der Maximum-Likelihood-Schätzung erfolgen (siehe Anhang B).

Nachfolgend seien zuerst die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für den Fall, wo n systematische Ausfälle im Rahmen eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms der Länge T (kumulative Testzeit) zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n aufgetreten sind, hergeleitet. Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt, folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$L = e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) = \left(\frac{c}{d^2} \right)^n \cdot e^{-c \left[1 - \left(1 + \frac{T}{d} \right) e^{-T/d} \right]} \cdot \prod_{i=1}^n t_i \cdot e^{-t_i/d} \quad (87)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = n \cdot \ln \left(\frac{c}{d^2} \right) - c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{T}{d} \right) \cdot e^{-T/d} \right] + \sum_{i=1}^n \left(\ln t_i - \frac{t_i}{d} \right). \quad (88)$$

Die geschätzten Parameter (\hat{c}, \hat{d}) erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial c} \right|_{\hat{c}, \hat{d}} = \frac{n}{\hat{c}} - \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\hat{d}} \right) \cdot e^{-T/\hat{d}} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \hat{c} = \frac{n}{1 - \left(1 + \frac{T}{\hat{d}} \right) \cdot e^{-T/\hat{d}}} \quad (89)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial d} \right|_{\hat{c}, \hat{d}} = -2 \cdot n + \frac{\hat{c} \cdot T^2}{\hat{d}^2} \cdot e^{-T/\hat{d}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\hat{d}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (90)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (89) in die Gleichung (90) erhält man eine Beziehung, die nur noch von \hat{d} abhängt und die z.B. mit Hilfe der Newton-Raphson Methode (siehe Anhang C) gelöst werden kann. Anhand des Funktionsverlaufs von $\ln L$ muss dann im Einzelfall sichergestellt werden, dass die Bestimmung der Parameter gemäss den Gleichungen (89) und (90) die Likelihood-Funktion auch tatsächlich maximiert.

Die entsprechenden Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall lassen sich formal durch Ersetzen von T durch t_n in den Gleichungen (87) bis (90) erhalten. Hierbei sei allerdings noch betont, dass es sich beim ausfallgestutzten und beim zeitgestutzten Fall um zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen handelt (bei ersterem ist t_n , bei letzterem n eine Zufallsgrösse).

Der zeitliche Verlauf der Intensitätsfunktion ist in Bild 5 angegeben. Charakteristisch für das vorliegende Modell ist gemäss Bild 5, dass die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses zu Beginn Null beträgt, dann auf ein Maximum ansteigt und anschliessend wieder abfällt. Für die Mittelwertfunktion ergibt sich dementsprechend wie vorausgesetzt ein S-förmiger Verlauf.

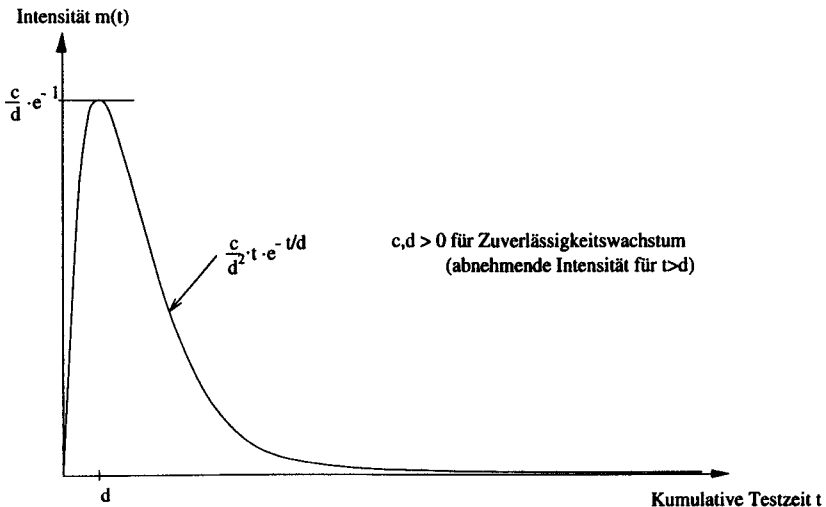


Bild 5 Intensitätsverlauf beim Yamada/Osaki-Modell

3.1.2.2. Weitere stochastische Modelle

Bayes-Modelle

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums bieten die Bayes-Modelle. Beim nach Bayes benannten Schätzverfahren werden A-priori statistische Eigenschaften angenommen bzw. postuliert, was die Verwertung von Vorinformationen erlaubt. Die Bayes-Wachstumsmodelle werden hier nicht weiter behandelt, weil ihre Aussagekraft umstritten ist, wie z.B. in [VDI4009] begründet wird.

Formulierung als Todesprozess

Eine naheliegende Basis zur Beschreibung des Zuverlässigkeitswachstums von komplexen, reparierbaren Systemen sei nachfolgend dargelegt:

Nach jedem Auftreten eines Ausfalls, welcher als systematisch klassifiziert wird, ergibt die entsprechend eingeleitete Korrekturmassnahme eine sprungartige Änderung in der Ausfallintensität. Idealerweise vergeht zwischen dem Auftreten des systematischen Ausfalls und dem Einführen der Korrekturmassnahme eine vernachlässigbar kurze Zeitspanne. Im Zeitintervall zwischen den systematischen Ausfällen (bzw. Korrekturmassnahmen) wird eine konstant bleibende Ausfallintensität angenommen.

Obige Betrachtungsweise führt auf das Modell des *Todesprozesses* (siehe z.B. [Biro91], [Gerl95]). Die Idee der Modellierung durch einen Todesprozess ist an sich nicht neu (bekannt von der Beschreibung der Software-Qualität her). In den Vordergrund tritt bei dieser Modellierung die *Ereignisabhängigkeit* der Ausfallintensität, im Gegensatz zum Fall, wo der betrachtete stochastische Prozess durch einen inhomogenen Poisson-Prozess (mit *zeitlich* veränderlicher Intensität) angenähert wird, und somit die *Zeitabhängigkeit* den massgebenden Einflussfaktor darstellt. In bezug auf die Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums erscheint diese Ereignisabhängigkeit ($v_i = f(i)$, $i =$ Anzahl durchgeführter Korrekturmassnahmen) als realitätsnah, wenn man berücksichtigt, dass das Wachstum ausschliesslich in Funktion der durchgeführten Korrekturmassnahmen (\rightarrow Ereignisse) auftritt und nicht einfach aufgrund der kumulierten Testzeit!

Bei Vorliegen von Testdaten lässt sich das aufgetretene Zuverlässigkeitswachstum durch Bestimmen der v_i mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode aufzeigen. Wie im Anhang B dargelegt wird, kann dies sinnvoll nur geschehen, wenn für die Folge v_i , $i = 0, \dots, n$, eine parametrische Funktion angenommen wird (Gleichung (B.12)).

In Anlehnung an das Resultat der Weiterentwicklung des AMSAA-Modells (Abschnitt 3.1.2.1.2.) kann für die Folge der Ausfallintensitäten die folgende Form vorgeschlagen werden:

$$v_i = \frac{\alpha}{\beta + i} ; \alpha, \beta = \text{Parameter}, i = 0, 1, \dots \quad (91)$$

Vor allem im Bereich der Modellierung der Software-Qualität sind verschiedene weitere parametrische Ansätze veröffentlicht worden [Mala91, Musa87, Rook90, Shan83,

Xie91]. Viele dieser Modelle basieren auf einer gleichmässigen Abnahme der Ausfallintensität in Funktion der Anzahl aufgetretener systematischer Ausfälle.

Ein realistisches Modell für die Verfolgung der Software-Qualität, vorgeschlagen von P. Moranda [Mora75], enthält folgenden Ansatz für die Folge der Ausfallintensitäten:

$$v_i = D \cdot k^i, \quad D, k = \text{Parameter}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (92)$$

Die Abnahme der v_i erfolgt also in geometrischer Form.

Bild 6 zeigt einen Vergleich der beiden vorausgehend erwähnten Varianten für den Verlauf der Ausfallintensität. Die Ausfallintensität zu Beginn ist bei beiden Versionen begrenzt.

Die Schätzung der Modellparameter aufgrund gegebener Ausfalldaten aus einem Zuverlässigkeitswachstums-Programm kann wieder mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode erfolgen.

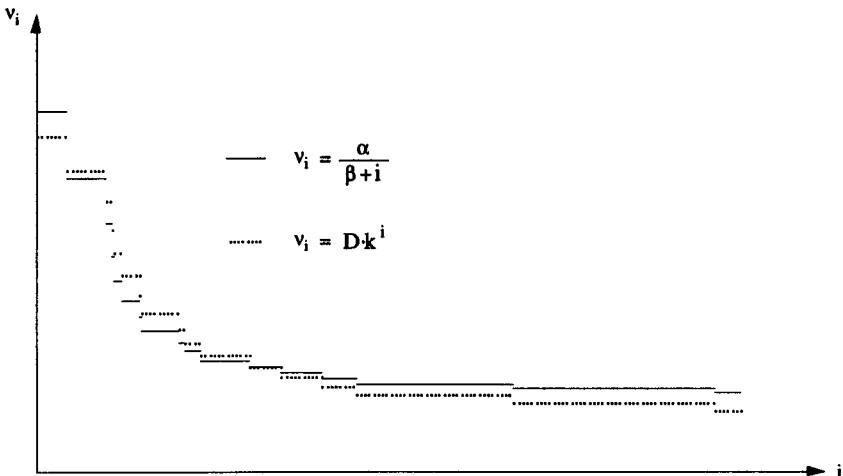


Bild 6 Verläufe der Ausfallintensität bei Annahme des Todesprozesses als Modell

Zuerst seien die Beziehungen für das Modell gemäss Gleichung (91) hergeleitet. Für die Log-Likelihood-Funktion folgt in diesem Fall (Gleichung (B.9))

$$\ln L = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln \frac{\alpha}{\beta + i} - \frac{\alpha}{\beta + i} \cdot x_i \right). \quad (93)$$

Die Gleichungen zur Bestimmung der Parameter lauten demnach (Gleichung (B.13))

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = \frac{n}{\hat{\alpha}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{\hat{\beta} + i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (94)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \right|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\hat{\alpha} \cdot x_i}{(\hat{\beta} + i)^2} - \frac{1}{\hat{\beta} + i} \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad (95)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (95) in Gleichung (94) erhält man einen Zusammenhang, welcher nur noch von $\hat{\beta}$ abhängt:

$$n \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{(\hat{\beta} + i)^2}}{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\hat{\beta} + i}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{\hat{\beta} + i} = g(\hat{\beta}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (96)$$

Eine Lösung kann mittels Newton-Raphson (Anhang C) erhalten werden:

$$\hat{\beta} \approx \beta_0 + [\mathbf{I}(\beta_0)]^{-1} \cdot g(\beta_0), \quad (97)$$

wobei

$$\mathbf{I}(\beta_0) = n \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{2x_i}{(\beta_0 + i)^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\beta_0 + i} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{(\beta_0 + i)^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(\beta_0 + i)^2}}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\beta_0 + i} \right)^2} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_i}{(\beta_0 + i)^2}.$$

Geht man hingegen von der Gleichung (92) aus, so erhält man für die Log-Likelihood-Funktion (Gleichung (B.9))

$$\ln L = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\ln(D \cdot k^i) - D \cdot k^i \cdot x_i \right). \quad (98)$$

Die Parameter D und k lassen sich gemäss den folgenden Gleichungen bestimmen (siehe Gleichung (B.13))

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial D} \right|_{\hat{D}, \hat{k}} = \frac{n}{\hat{D}} - \sum_{i=0}^{n-1} \hat{k}^i \cdot x_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (99)$$

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial k} \right|_{\hat{D}, \hat{k}} = \frac{1}{\hat{k}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i - \hat{D} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \hat{k}^{i-1} \cdot x_i \stackrel{!}{=} 0. \quad (100)$$

$\frac{(n-1) \cdot n}{2}$

Das Auflösen von Gleichung (99) nach \hat{D} und Einsetzen in Gleichung (100) sowie Multiplizieren mit dem Faktor \hat{k}/n liefert den folgenden Zusammenhang:

$$\frac{n-1}{2} - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \hat{k}^i \cdot x_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \hat{k}^i \cdot x_i} = g(\hat{k}) \stackrel{!}{=} 0. \quad (101)$$

Als Methode zur Bestimmung der Lösung bietet sich wiederum die Newton-Raphson-Methode (Anhang C) an:

$$\hat{k} \approx k_0 + [I(k_0)]^{-1} \cdot g(k_0), \quad (102)$$

wobei

$$I(k_0) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^2 \cdot \hat{k}^{i-1} \cdot x_i \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \hat{k}^i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \hat{k}^i \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} i \cdot \hat{k}^{i-1} \cdot x_i}{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \hat{k}^i \cdot x_i \right)^2}.$$

Die Schätzung für die momentane mittlere Zeit bis zum nächsten systematischen Ausfall nach Auftreten von n systematischen Ausfällen ($T_{\text{mittl.}}$) lässt sich bei Annahme eines Todesprozesses als Modell explizit angeben:

$$T_{\text{mittl.}}(n) = \frac{1}{v_n}. \quad (103)$$

Eine Extrapolation in die Zukunft erfolgt bei diesem Modell naheliegenderweise aufgrund der erwarteten Anzahl zusätzlich auftretender systematischer Ausfälle m (im Gegensatz zur zusätzlich zu kumulierenden Testzeit bei Annahme eines inhomogenen Poisson-Prozesses als Modell). Es folgt somit

$$T_{\text{mittl.}}(n+m) = \frac{1}{v_{n+m}}. \quad (104)$$

3.2. Auswahl der bekannten Modelle für die weiteren Untersuchungen

Im folgenden sollen nur Modelle weiterbehandelt werden, die auf einer stochastischen Betrachtungsweise beruhen und somit mit Hilfe von aussagekräftigen Verfahren aus der mathematischen Statistik (siehe Anhang B) untersucht werden können. Die deterministischen Modelle von Duane und IBM sind zwar historisch gesehen von Bedeutung, im Rahmen der nachfolgenden Untersuchung werden aber ausgehend von obiger Begründung nur die entsprechenden stochastischen Interpretationen (AMSAA-Modell und Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell) weiterverfolgt. Das Modell von Lewis/Shedler enthält im Ansatz für die Intensität des angenommenen inhomogenen Poisson-Prozesses zuviele freie Parameter. Die Annahme vieler freier Parameter lässt zwar unter Umständen eine bessere Anpassung an die Datensätze erwarten als bei Modellen mit weniger Parametern, die Schätzung der einzelnen Parameter ist aber auch entsprechend unsicherer. Die Annahme von mehr als zwei bis drei freien Parametern bringt deshalb nicht unbedingt

grosse Vorteile mit sich. Für die Modelle, die auf einer Formulierung als Todesprozess basieren, lässt sich die aussagefähige Untersuchung mittels Anpassungstests, wie in Kapitel 4 beschrieben, nicht durchführen.

Folgende bekannten Modelle mit zwei freien Parametern, die alle auf dem inhomogenen Poisson-Prozess beruhen, werden demnach für die weiteren Untersuchungen herangezogen:

AMSAA-Modell

$$M_1(t) = \gamma \cdot t^\delta, \quad m_1(t) = \gamma \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}, \quad \gamma, \delta > 0 \quad (105)$$

Modifiziertes AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell (logarithmisches Poisson-Modell)

$$M_2(t) = \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right), \quad m_2(t) = \frac{\alpha}{\beta + t}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (106)$$

Cox/Lewis- bzw. Goel/Okumoto-Modell (exponentielles Poisson-Modell)

$$M_3(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right), \quad m_3(t) = \frac{a}{b} \cdot e^{-\frac{t}{b}}, \quad a, b > 0 \quad (107)$$

Yamada/Osaki-Modell (S-förmiges Poisson-Modell)

$$M_4(t) = c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-\frac{t}{d}}\right], \quad m_4(t) = \frac{c}{d^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{d}}, \quad c, d > 0 \quad (108)$$

Die letztgenannten zwei Modelle gehen von einer begrenzten maximalen Anzahl erwarteter systematischer Ausfälle aus:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) < \infty,$$

eine Eigenschaft, die für die Einteilung der Modelle in Klassen verwendet werden kann, in der Praxis aber ohne weitere Bedeutung ist.

Es hat sich im Rahmen dieser Arbeit bei der Anpassung dieser Modelle an die vorliegenden Ausfalldaten gezeigt, dass die Methode der kleinsten Quadrate hier schlechte Resultate liefert, da verschiedentlich die geschätzte maximale Anzahl der systematischen Ausfälle (Parameter a beim exponentiellen Poisson-Modell bzw. c beim S-förmigen Poisson-Modell) *kleiner* war als die tatsächlich bereits aufgetretene Anzahl. Es erscheint einleuchtend, dass bei dieser Art der Anpassung (möglichst gute Übereinstimmung der Mittelwertfunktion mit den Daten) bei bestimmten Datenkonstellationen unrealistische Resultate möglich werden. Die Maximum-Likelihood-Schätzung, die ja auf einer Wahrscheinlichkeitsannahme beruht, zeigte dieses Verhalten nicht; sie soll deshalb im Rahmen der Vergleiche in Kapitel 4 ausschliesslich Verwendung finden.

3.3. Aufstellung neuer Modelle

Motivation für die Suche nach neuen Modellen war das unbefriedigende Abschneiden der im Abschnitt 3.2. beschriebenen bekannten Modelle bei der Anwendung auf die vorliegenden Testdaten aus der Praxis (vgl. Kap. 4). Die neuen Modelle sind das Resultat einer umfassenden Suche nach Modellen, die sowohl in bezug auf die Beschreibung des grundsätzlichen Zuverlässigkeitswachstums-Verhaltens (siehe Abschnitt 4.4.) wie auch bezüglich der Extrapolationseigenschaften (siehe Abschnitt 4.5.) Vorteile gegenüber den bekannten Modellen aufweisen. Auch die neuen Modelle basieren auf dem inhomogenen Poisson-Prozess als Näherung für den zugrundeliegenden stochastischen Prozess. Als geeignet haben sich multiplikative Kombinationen von Mittelwertfunktionen verschiedener inhomogener Poisson-Prozesse erwiesen, also

$$\begin{aligned}
 M_{\text{neu}}(t) & \stackrel{\text{z.B.}}{=} M_1(t) \cdot M_2(t) & (109) \\
 & \stackrel{\text{(gemäß Ab-}}{\text{schnitt 3.2.)}}{=} \gamma \cdot t^\delta \cdot \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \\
 & = \alpha' \cdot t^\delta \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right).
 \end{aligned}$$

Dabei entstehen dreiparametrische Modelle. Durch Zusammenfassen ähnlich gelagerter Parameter kann hier die Anzahl freier Parameter auf zwei reduziert werden, also

$$\begin{aligned}
 M_{\text{neu}}(t) & \stackrel{\text{z.B.}}{=} M_2(t) \cdot M_3(t) & (110) \\
 & \stackrel{\text{(gemäß Ab-}}{\text{schnitt 3.2.)}}{=} \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \cdot a \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right) \\
 & = \alpha' \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right) \\
 \rightarrow M_{\text{neu, reduziert}}(t) & = \alpha' \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right).
 \end{aligned}$$

Selbstverständlich wäre es auch möglich, mehr als zwei Modelle zu kombinieren. Die dabei entstehenden Modelle weisen dann aber mehr als drei freie Parameter bzw. recht umfangreiche Beschreibungen für die Mittelwert- und Intensitätsfunktion auf, weshalb dieser Ansatz hier nicht weiterverfolgt wird.

Im folgenden seien die zwei in bezug auf die hier untersuchten Datensätze erfolversprechendsten neuen Modelle näher beschrieben.

Die Beziehungen für die Mittelwertfunktion und die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses lauten für das erste neue Modell entsprechend wie folgt:

$$M(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{b}}\right), \quad a, b > 0 \quad (111)$$

$$m(t) = a \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{t}{b}}}{b + t} + \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot e^{-\frac{t}{b}}}{b} \right). \quad (112)$$

Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0 \quad (113)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty \quad (114)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0 \quad (115)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0. \quad (116)$$

Das vorliegende Modell basiert somit wie das AMSAA- und das modifizierte AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell (logarithmisches Poisson-Modell) auf der Grundannahme einer unbegrenzten Anzahl zu erwartender systematischer Ausfälle.

Die Bestimmung der freien Parameter a und b kann auch bei diesem Modell wieder mit der Methode der kleinsten Quadrate und mit der Maximum-Likelihood-Schätzung erfolgen (siehe Anhang B).

Nachfolgend seien zuerst die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für den Fall, wo n systematische Ausfälle im Rahmen eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms der Länge T (kumulative Testzeit) zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n aufgetreten sind, hergeleitet. Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt, folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$L = e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) = a^n \cdot e^{-a \cdot \ln\left(1 + \frac{T}{b}\right) \left(1 - e^{-\frac{T}{b}}\right)} \cdot \prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - e^{-\frac{t_i}{b}}}{b + t_i} + \frac{\ln\left(1 + \frac{t_i}{b}\right) \cdot e^{-\frac{t_i}{b}}}{b} \right) \quad (117)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\ln L = n \cdot \ln a - a \cdot \ln\left(1 + \frac{T}{b}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{b}}\right) + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1 - e^{-\frac{t_i}{b}}}{b + t_i} + \frac{\ln\left(1 + \frac{t_i}{b}\right) \cdot e^{-\frac{t_i}{b}}}{b} \right). \quad (118)$$

Die geschätzten Parameter (\hat{a}, \hat{b}) erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} \Big|_{\hat{a}, \hat{b}} = \frac{n}{\hat{a}} - \ln\left(1 + \frac{T}{\hat{b}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\hat{b}}}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow \hat{a} = \frac{n}{\ln\left(1 + \frac{T}{\hat{b}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\hat{b}}}\right)} \quad (119)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} \Big|_{\hat{a}, \hat{b}} = \frac{\hat{a} \cdot T}{\hat{b} \cdot (\hat{b} + T)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\hat{b}}}\right) + \frac{\hat{a} \cdot T}{\hat{b}^2} \cdot \ln\left(1 + \frac{T}{\hat{b}}\right) \cdot e^{-\frac{T}{\hat{b}}} \quad (120)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{\ln\left(1 + \frac{t_i}{\hat{b}}\right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{b}}} \cdot (\hat{b} + t_i)^2 \cdot \left(\frac{t_i}{\hat{b}} - 1\right) - 2 \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{b}}} \cdot t_i \cdot (\hat{b} + t_i) - \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\hat{b}}}\right) \cdot \hat{b}^2}{\ln\left(1 + \frac{t_i}{\hat{b}}\right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{b}}} \cdot (\hat{b} + t_i)^2 \cdot \hat{b} + \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\hat{b}}}\right) \cdot \hat{b}^2 \cdot (\hat{b} + t_i)} \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Einsetzen der Gleichung (119) in die Gleichung (120) erhält man eine Beziehung, die nur noch von \hat{b} abhängt und die z.B. mit Hilfe der Newton-Raphson Methode (siehe Anhang C) gelöst werden kann. Anhand des Funktionsverlaufs von $\ln L$ muss dann im Einzelfall sichergestellt werden, dass die Bestimmung der Parameter gemäss den Gleichungen (119) und (120) die Likelihood-Funktion auch tatsächlich maximiert.

Die entsprechenden Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall lassen sich formal durch Ersetzen von T durch t_n in den Gleichungen (117) bis (120) erhalten. Hierbei sei allerdings noch betont, dass es sich beim ausfallgestutzten und beim zeitgestutzten Fall um zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen handelt (bei ersterem ist t_n bei letzterem n eine Zufallsgrösse).

Der zeitliche Verlauf der Intensitätsfunktion ist in Bild 7 angegeben. Die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses beträgt zu Beginn Null, steigt dann auf ein Maximum an und fällt anschliessend wieder bis auf Null ab. Für die Mittelwertfunktion ergibt dies wie beim Yamada/Osaki-Modell einen S-förmigen Verlauf. Im Vergleich zu diesem fällt hier auf, dass die Intensitätsfunktion beim vorliegenden Modell wesentlich langsamer gegen Null geht für grosse Testzeiten. Es ist aber weiterhin so, dass die Intensität zu Beginn am stärksten ändert.

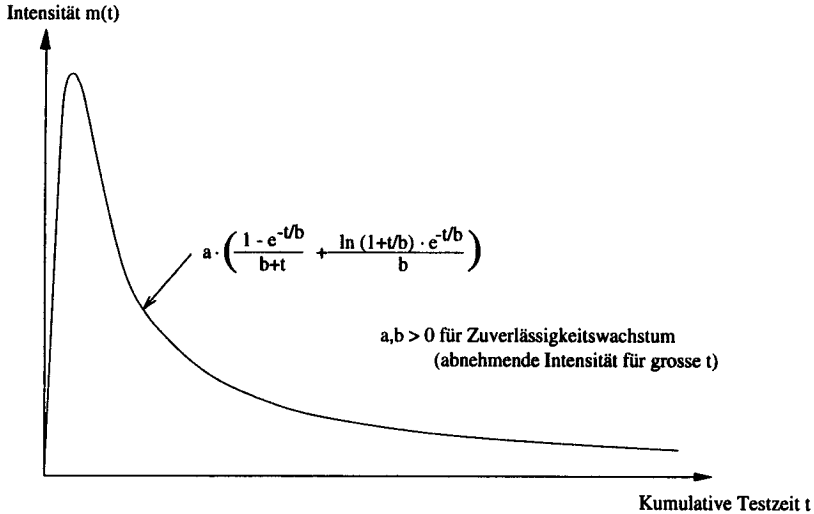


Bild 7 Intensitätsverlauf des ersten neuen Modells

Für das zweite näher zu beschreibende neue Modell haben sich in bezug auf die hier untersuchten Datensätze folgende Beziehungen für die Mittelwertfunktion und die Intensität des inhomogenen Poisson-Prozesses als geeignet erwiesen:

$$M(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\gamma}} \right], \quad \alpha, \beta, \gamma > 0 \quad (121)$$

$$m(t) = \alpha \cdot t^{\beta-1} \cdot \left\{ \beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\gamma}} \right] + \frac{t^2}{\gamma^2} \cdot e^{-\frac{t}{\gamma}} \right\}. \quad (122)$$

Es gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} M(t) = 0 \quad (123)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = \infty \quad (124)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} m(t) = 0 \quad (125)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m(t) = 0 \quad \text{für } \beta < 1. \quad (126)$$

Auch dieses Modell basiert auf der Grundannahme einer unbegrenzten Anzahl zu erwartender systematischer Ausfälle. $\beta < 1$ ist Voraussetzung für ein Zuverlässigkeitswachstum.

Die Bestimmung der freien Parameter α , β und γ kann auch bei diesem Modell wieder mit der Methode der kleinsten Quadrate und mit der Maximum-Likelihood-Schätzung erfolgen (siehe Anhang B).

Nachfolgend seien zuerst die Maximum-Likelihood-Schätzwerte für den Fall, wo n systematische Ausfälle im Rahmen eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms der Länge T (kumulative Testzeit) zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n aufgetreten sind, hergeleitet. Da es sich hierbei um einen *zeitgestutzten* Test handelt, folgt für die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.4a))

$$\begin{aligned} L &= e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) \\ &= \alpha^n \cdot e^{-\alpha \cdot T^\beta \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\gamma} \right) e^{-\frac{T}{\gamma}} \right]} \cdot \prod_{i=1}^n t_i^{\beta-1} \cdot \left\{ \beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t_i}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\gamma}} \right] + \frac{t_i^2}{\gamma^2} \cdot e^{-\frac{t_i}{\gamma}} \right\} \end{aligned} \quad (127)$$

und somit für die Log-Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} \ln L &= n \cdot \ln \alpha - \alpha \cdot T^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{T}{\gamma}} \right] \\ &\quad + (\beta - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \ln t_i + \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t_i}{\gamma} \right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\gamma}} \right] + \frac{t_i^2}{\gamma^2} \cdot e^{-\frac{t_i}{\gamma}} \right\}. \end{aligned} \quad (128)$$

Die geschätzten Parameter $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$ erhält man (Gleichung (B.3)) aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}} &= \frac{n}{\hat{\alpha}} - T^{\hat{\beta}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\hat{\gamma}} \right) \cdot e^{-\frac{T}{\hat{\gamma}}} \right] \stackrel{!}{=} 0 \\ \rightarrow \hat{\alpha} &= \frac{n}{T^{\hat{\beta}} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\hat{\gamma}} \right) \cdot e^{-\frac{T}{\hat{\gamma}}} \right]} \end{aligned} \quad (129)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}} &= -\hat{\alpha} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{T}{\hat{\gamma}} \right) \cdot e^{-\frac{T}{\hat{\gamma}}} \right] \cdot T^{\hat{\beta}} \cdot \ln T + \sum_{i=1}^n \ln t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1 - \left(1 + \frac{t_i}{\hat{\gamma}} \right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{\gamma}}}}{\hat{\beta} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t_i}{\hat{\gamma}} \right) \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{\gamma}}} \right] + \frac{t_i^2}{\hat{\gamma}^2} \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{\gamma}}}} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \quad (130)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\gamma}^3} \cdot T^{\hat{\beta}+2} \cdot e^{-\frac{T}{\hat{\gamma}}} + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{t_i^2}{\hat{\gamma}^3} \cdot e^{-\frac{t_i}{\hat{\gamma}}} \cdot \left(\frac{t_i}{\hat{\gamma}} - \hat{\beta} - 2 \right)}{\hat{\beta} + e^{-\frac{t_i}{\hat{\gamma}}} \cdot \left(\frac{t_i^2}{\hat{\gamma}^2} - \hat{\beta} \cdot \left(1 + \frac{t_i}{\hat{\gamma}} \right) \right)} \stackrel{!}{=} 0 \quad (131)$$

Durch Einsetzen der Gleichung (129) in die Gleichungen (130) und (131) erhält man zwei Beziehungen, die nur noch von $\hat{\beta}$ und $\hat{\gamma}$ abhängen und die z.B. mit Hilfe der Newton-Raphson Methode (siehe Anhang C) gelöst werden können. Anhand des Funktionsverlaufs von $\ln L$ muss dann im Einzelfall sichergestellt werden, dass die Bestimmung der Parameter gemäss den Gleichungen (129) bis (131) die Likelihood-Funktion auch tatsächlich maximiert.

Die entsprechenden Resultate für den *ausfallgestutzten* Fall lassen sich formal durch Ersetzen von T durch t_n in den Gleichungen (127) bis (131) erhalten. Hierbei sei allerdings noch betont, dass es sich beim ausfallgestutzten und beim zeitgestutzten Fall um zwei grundsätzlich verschiedene Betrachtungsweisen handelt (bei ersterem ist t_n , bei letzterem n eine Zufallsgrösse).

Der zeitliche Verlauf der Intensitätsfunktion ist in Bild 8 gegeben. Im Vergleich zum Yamada/Osaki-Modell fällt hier auf, dass auch die Intensitätsfunktion dieses zweiten neuen Modells wesentlich langsamer gegen Null geht für grosse Testzeiten, wobei nachwievor die Intensität zu Beginn am stärksten ändert. Die Mittelwertfunktion weist wie beim Yamada/Osaki- und beim ersten neuen Modell einen S-förmigen Verlauf auf.

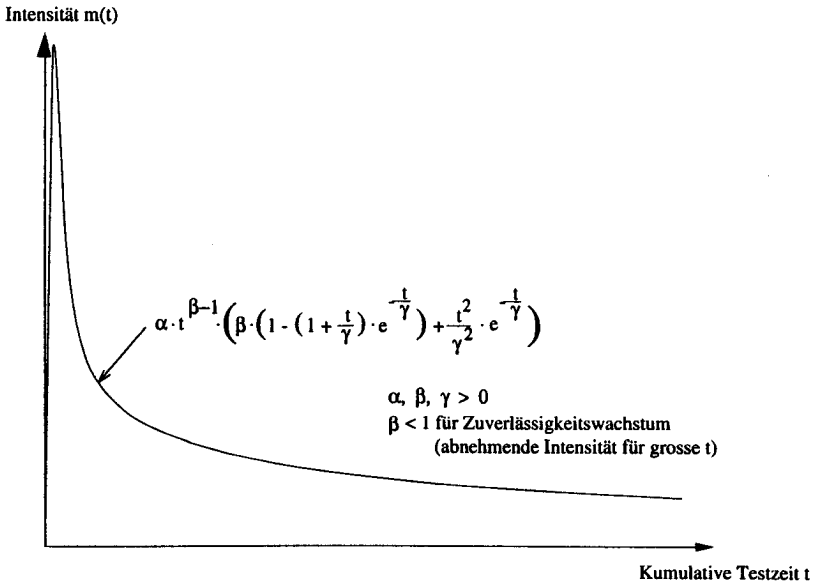


Bild 8 Intensitätsverlauf des zweiten neuen Modells

3.4. Kostenbetrachtungen

Im allgemeinen ist ein nicht unbeträchtlicher Einsatz an Zeit und Geld nötig, um Fehler eines komplexen, reparierbaren Systems bzw. des entsprechenden Herstellungsprozesses zu eliminieren. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Schätzung für die momentane mittlere Zeit bis zum nächsten systematischen Ausfall ($T_{\text{mittl.}}$) für das modifizierte AMSAA- bzw. Musa/Okumoto-Modell explizit berechnet werden kann, soll im folgenden ein Kostenmodell entwickelt werden, welches es erlaubt, die kostenoptimale Dauer eines Zuverlässigkeitswachstums-Programms abzuschätzen. Je länger die Laufzeit dieses Programms ist, desto weniger Fehler sind im System noch enthalten und desto geringer sind dann die (durch ein Zuverlässigkeitswachstum direkt beeinflussbaren) Kosten für (Garantie-) Reparaturen im Feld. Andererseits bedingt die Verbesserung der Zuverlässigkeit zusätzlichen Kostenaufwand für die Durchführung der Tests und die Realisierung der Korrekturmassnahmen zur Beseitigung der Ursachen der systematischen Ausfälle, die im Laufe des Testzyklus aufgetreten sind. Im Sinne einer Wahrscheinlichkeitsbetrachtung muss eine kostenoptimale Wahl für die Dauer des Zuverlässigkeitswachstums-Programms existieren. Ist hingegen eine zu erreichende Ausfallrate $\lambda(T)$ der systematischen Ausfälle des Systems gefordert, so muss dieser Forderung Priorität zugewiesen werden, und die Optimierung der Kosten muss unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung erfolgen.

Bei der Entwicklung des Kostenmodells (immer von der Herstellerseite her gesehen) wird von folgenden vereinfachenden Annahmen ausgegangen:

1. Die Anzahl der Systeme im Einsatz sei konstant über den Beobachtungszeitraum (Garantiedauer).
2. Gerechnet wird mit mittleren Kosten (z.B. gemittelt über die verschiedenen möglichen Korrekturmassnahmen).
3. Keine Forderungen bezüglich zu erreichender Ausfallrate $\lambda(T)$ der systematischen Ausfälle.
4. Im Feld werden die Ursachen der systematischen Ausfälle nicht mehr behoben, sondern es finden nur noch Reparaturen (Austausch der ausgefallenen Teile) statt.
5. Nach Abschluss des Programms zur Verbesserung der Zuverlässigkeit wird für die systematischen Ausfälle eine konstante Ausfallintensität

$$\lambda(t, T) = \lambda(T) = \frac{1}{T_{\text{mittl.}}(T)} \stackrel{\text{Gleichung (68)}}{=} \frac{\alpha - 1}{\beta + T}, \quad \alpha > 1 \quad (132)$$

(T = Dauer des Zuverlässigkeitstests, t = Betriebszeit im Feld) und somit ein homogener Poisson-Prozess als Modell für den Betrieb im Feld vorausgesetzt. Annahme 5 ist eine Folge von Annahme 4.

6. Für die Kostengleichung werden nur die systematischen Ausfälle betrachtet, d.h. nur die durch ein Zuverlässigkeitswachstum direkt beeinflussbaren Kosten werden berücksichtigt.

Folgende Notation wird benutzt:

- n = vorgesehene Anzahl Systeme im Einsatz
- ψ = mittlere Einsatzzeit in % pro System und Jahr
- t_G = Garantiedauer in Jahren
- $K(T)$ = zu optimierende Gesamtkosten (Erwartungswert)

- K_T = mittlere Kosten für den Zuverlässigkeitstest pro Zeiteinheit
 K_K = mittlere Kosten pro Realisierung einer Korrekturmassnahme
 K_F = mittlere Kosten pro Feldausfall (zurückzuführen auf einen Fehler) des Systems (Ausführen der Reparatur, inkl. Kosten für das Ersatzteil und die Lagerhaltung der Ersatzteile)
 T = Dauer des Zuverlässigkeitstests (kumulative Testzeit)

Der Erwartungswert der Gesamtkosten lässt sich demnach schreiben als

$$K(T) = K_T \cdot T + K_K \cdot M(T) + n \cdot (p_1 \cdot 1 \cdot K_F + p_2 \cdot 2 \cdot K_F + \dots), \quad (133)$$

wobei p_i die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass in der Zeit $\psi \cdot t_G$ genau i systematische Ausfälle auftreten, somit

$$p_i(t_0, t_0 + \psi \cdot t_G) = \frac{(\lambda(T) \cdot \psi \cdot t_G)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda(T) \cdot \psi \cdot t_G}, \quad (134)$$

Der letzte Term in Gleichung (133) beschreibt (nach Ausklammern von K_F) den Erwartungswert bei der Poisson-Verteilung.

Als Beziehung für die Gesamtkosten erhält man demnach unter Berücksichtigung des Ansatzes für die Erwartungswertfunktion (Gleichung (55)) und der Gleichung (132)

$$K(T) = \underbrace{K_T \cdot T + K_K \cdot \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{T}{\beta}\right)}_{\text{Kosten für die Verbesserung der Zuverlässigkeit}} + \underbrace{K_F \cdot n \cdot \frac{\alpha - 1}{\beta + T} \cdot \psi \cdot t_G}_{\text{Reparaturkosten}}. \quad (135)$$

In Bild 9 ist der prinzipielle Verlauf für den Erwartungswert der Gesamtkosten in Funktion der kumulativen Testzeit angegeben.

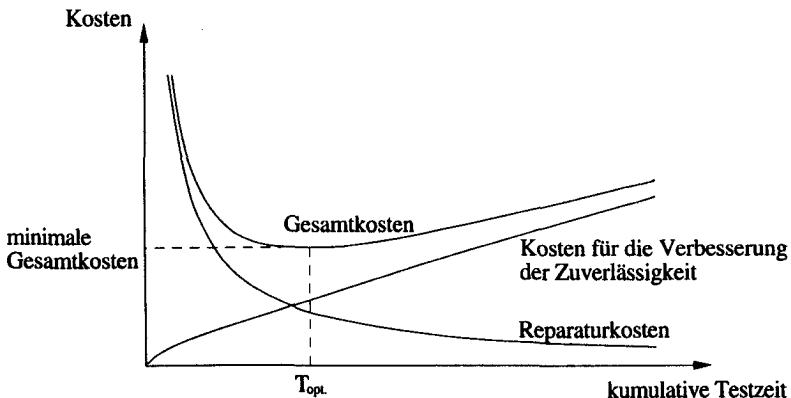


Bild 9 Gesamtkosten in Funktion der Testzeit

Die Minimierung der Gesamtkosten kann durch Nullsetzen der Ableitung nach T erhalten werden:

$$\left. \frac{\partial K(T)}{\partial T} \right|_{T_{\text{opt.}}} = K_T + K_K \cdot \frac{\alpha}{\beta + T_{\text{opt.}}} - K_F \cdot n \cdot \frac{\alpha - 1}{(\beta + T_{\text{opt.}})^2} \cdot \psi \cdot t_G \stackrel{!}{=} 0. \quad (136)$$

Als Resultat folgt:

$$T_{\text{opt.}} = -\frac{\alpha \cdot K_K}{2 \cdot K_T} + \sqrt{\left(\frac{\alpha \cdot K_K}{2 \cdot K_T} \right)^2 + \frac{K_F}{K_T} \cdot n \cdot (\alpha - 1) \cdot \psi \cdot t_G} - \beta. \quad (137)$$

Falls eine negative Lösung für $T_{\text{opt.}}$ erhalten wird, ist $T=0$ als optimale Lösung anzusehen.

Die Schätzung der Parameter α und β erfolgt wie vorgängig beschrieben aufgrund der beobachteten Ausfallzeitpunkte, d.h. diese Schätzung ist dann jeweils zu aktualisieren, wenn im Laufe des Programms zusätzliche Ausfalldaten anfallen.

4. Anwendung der Modelle auf Testdaten aus der Praxis

Ziel dieses Kapitels ist es, die bekannten Modelle gemäss Abschnitt 3.2. mit den neuen Modellen gemäss Abschnitt 3.3. bezüglich Praxistauglichkeit zu vergleichen. Verwendet werden hierzu Originaldaten aus Zuverlässigkeitswachstums-Programmen (siehe Anhang D). Fünf verschiedene Datensätze aus dem Hardware-Bereich stehen dabei zur Diskussion, wobei die jeweilige Anzahl systematischer Ausfälle von 16 bis 73 variiert. Zur Überprüfung der Anwendbarkeit der vorgeschlagenen Modelle im Bereich des Software-Qualitätswachstums wurde ein zusätzlicher Datensatz (NTDS) in die Vergleiche miteinbezogen.

Um einen ersten Überblick über die Daten zu erhalten, werden im Abschnitt 4.1. die Datensätze graphisch dargestellt (kumulative Anzahl systematischer Ausfälle in Funktion der kumulativen Testzeiten).

Für eine aussagekräftige Untersuchung ist das Datenmaterial vom Umfang her gesehen ungenügend, da jeweils nur *eine* Realisierung pro stochastischem Prozess zur Verfügung steht. In Abschnitt 4.3. wird deshalb eine Methode entwickelt, welche die Erzeugung zusätzlicher Realisierungen der Original-Prozesse ermöglicht, dies unabhängig von den in Abschnitt 3.2. und 3.3. beschriebenen parametrischen Modellannahmen für $M(t)$ und $m(t)$, sondern einzig und allein ausgehend von den Original-Datensätzen und der Annahme des inhomogenen Poisson-Prozesses als Beschreibung der zugrundeliegenden stochastischen Prozesse.

4.1. Visualisierung der Testdaten

Die für die Modellvergleiche in diesem Kapitel herangezogenen Testdaten (Zeitpunkte der als systematisch klassifizierten Ausfälle) stammen aus sechs unterschiedlichen Quellen (siehe Anhang D). Die Daten repräsentieren unterschiedlichste Anwendungen.

Aufgrund der entsprechenden Veröffentlichungen lassen sich keine sicheren Folgerungen in bezug auf die Qualität der Testdatenerfassung und Ausfallklassifizierung ziehen (vgl. auch Abschnitt 2.2.). Die Visualisierung der Testdaten anhand ihrer empirischen Verteilungsfunktion (vgl. Abschnitt 4.2.) ermöglicht es, auf einfache Weise mögliche Ungeheimheiten in den Daten zu erkennen. In den Bildern 10 bis 15 sind die entsprechenden Verläufe für die verschiedenen Datensätze dargestellt.

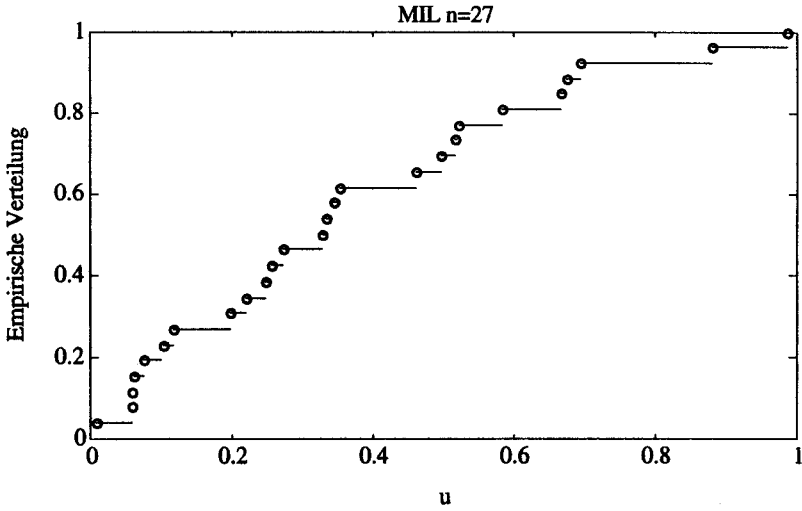


Bild 10 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [MIL189], $u = t/t_n$)

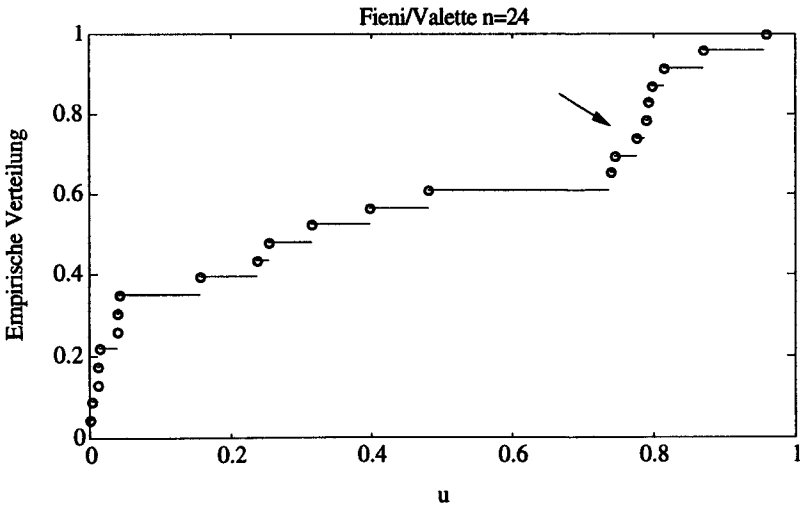


Bild 11 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [Fien90], $u = t/t_n$)

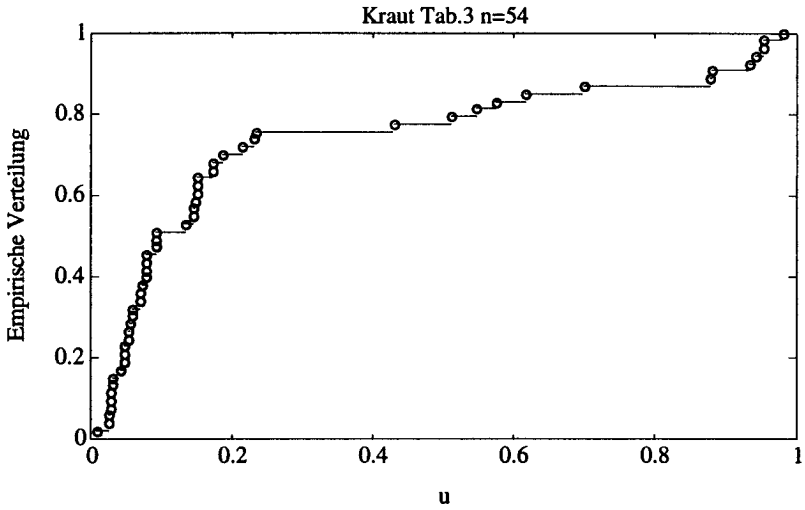


Bild 12 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [Krau87, Tab. 3], $u = t/t_n$)

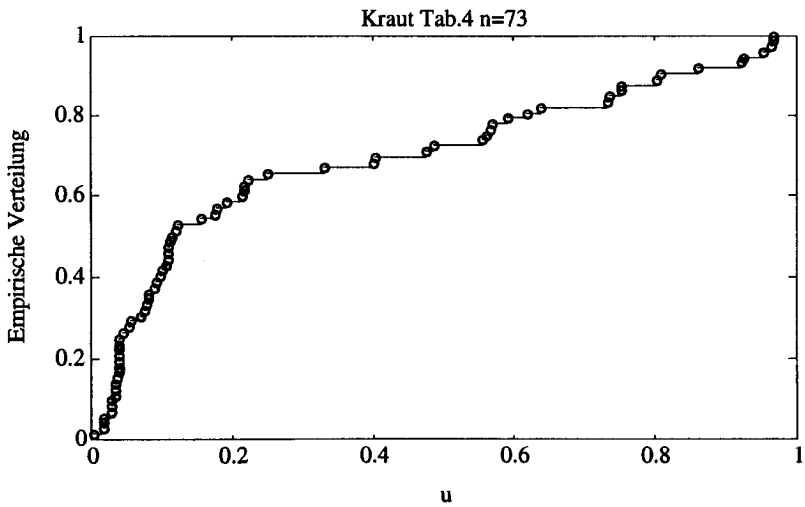


Bild 13 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [Krau87, Tab.4], $u = t/t_n$)

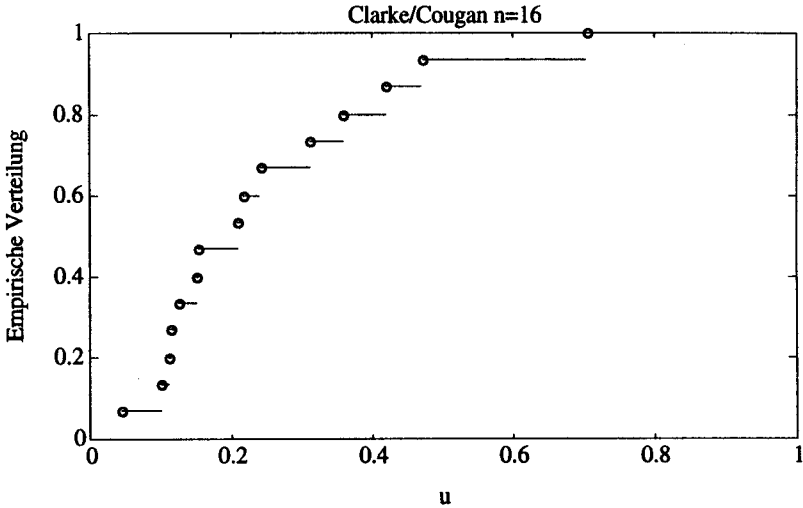


Bild 14 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [Clar78], $u = t/t_n$)

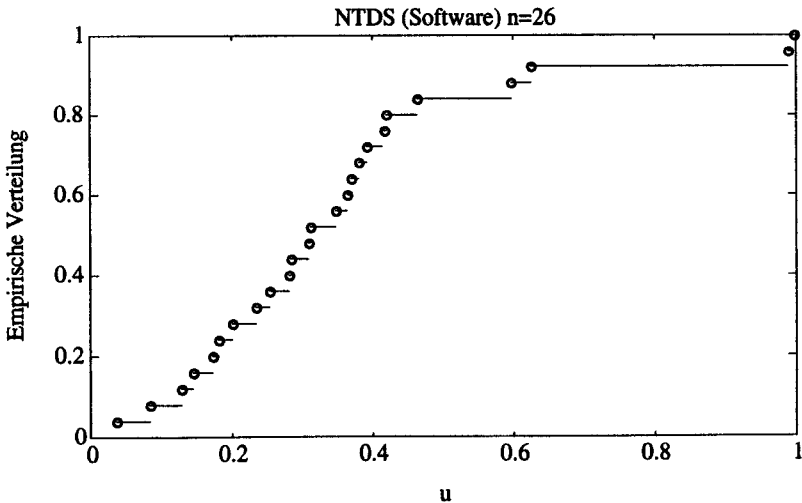


Bild 15 Empirische Verteilungsfunktion (Daten [Hoss93], $u = t/t_n$)

Mit Ausnahme des Datensatzes von Fieni/Valette fallen keine Besonderheiten auf. Bei diesem hingegen scheint der zugrundeliegende stochastische Prozess bei $u \approx 0.75$ (im Bild 11 mit einem Pfeil gekennzeichnet) eine Änderung zu erfahren. In [Fien90] ist der Grund dafür nicht angegeben. Für die nachfolgend beschriebenen Untersuchungen werden deshalb nur die ersten 15 Ausfälle berücksichtigt.

4.2. Entwicklung der Untersuchungsmethode

Als Basis für die Untersuchung dient folgende Eigenschaft des inhomogenen Poisson-Prozesses ($\tau_i \rightarrow$ Zufallsgrösse; $T, s \rightarrow$ gegeben, fest; Herleitung siehe [Thom81]):

Gegeben ist ein inhomogener Poisson-Prozess mit der Mittelwertfunktion $M(t)$ und der Intensität $m(t)=dM(t)/dt$. Unter der Bedingung $\tau_n = s$ (ausfallgestutzt) gilt: Die Zeitpunkte der einzelnen Ausfälle $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_{n-1}$ bilden eine geordnete Stichprobe vom Umfang $n-1$ einer auf $[0, s]$ gemäss Verteilung

$$F(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{M(s)} & 0 \leq t \leq s \\ 1 & t > s \end{cases} \quad (138)$$

und Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{m(t)}{M(s)} & 0 \leq t \leq s \\ 0 & t > s \end{cases} \quad (139)$$

verteilten zufälligen Grösse.

Für den zeitgestutzten Fall ($N(T) = n$) gilt entsprechend: Die Zeitpunkte der einzelnen Ausfälle $\tau_1 \leq \dots \leq \tau_n$ bilden eine geordnete Stichprobe vom Umfang n einer auf $[0, T]$ gemäss Verteilung

$$F(t) = \begin{cases} \frac{M(t)}{M(T)} & 0 \leq t \leq T \\ 1 & t > T \end{cases} \quad (140)$$

und Dichte

$$f(t) = \begin{cases} \frac{m(t)}{M(T)} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (141)$$

verteilten zufälligen Grösse.

Im folgenden wird man sich hier auf den ausfallgestutzten Fall beschränken, ferner wird einer besseren Vergleichbarkeit der verschiedenen Datensätze wegen eine Transformation der Zeitpunkte der systematischen Ausfälle auf $[0, 1]$ vorgenommen, also:

Unter der Bedingung $\tau_n = s$ folgt, dass $\tau_1/s, \dots, \tau_{n-1}/s$ eine geordnete Stichprobe vom Umfang $n-1$ einer auf $[0, 1]$ gemäss Verteilung

$F_0(u) = \frac{M(u \cdot s)}{M(s)} \left(= \frac{M(t)}{M(s)} \right)$ verteilten Zufallsgrösse bilden.

Dabei ist $u = t/s$.

Wichtig ist zu beachten, dass alles was im folgenden beschrieben wird, nur unter der Bedingung $\tau_n = s$ zu sehen ist.

Für die einzelnen Modelle lauten die entsprechenden Beziehungen (mit $0 \leq u \leq 1$):

(I) AMSAA - Modell

$$M_1(t) = \gamma \cdot t^\delta$$

$$\rightarrow F_{0,1}(u) = \frac{\gamma \cdot (u \cdot s)^\delta}{\gamma \cdot s^\delta} = u^\delta \quad (142)$$

(II) Modifiziertes AMSAA - bzw. Musa / Okumoto - Modell
(logarithmisches Poisson - Modell)

$$M_2(t) = \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$$

$$\rightarrow F_{0,2}(u) = \frac{\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{u \cdot s}{\beta}\right)}{\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{s}{\beta}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{u \cdot s}{\beta}\right)}{\ln\left(1 + \frac{s}{\beta}\right)} \quad (143)$$

(III) Cox / Lewis - bzw. Goel / Okumoto - Modell
(exponentielles Poisson - Modell)

$$M_3(t) = a \cdot (1 - e^{-t/b})$$

$$\rightarrow F_{0,3}(u) = \frac{a \cdot (1 - e^{-u \cdot s/b})}{a \cdot (1 - e^{-s/b})} = \frac{1 - e^{-u \cdot s/b}}{1 - e^{-s/b}} \quad (144)$$

(IV) Yamada / Osaki - Modell (S - förmiges Poisson - Modell)

$$M_4(t) = c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$$

$$\rightarrow F_{0,4}(u) = \frac{1 - \left(1 + \frac{u \cdot s}{d}\right) \cdot e^{-u \cdot s/d}}{1 - \left(1 + \frac{s}{d}\right) \cdot e^{-s/d}} \quad (145)$$

(V) Erstes neues Modell

(logarithmisch - exponentielles Poisson - Modell)

$$M_5(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

$$\rightarrow F_{0,5}(u) = \frac{\ln\left(1 + \frac{u \cdot s}{b}\right) \cdot (1 - e^{-u \cdot s/b})}{\ln\left(1 + \frac{s}{b}\right) \cdot (1 - e^{-s/b})} \quad (146)$$

(VI) Zweites neues Modell

$$M_6(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma} \right]$$

$$\rightarrow F_{0,6}(u) = u^\beta \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{u \cdot s}{\gamma}\right) \cdot e^{-u \cdot s/\gamma}}{1 - \left(1 + \frac{s}{\gamma}\right) \cdot e^{-s/\gamma}} \quad (147)$$

Unter der Bedingung $\tau_n = s$ können wir jetzt durch Übergang von $N(t)$, $0 \leq t \leq s$, zu $N_0(u) = N(u \cdot s)$, $0 \leq u \leq 1$, und unter Benutzung der entsprechenden Eigenschaft, dass für $\tau_n = s$ die Grössen $\tau_1/s, \dots, \tau_{n-1}/s$ eine geordnete Stichprobe vom Umfang $n-1$ einer gemäss $F_{0,k}(u)$, $0 \leq u \leq 1$ (k je nach Modell) verteilten zufälligen Grösse bilden, statistische Untersuchungen bzw. Vergleiche durchführen.

Ein Modell kann als plausibel angesehen werden, wenn der Abstand zwischen der empirischen Verteilung

$$\hat{F}_0^{n-1}(u) = \frac{\text{Anzahl}\{u_i \leq u\}}{n-1}$$

und der "Modellverteilung" $F_0(u)$ (vgl. Bild 16) nicht signifikant gross ist. Als Anpassungstests in diesem Sinne kommen z.B. die Kolmogorow-Smirnow- oder die Cramér-von Mises-Statistik in Frage (vgl. Abschnitte 4.4.1. und 4.4.2.1.). Anhand von kritischen Werten kann dann jeweils ein Entscheid bezüglich Ablehnung bzw. Nichtablehnung gefällt werden, wobei Nichtablehnung als "Es spricht nichts gegen das Modell" zu verstehen ist. Das Modell, das am wenigsten oft abgelehnt wird, erscheint demnach am plausibelsten. Bei Einsetzen von geschätzten Parametern in $F_0(u)$, statt bekannter Werte wie oben erwähnt, entsteht das Problem, die kritischen Werte zu bestimmen (diese werden dann im allgemeinen parameterabhängig und können somit nicht mehr den allgemeinen Tabellen entnommen werden). Ein Ausweg aus dieser Situation bietet einerseits wie in Abschnitt 4.4.2.1. beschrieben die "Methode der halben Stichprobe" bzw. andererseits der χ^2 -Anpassungstest, welcher auch im Falle von geschätzten Parametern direkt anwendbar bleibt.

Die Parameter lassen sich unter der Bedingung $\tau_n = s$ direkt aus den Verteilungsfunktionen $F_{0,k}(u)$ bzw. den Verteilungsdichten $f_{0,k}(u)$ bestimmen. Für die Likelihood-Funktion folgt ausgehend von der Verteilungsdichte $f_{0,k}(u) = dF_{0,k}(u)/du$

$$L_k = \prod_{i=1}^{n-1} f_{0,k}(u_i). \quad (148)$$

Es ergeben sich wieder dieselben Beziehungen für die Schätzung der freien Parameter wie im Abschnitt 3.1.2.1. bzw. 3.3. (ausfallgestutzt), wobei jetzt n durch $n-1$, t_i durch u_i -s und t_n durch s zu ersetzen ist.

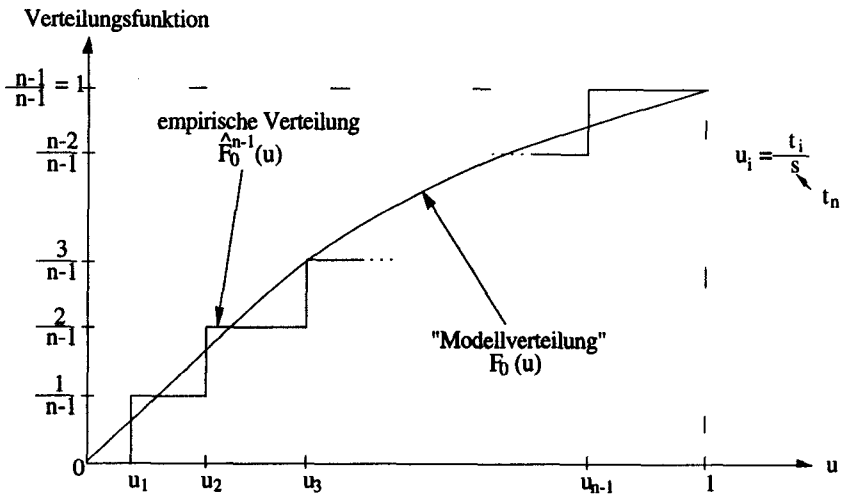


Bild 16 Empirische Verteilung und "Modellverteilung"

4.3. Erzeugung zusätzlicher Datensätze

Um die Robustheit der getroffenen Modellwahl gegenüber leichten Veränderungen der Daten überprüfen zu können, wird im folgenden eine Methode zur Erzeugung von zusätzlichen Datensätzen ausgehend von den zur Verfügung stehenden Original-Datensätzen entwickelt.

Vorausgesetzt wird wiederum der inhomogene Poisson-Prozess. Unter der Bedingung $\tau_n = s$ (s gegeben) lässt sich wie im vorhergehenden Abschnitt die empirische Verteilung pro Datensatz angeben, die hier aber stückweise auf die halbe Stufenhöhe (naheliegende Festlegung) linearisiert wird, um die Simulation zusätzlicher Datensätze zu ermöglichen, $F_0^*(u)$ in Bild 17.

Die Verteilungsfunktion $F_0^*(u)$ unter der Bedingung $\tau_n = s$ ist pro Datensatz repräsentativ für den jeweiligen zugrundeliegenden Prozess. Es lassen sich so also zusätzliche Datensätze erzeugen, und dies (weil direkt mit der empirischen Verteilung)

funktion gearbeitet wird) unabhängig von den parametrischen Ansätzen für die verschiedenen zu vergleichenden Modelle, sodass ein fairer Modellvergleich möglich ist. Es ist allerdings zu beachten, dass in den zusätzlich realisierten Stichproben $t_i \leq \tau_n$ gilt, was offenbar eine Einschränkung der "Nachbildung realer Prozesse" darstellt (man ist dabei darauf angewiesen, dass die zugrundeliegende (erste) Realisierung für den Prozess repräsentativ sei).

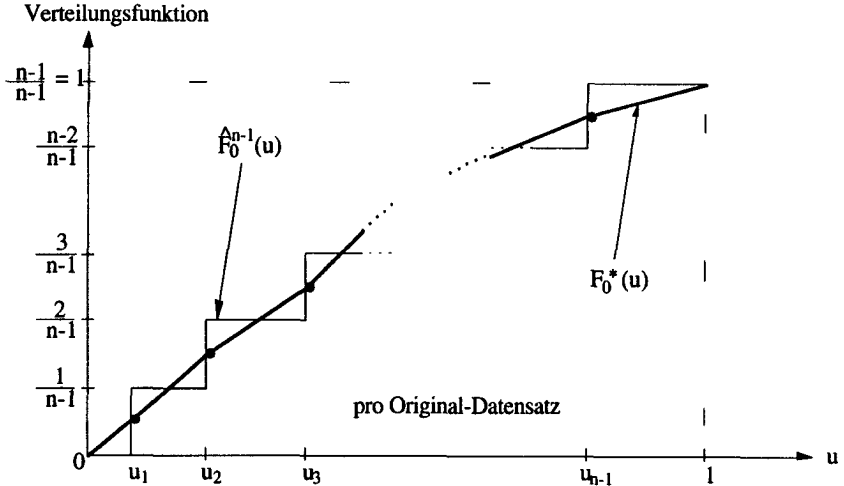


Bild 17 Verteilungsfunktion $F_0^*(u)$ für Simulation

Für die Simulation der zusätzlichen Datensätze kann jetzt auf die Technik der Monte Carlo Simulation zur Erzeugung von Zufallsvariablen ausgehend von einer Verteilungsfunktion zurückgegriffen werden [Bain78].

Dabei wird von der Tatsache ausgegangen, dass für eine kontinuierliche Zufallsgrösse X die Funktion $V = F_X(X)$ gleichverteilt ist, da

$$F_V(v) = \Pr\{\underbrace{F_X(X)}_V \leq v\} = \Pr\{X \leq \underbrace{F_X^{-1}(v)}_x\} = F_X(\underbrace{F_X^{-1}(v)}_x) = v, \quad 0 < v \leq 1$$

$$F_V(v) = 0 \quad \text{für } v \leq 0, \quad F_V(v) = 1 \quad \text{für } v > 1$$

$$\rightarrow f_V(v) = 1 \quad \text{für } 0 \leq v \leq 1.$$

Umgekehrt bedeutet dies, falls V gleichverteilt auf $[0,1]$ erzeugt wird, so folgt für die Grösse $X = F_X^{-1}(V)$, dass diese gemäss $F_X(x)$ verteilt ist. Die Simulation zusätzlicher Datensätze erfolgt somit durch Erzeugung gleichverteilter geordneter Werte auf $[0,1]$, die dann über die Umkehrfunktion $[F_0^*]^{-1}$ auf Werte für u_i transformiert werden (vgl. Bild 18).

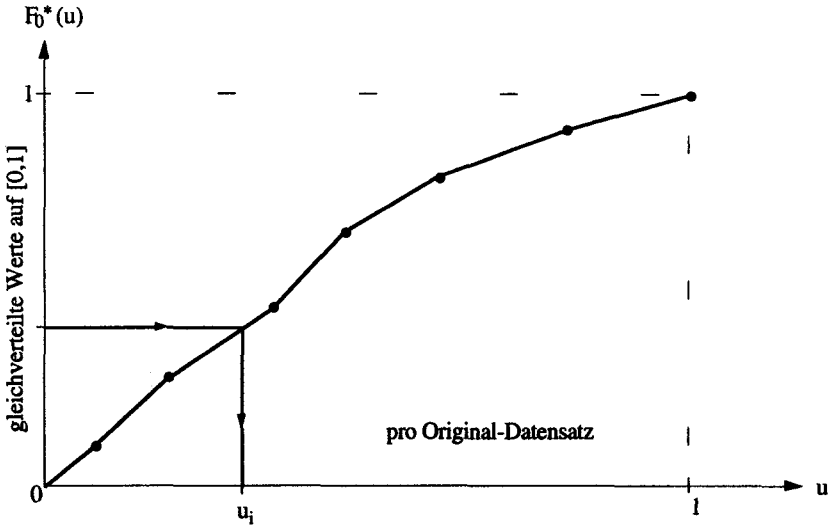


Bild 18 Erzeugung zusätzlicher Datensätze

Wird jetzt die Anzahl der erzeugten Werte pro Datensatz gleich $n-1$ entsprechend dem Original-Datensatz gewählt, so werden zusätzliche Realisierungen erhalten (t_n fest gegeben), die dem Original-Prozess hätten entstammen können. Dies wäre bei Erhöhung der Stichprobenumfänge nicht mehr der Fall, da die Methode gemäss Voraussetzung nur für $\tau_n = s$ gilt. Werden mehr Ausfallzeitpunkte erzeugt, als dies im Original-Prozess der Fall war, so sind diese neu erhaltenen Datensätze nicht mehr für den Original-Prozess repräsentativ, d.h. eine Erhöhung der Stichprobenumfänge entspricht dann nicht einer Verlängerung der Beobachtungsdauer (d.h. Beobachtung zusätzlicher systematischer Ausfälle desselben Prozesses). Dieser Sachverhalt wird auch aus der Betrachtung der Verteilungsfunktionen $F_{0,k}$ (k je nach Modell, siehe Abschnitt 4.2.) ersichtlich, die mit Ausnahme derjenigen für das AMSAA-Modell von der Zeit des letzten systematischen Ausfalls s abhängig sind und somit ihre Form ändern für verschiedene s , auch wenn die entsprechenden Parameter, die den jeweiligen Prozess beschreiben, unverändert bleiben. Deshalb wird im folgenden bei den Simulationen von einer — vom statistischen Standpunkt aus gesehen an sich wünschbaren und ohne weiteres möglichen — Erhöhung der Stichprobenumfänge abgesehen.

Wichtig scheint hierbei in bezug auf einen fairen Modellvergleich, dass die Erzeugung der zusätzlichen Daten unabhängig von den entsprechenden Modellannahmen geschah.

4.4. Vergleich des grundsätzlichen Verhaltens

Um die Eignung zur Beschreibung des Prozesses des Auftretens von systematischen Ausfällen zu untersuchen, werden die bekannten Modelle gemäss Abschnitt 3.2. mit den neuen Modellen gemäss Abschnitt 3.3 verglichen. Dies einerseits anhand von Vergleichsgrössen und andererseits auf der Basis zusätzlich erzeugter Daten, um Aussagen zur Robustheit der getroffenen Modellwahl gegenüber leichten Veränderungen der Daten zu erhalten.

4.4.1. Vergleichsgrössen

4.4.1.1. D, W² und A²

Als erste Vergleichsgrössen kommen die zum Teil später bei den Anpassungstests basierend auf der empirischen Verteilungsfunktion (Abschnitt 4.4.2.1.) verwendeten Grössen D (Kolmogorow-Smirnow Statistik), W² (Cramér-von Mises Statistik) und A² (Anderson-Darling Statistik) in Frage, die wie folgt definiert werden (vgl. Anhang B):

$$D^+ = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ \frac{i}{n-1} - F_0(u_i) \right\}, \quad D = \max(D^+, D^-) \quad (149)$$

$$D^- = \max_{1 \leq i \leq n-1} \left\{ F_0(u_i) - \frac{i-1}{n-1} \right\},$$

$$W^2 = \frac{1}{12 \cdot (n-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ F_0(u_i) - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot (n-1)} \right\}^2 \quad (150)$$

$$A^2 = -(n-1) \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left[(2 \cdot i - 1) \cdot \ln(F_0(u_i)) + \{2 \cdot (n-1) + 1 - 2 \cdot i\} \cdot \ln(1 - F_0(u_i)) \right]. \quad (151)$$

Obige Beziehungen beruhen wiederum auf der Bedingung $\tau_n = s$ und der Eigenschaft, dass unter dieser Bedingung die Grössen τ_i/s , $i = 1, \dots, n-1$, eine geordnete Stichprobe vom Umfang $n-1$ einer gemäss $F_0(u)$ verteilten Zufallsgrösse bilden ($u_i = \tau_i/s$). Es wird dann jeweils der Unterschied zwischen der empirischen Verteilung (z.B. für W² entspricht diese der halben Stufenhöhe $(2 \cdot i - 1) / \{2 \cdot (n-1)\}$) und der "Modellverteilung" $F_0(u)$ berechnet.

Tab. 1 zeigt einen Vergleich der Modelle gemäss den Gleichungen (142) - (147) anhand der Grössen D, W² und A² (die Modellparameter wurden mit Hilfe der Maximum-Likelihood Methode geschätzt, da wie in Abschnitt 3.2. erwähnt die Methode der kleinsten Quadrate beim exponentiellen Poisson-Modell und beim S-förmigen Poisson-Modell bezogen auf die vorliegenden Datensätze z.T. unrealistische Resultate liefert).

Kriterium, Modell M(t)		Datensatz						Durchschnitt
		MIL n-1=26	Fieni/ Valette n-1=14	Kraut Tab. 3 n-1=53	Kraut Tab.4 n-1=72	Clarke/ Cougan n-1=15	NTDS n-1=25	
D	$\gamma \cdot t^\delta$	0.160	0.224	0.268	0.199	0.324	0.316	0.248
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	0.115	0.139	0.173	0.131	0.243	0.244	0.174
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.101	0.383	0.245	0.242	0.192	0.204	0.228
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	0.164	0.498	0.365	0.351	0.201	0.186	0.294
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.095	0.236	0.148	0.118	0.210	0.208	0.169
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	0.137	0.206	0.010	0.090	0.134	0.162	0.138
W ²	$\gamma \cdot t^\delta$	0.149	0.107	0.923	0.589	0.489	0.570	0.471
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	0.053	0.049	0.407	0.234	0.258	0.312	0.219
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.044	0.390	0.974	0.976	0.126	0.231	0.457
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	0.106	0.696	2.391	2.507	0.142	0.123	0.994
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.051	0.181	0.300	0.167	0.189	0.180	0.178
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	0.080	0.085	0.091	0.107	0.062	0.096	0.087
A ²	$\gamma \cdot t^\delta$	0.807	0.624	4.470	2.966	2.436	2.758	2.343
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	0.351	0.341	2.412	1.621	1.428	1.773	1.321
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.301	3.148	5.441	5.607	0.794	1.485	2.796
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	1.155	9.590	17.261	20.954	0.707	0.939	8.374
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.417	0.960	1.810	1.417	1.030	1.126	1.127
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	0.517	0.511	1.004	0.857	0.396	0.770	0.676

Tab. 1 Modellvergleich anhand D, W² und A² auf Basis der Originaldaten

Fett gedruckt sind die pro Datensatz (siehe Anhang D) kleinsten Werte der Grössen D , W^2 und A^2 , was jeweils auf das plausibelste Modell hinweist (geringster Unterschied zwischen der empirischen Verteilung und der entsprechenden "Modellverteilung" $F_0(u)$). In der letzten Kolonne sind die durchschnittlichen Werte der Testgrössen für die einzelnen Modelle (gemittelt über die sechs Datensätze) angegeben.

Aus der Tab. 1 lässt sich ersehen, dass bei einem Vergleich der Modelle anhand der vorliegenden Daten aus der Praxis (die unabhängig von irgendwelchen Modellannahmen sind) bezüglich der Werte D , W^2 und A^2 das zweite neue Modell

$$M_6(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma} \right) \cdot e^{-t/\gamma} \right]$$

am besten abschneidet, d.h. in vier von sechs Fällen den geringsten Unterschied zwischen der empirischen Verteilung und der "Modellverteilung" liefert, in den restlichen zwei Fällen noch akzeptable Werte für die Testgrössen aufweist (nicht signifikant bezüglich der kritischen Werte von Abschnitt 4.4.2.1.) und im Mittel über alle sechs Datensätze die mit Abstand geringsten Werte für D , W^2 und A^2 ergibt.

Das erste neue Modell

$$M_5(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

weist bei den Datensätzen von Kraut (Tab. 3 und Tab. 4) Vorteile gegenüber den bekannten Modellen auf, bei den restlichen Datensätzen entstehen keine gravierenden Nachteile, da gleichmässig tiefe Werte für die Testgrössen resultieren (nicht signifikant in bezug auf die kritischen Werte von Abschnitt 4.4.2.1.), was dazu führt, dass dieses Modell im Mittel über alle Datensätze besser abschneidet als die bekannten Modelle.

Obiger Sachverhalt gilt vorerst unabhängig davon, ob sich der Unterschied erhärten lässt, dazu dienen dann die Testverfahren mit den zusätzlich erzeugten Datensätzen (siehe Abschnitt 4.4.2.).

Das unterschiedliche Verhalten der Modelle lässt sich am besten anhand einer graphischen Darstellung wie im Abschnitt 4.2. beschrieben aufzeigen. In den Bildern 19 bis 30 sind die Vergleiche der empirischen Verteilungen mit den verschiedenen "Modellverteilungen" für die vorliegenden Datensätze dargestellt (die Modellparameter wurden mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt). Deutlich zu sehen ist der ausgeprägt S-förmige Verlauf des Yamada/Osaki-Modells (Modell 4), was aber mit Ausnahme des Softwaredatensatzes (NTDS) und des Datensatzes von Clarke/Cougan bei den vorliegenden Datensätzen vor allem bei kleinen Testzeiten zu grossen Abweichungen zwischen der empirischen Verteilung und der "Modellverteilung" führt. Weit weniger ausgeprägt ist dieses Verhalten bei den neuen Modellen, die ja auch S-förmige Verläufe (der Mittelwertfunktionen) aufweisen, die Umkehrpunkte aber mit Ausnahme des Softwaredatensatzes (NTDS) und des Datensatzes von Clarke/Cougan schon bei kleineren Zeiten auftreten. Die neuen Modelle erweisen sich somit als flexibel genug, um sowohl S-förmige wie auch nicht S-förmige Verläufe geeignet nachbilden zu können.

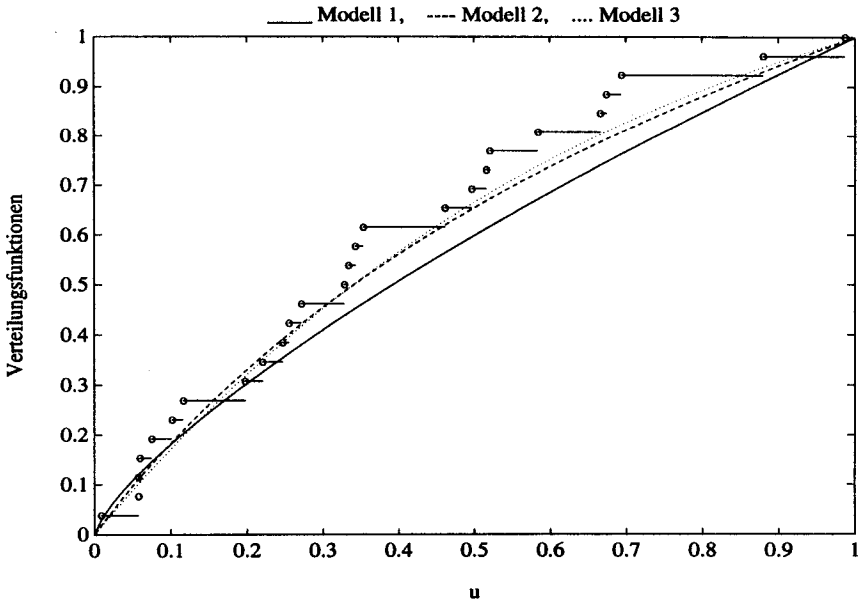


Bild 19 Empirische Verteilung (Daten [MIL189])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

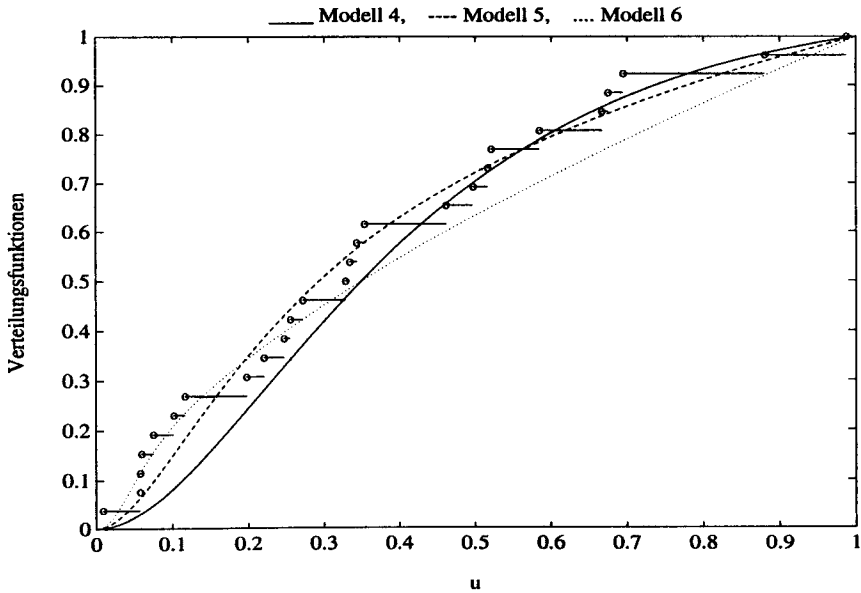


Bild 20 Empirische Verteilung (Daten [MIL189])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

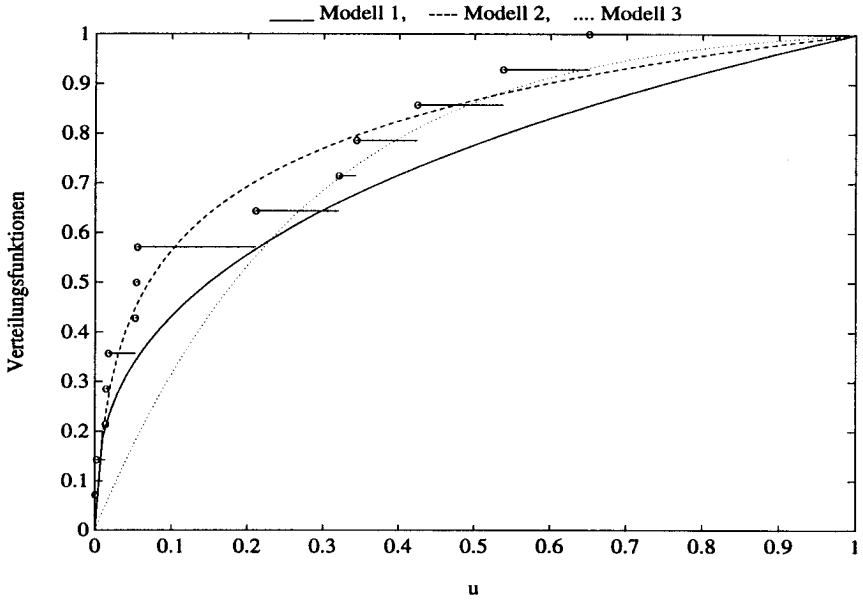


Bild 21 Empirische Verteilung (Daten [Fien90])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

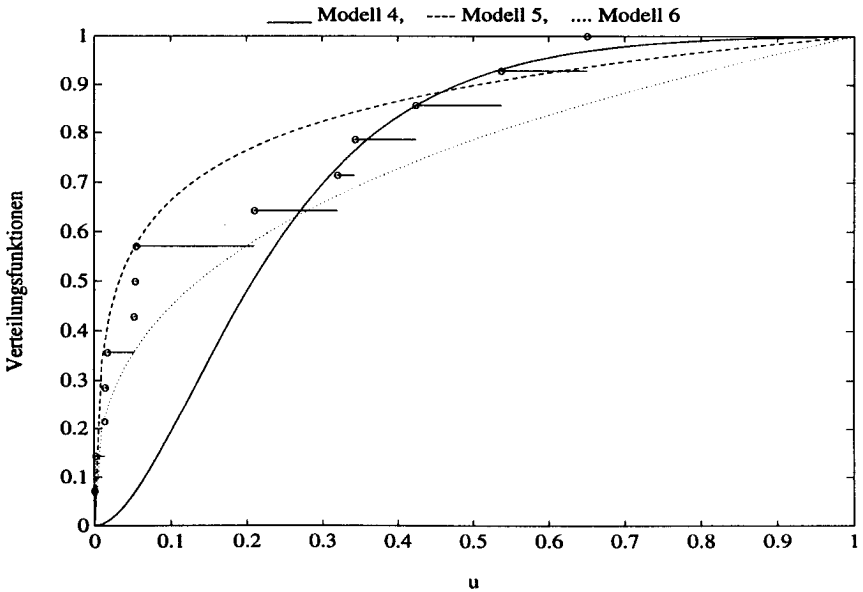


Bild 22 Empirische Verteilung (Daten [Fien90])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

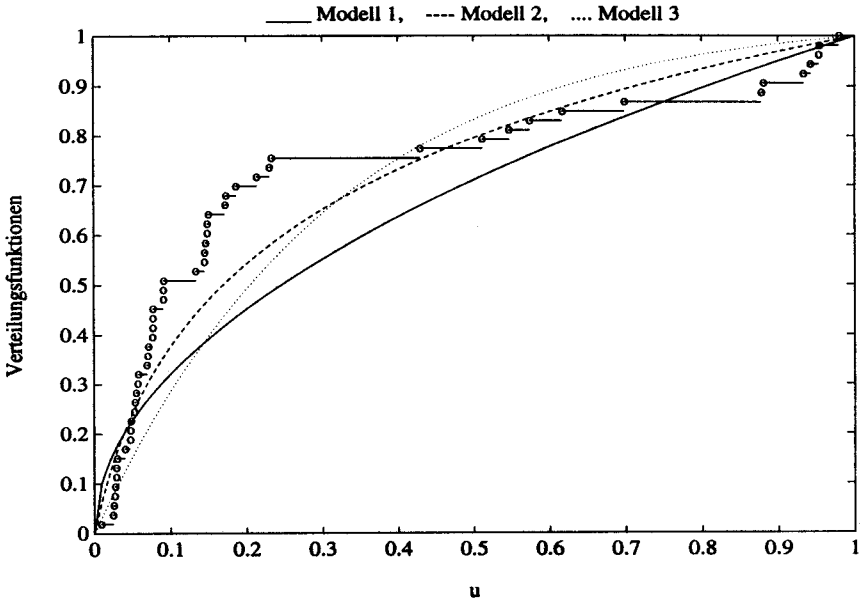


Bild 23 Empirische Verteilung (Daten [Krau87, Tab. 3])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

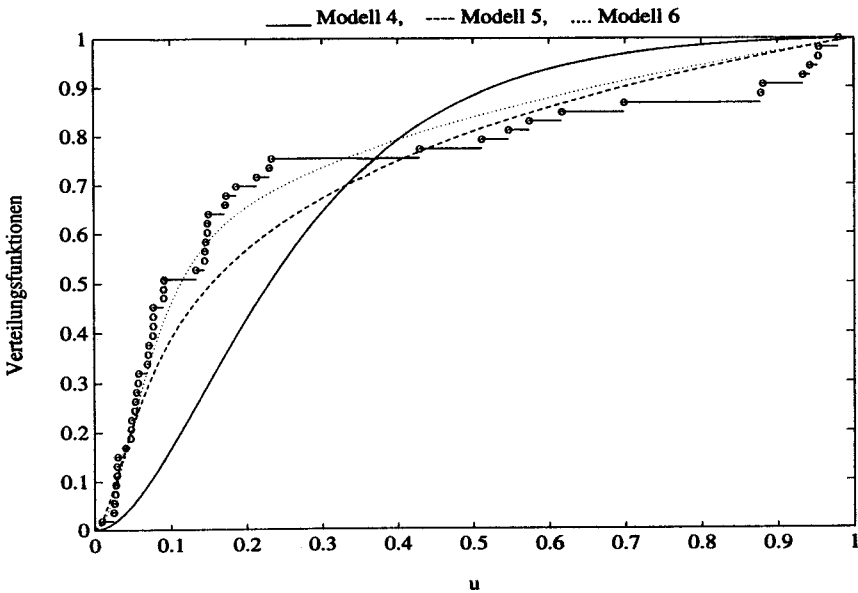


Bild 24 Empirische Verteilung (Daten [Krau87, Tab. 3])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

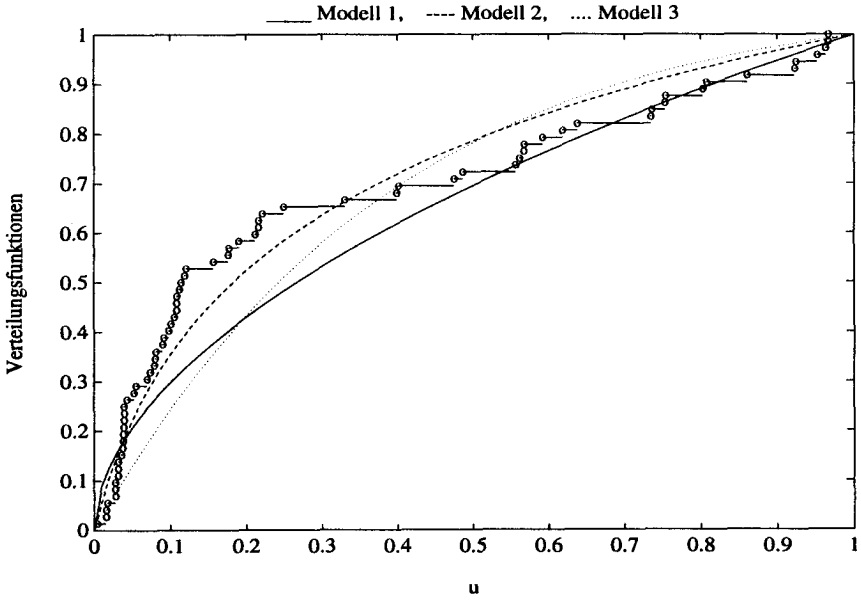


Bild 25 Empirische Verteilung (Daten [Krau87, Tab. 4])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

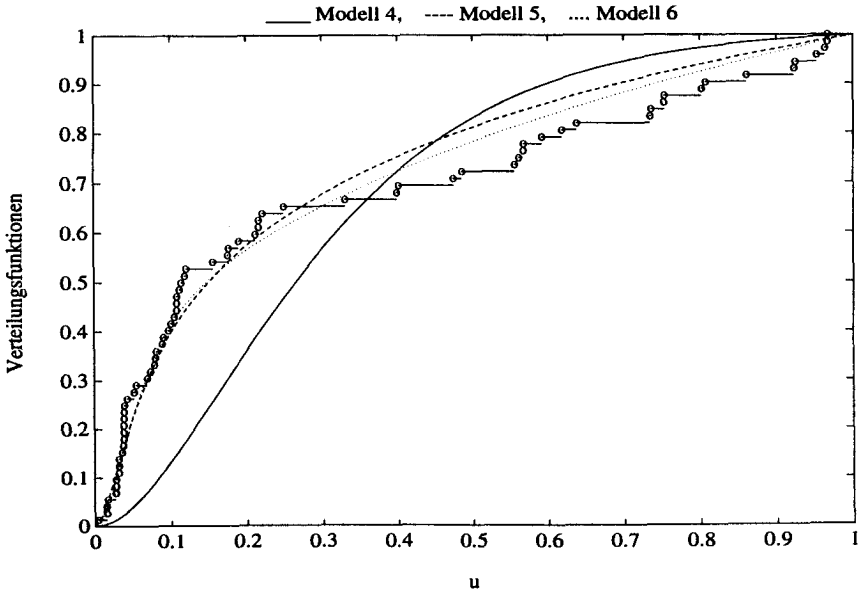


Bild 26 Empirische Verteilung (Daten [Krau87, Tab. 4])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

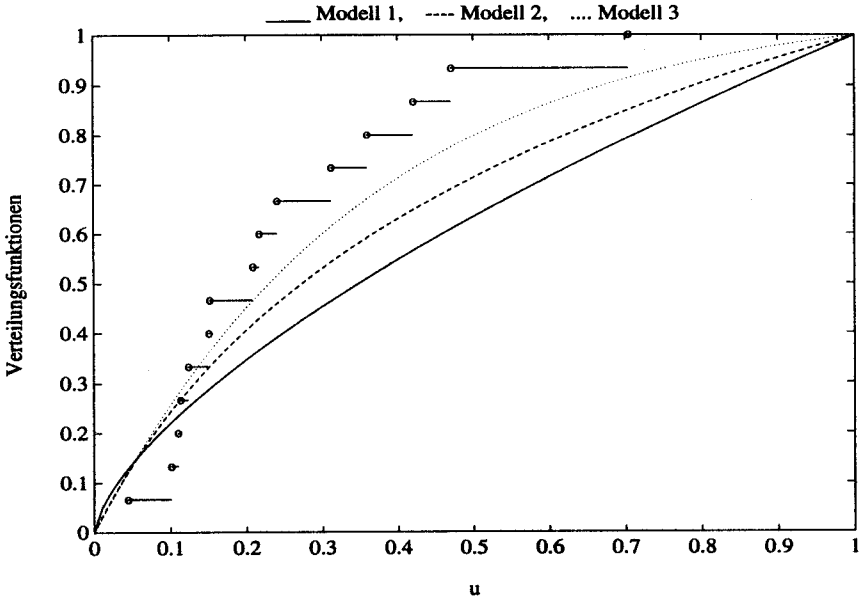


Bild 27 Empirische Verteilung (Daten [Clar78])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

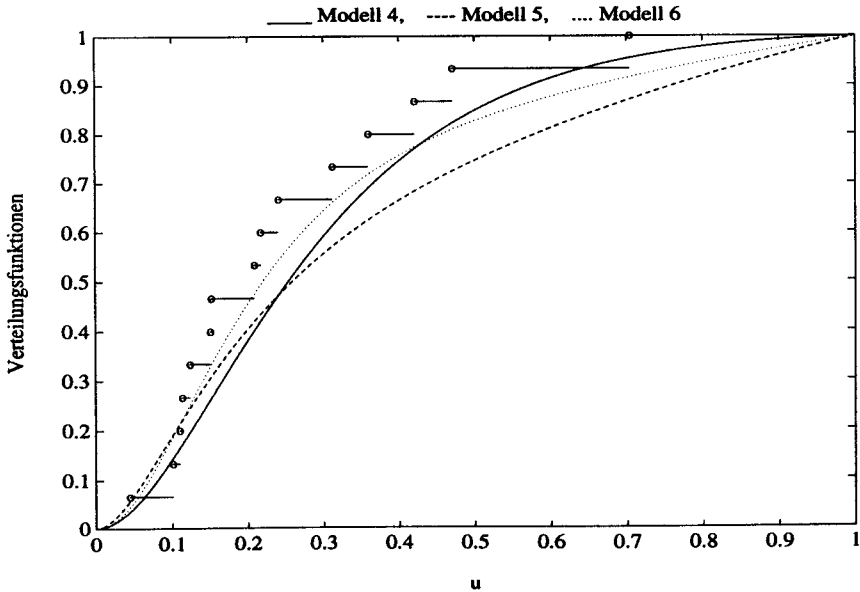


Bild 28 Empirische Verteilung (Daten [Clar78])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

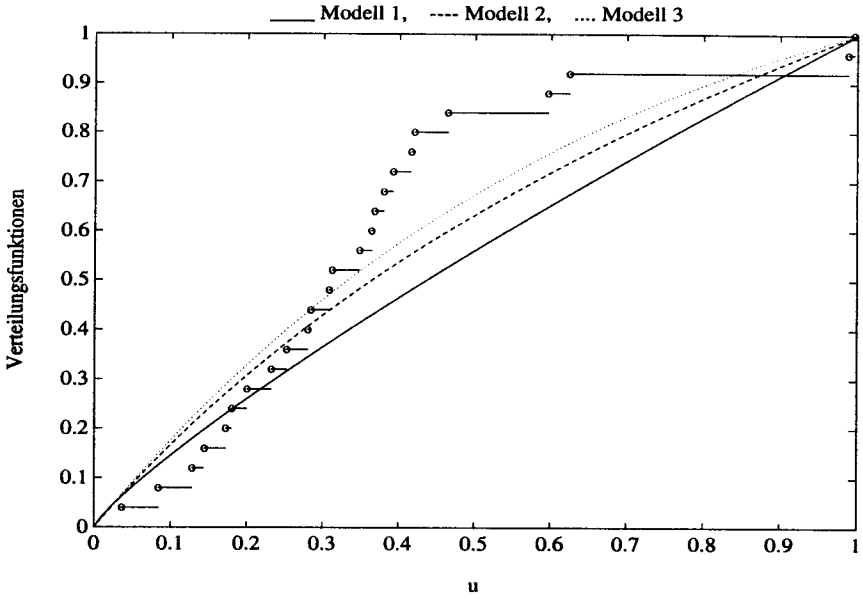


Bild 29 Empirische Verteilung (Daten [Hoss93])
und Modelle 1 bis 3 (Gl. (142)-(144))

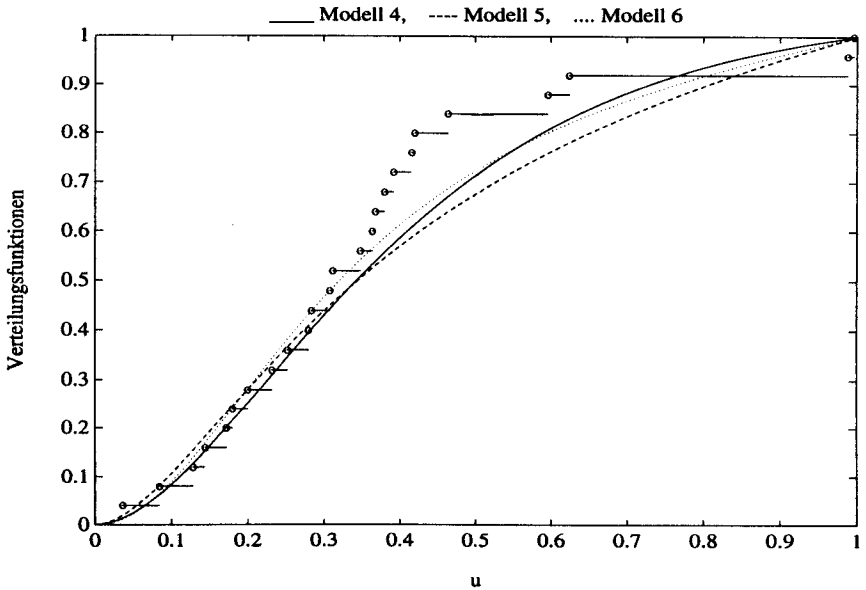


Bild 30 Empirische Verteilung (Daten [Hoss93])
und Modelle 4 bis 6 (Gl. (145)-(147))

Es fällt auf, dass das bekannteste Modell, nämlich das AMSAA-Modell bei den vorliegenden Datensätzen eine unbefriedigende Anpassung vor allem bei mittleren und grossen Testzeiten ergibt. Bei allen Datensätzen schneidet dahingegen die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Modifikation des AMSAA-Modells (logarithmisches Poisson-Modell) besser ab. Das exponentielle Poisson-Modell hingegen weist vor allem bei kleinen Testzeiten relativ grosse Abweichungen zu den vorliegenden Daten auf.

4.4.1.2. Maximaler Wert der Likelihood-Funktion

Als weitere Vergleichsgrösse kann (in Anlehnung an die Likelihood-Verhältnis Tests [Bain78]) der maximale Wert der Likelihood-Funktion, also

$$L(t_1, \dots, t_n, \hat{\theta})$$

dienen (vgl. Anhang B). Es erscheint dann dasjenige Modell am plausibelsten, welches den grössten maximalen Wert der Likelihood-Funktion und somit die grösste Wahrscheinlichkeit für die beobachtete Realisierung liefert.

Tab. 2 fasst die Resultate zusammen (für jedes Modell Angabe des Wertes der Likelihood-Funktion an der Stelle der Maximum-Likelihood Schätzwerte für die Parameter, **fett** ist das pro Datensatz plausibelste Modell gekennzeichnet).

Datensatz	MIL ·10 ⁻³⁹	Fieni/ Valette ·10 ⁻³⁶	Kraut Tab. 3 ·10 ⁻¹⁶⁰	Kraut Tab.4 ·10 ⁻²²⁷	Clarke/ Cougan ·10 ⁻³⁸	NTDS ·10 ⁻³⁷
$\gamma \cdot t^\delta$	1.498	1.662	1.234	2.573	1.104	2.199
$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	2.943	1.630	2021	892.47	7.128	8.234
$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	2.957	0.016	3.919	0.349	15.078	12.250
$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	0.180	7·10 ⁻⁹	2·10 ⁻⁸	~0	32.392	72.072
$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	1.328	0.555	3·10 ⁵	3·10 ⁴	53.054	93.942
$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	2.185	3.588	6·10⁶	3·10⁵	129.91	212.49

Tab. 2 Vergleich der maximalen Werte der Likelihood-Funktionen

Auch bei diesem Vergleich erscheint das zweite neue Modell

$$M_6(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$$

am plausibelsten. In Übereinstimmung mit den Resultaten des Modellvergleichs anhand D , W^2 und A^2 erweist sich auch das erste neue Modell

$$M_3(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

als den bekannten Modellen überlegen. Im weiteren fällt auf, dass das S-förmige Poisson-Modell

$$M_4(t) = c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d} \right]$$

in vielen Fällen schlecht bis sehr schlecht abschneidet (MIL, Fieni/Valette, Kraut Tab. 3 und Tab. 4). Dies war auch schon bei den Vergleichsgrößen D , W^2 und A^2 zu beobachten (Tab. 1).

4.4.2. Vergleich anhand zusätzlich erzeugter Daten

Mit den bisher betrachteten Vergleichsgrößen wurden auf einer einfachen Basis erste Modellvergleiche durchgeführt. Da das Verhalten nur anhand jeweils einer einzigen Realisierung pro stochastischem Prozess überprüft werden konnte, lassen sich noch keine Aussagen bezüglich Robustheit der getroffenen Modellwahl gegenüber leichten Veränderungen der Daten machen. Hierzu sollen die gemäss Abschnitt 4.3. zusätzlich erzeugten Datensätze mit Hilfe von Anpassungstests (vgl. dazu Anhang B) zur Überprüfung der Hypothesen $H_{0,k}: F(u) = F_{0,k}(u)$ [k je nach Modell] untersucht werden. Dabei stellen $F_{0,k}(u)$ die gemäss Abschnitt 4.2. vorgegebenen (postulierten) "Modellverteilungsfunktionen" dar. Die Alternativhypothesen sind nicht formuliert und damit von der Form $H_{1,k}: F(u) \neq F_{0,k}(u)$. Von den vielen bekannten Methoden seien hier die Tests von Kolmogorow-Smirnow, Cramér-von Mises und Anderson-Darling sowie der χ^2 -Anpassungstest erwähnt, wobei letzterer nicht weiterverfolgt wird, da er im Rahmen dieser Arbeit ähnliche Resultate geliefert hat wie die nachfolgend beschriebenen Anpassungstests.

4.4.2.1. Anpassungstests basierend auf der empirischen Verteilungsfunktion

Im folgenden sollen Anpassungstests angewendet werden, die einen direkten Vergleich zwischen der empirischen Verteilung und der postulierten "Modellverteilung" erlauben. Es sind verschiedene Teststatistiken in diesem Zusammenhang bekannt (vgl. Anhang B). Diese Testverfahren sind aber oft nicht anwendbar, weil in die postulierte Verteilung Schätzungen von Parametern eingehen, die aus derselben Stichprobe geschätzt wurden, aus der man die empirische Verteilung berechnet hat. Die kritischen Werte können in solchen Fällen nicht mehr den Standard-Tabellen entnommen werden, sondern sie müssen speziell ermittelt werden (z.B. durch Monte Carlo Simulationen). Bei unserer Anwendung ist dieses Vorgehen aber nicht möglich, da die kritischen Werte (ausser beim AMSAA-Modell) eine Abhängigkeit vom wahren Wert der Parameter zeigen. Eine Möglichkeit zur Eliminierung von unbekanntem Parametern, die im folgenden verwendet werden soll, ist die Methode der halben Stichprobe [DAgo86, Step78]. Dabei werden die

unbekannten Parameter mit asymptotisch effizienten Verfahren (z.B. Maximum-Likelihood Schätzung) ausgehend von nur der zufällig ausgewählten Hälfte der gegebenen Daten geschätzt. Die Testgrößen werden dann gemäss den Gleichungen (149) bis (151) berechnet, jetzt aber unter Benützung der ganzen Stichprobe. Als Resultat ergibt sich, dass die so gebildeten Testgrößen asymptotisch dieselben Verteilungen aufweisen, wie im Falle einer vollständig gegebenen postulierten Verteilungsfunktion, und somit auch die entsprechenden kritischen Werte übernommen werden können.

Bei Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit zeigten sich keine gravierenden Unterschiede zwischen den Teststatistiken Kolmogorow-Smirnow D , Anderson-Darling A^2 und Cramér-von Mises W^2 in bezug auf das jeweils vorzuziehende Modell (vgl. dazu auch Tab. 1). Es wird deshalb im folgenden nur mit der Statistik A^2 weitergefahren. Die quadratische Statistik A^2 konvergiert relativ rasch gegen ihre asymptotische Verteilung. Für einigermaßen grosse Stichproben ($n \geq 20$) kann demnach die Methode der halben Stichprobe sinnvoll angewendet werden [DAgo86]. Es ist aber zu beachten, dass diese Methode *nicht* invariant ist, da verschiedene Werte der Testgrösse bei gleichem Datenmaterial möglich sind infolge der zufälligen Auswahl der Hälfte der Daten.

Die verwendeten kritischen Werte sind in Tab. 3 gegeben [DAgo86].

Berechnete Testgrösse	Signifikanzniveau α							
	0.25	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
A^2 (gültig für $n \geq 5$)	1.248	1.610	1.933	2.492	3.070	3.880	4.500	6.000

Tab. 3 Kritische Werte für die Anderson-Darling Statistik A^2 [A^2 gemäss Gl. (151)]

Tab. 4 fasst die Resultate der Untersuchung zusätzlicher Realisierungen der Original-Datensätze (mit demselben n wie bei den Originaldaten, nur die Datensätze mit $n \geq 20$ werden berücksichtigt) zusammen (jeweils Erzeugung von 1000 zusätzlichen Realisierungen pro Datensatz, Schätzung der Modellparameter mittels der Maximum-Likelihood Methode, eine Ablehnung der Hypothese $H_{0,k}$: $F(u) = F_{0,k}(u)$ [k je nach Modell] erfolgt, wenn der Wert der Testgrösse A^2 grösser ist als der entsprechende kritische Wert aus Tab. 3, Angabe der Anzahl Ablehnungen in % bezogen auf die jeweils 1000 Realisierungen, **fett** angegeben ist der pro Datensatz geringste Wert der Anzahl Ablehnungen).

Die Anzahl Ablehnungen sollen nicht absolut betrachtet werden, da sie auf simulierten Daten beruhen, sondern sie werden nur für den relativen Modellvergleich herangezogen.

Datensatz	Modell M(t)	Signifikanzniveau α							
		0.25	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
MIL n=27	$\gamma \cdot t^\delta$	54.7	39.8	30.0	19.5	13.5	7.9	5.3	2.0
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	35.0	21.5	13.7	7.2	4.1	1.7	0.9	0.3
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	38.9	27.1	19.2	10.9	6.9	3.4	2.2	1.0
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	70.0	55.9	46.5	32.9	22.1	12.9	8.3	3.6
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	46.7	34.6	25.5	17.0	11.7	7.5	5.0	3.0
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	45.4	32.3	24.6	16.2	11.1	6.5	4.8	1.7
Kraut Tab.3 n=54	$\gamma \cdot t^\delta$	100	100	99.6	97.3	90.9	73.3	56.2	21.4
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	99.3	96.6	90.8	70.6	45.1	19.0	9.2	1.5
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	99.9	99.4	97.8	94.1	87.0	74.2	62.5	37.0
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	100	100	100	99.9	99.8	99.6	99.1	97.5
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	94.6	84.7	72.7	50.4	31.5	13.5	7.4	1.4
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	78.8	62.3	48.4	29.3	18.7	10.7	6.4	3.0
Kraut Tab.4 n=73	$\gamma \cdot t^\delta$	99.4	95.6	90.7	76.3	59.1	37.1	21.9	6.0
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	93.9	81.2	66.1	41.4	21.2	7.4	3.8	0.5
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	100	99.7	99.6	97.9	94.4	85.9	72.4	44.5
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	100	100	100	100	100	100	100	100
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	85.6	70.3	58.3	38.2	23.5	11.6	6.6	1.7
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	72.9	54.4	43.4	26.8	16.1	6.4	2.5	0.5

NTDS n=26	$\gamma \cdot t^{\delta}$	98.8	95.8	88.5	73.0	53.0	34.0	24.2	15.4
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	94.3	82.7	68.6	41.1	25.6	14.4	10.3	5.7
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	91.5	80.1	67.0	46.2	30.1	17.9	11.9	6.3
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	68.4	52.8	41.2	27.6	18.3	11.9	9.0	5.3
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	79.7	60.3	43.8	25.6	15.6	9.9	7.8	6.0
	$\alpha \cdot t^{\beta} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	69.6	52.1	39.3	27.5	19.6	13.9	11.5	8.5

Tab. 4 Anzahl Ablehnungen in %, Anderson-Darling Anpassungstest
(1000 zusätzliche Realisierungen der Originalprozesse)

Das Resultat bezüglich "Wie verhalten sich die neuen Modelle im Vergleich zu den bekannten" ist abgesehen von leichten Abweichungen beim Datensatz NTDS konsistent mit dem Vergleich der Modelle anhand der Vergleichsgrößen (siehe Abschnitt 4.4.1., Tab. 1 und 2), womit sich die dort gemachten Aussagen zum relativen Abschneiden der Modelle aufrechterhalten lassen.

4.5. Vergleich der Extrapolationseigenschaften

Unter Extrapolation versteht man die Voraussage der zukünftigen Entwicklung des Ausfallverhaltens aufgrund von Testdaten aus dem bisherigen Zuverlässigkeitswachstumsprogramm. Ziel ist hierbei vor allem, abzuschätzen, wie lange ein bestehendes Programm zur Verbesserung der Zuverlässigkeit noch weitergeführt werden muss, um ein bestimmtes Niveau der Zuverlässigkeit zu erreichen. Als Voraussetzung für eine gültige Voraussage muss der zugrundeliegende stochastische Prozess unverändert bleiben.

Zur Überprüfung der Extrapolationseigenschaften werden sowohl die Originaldaten direkt wie auch gemäss Abschnitt 4.3. erzeugte Datensätze (jeweils 1000 Realisierungen) verwendet, damit eine Untersuchung anhand von genügend vielen Realisierungen der stochastischen Prozesse erfolgen kann. Dabei werden nur die Daten berücksichtigt, die genügend umfangreich sind für einen aussagekräftigen Vergleich (getroffene Festlegung für die vorliegende Arbeit: $75\% \cdot n \geq 15$). Unter der Voraussetzung, dass n Ausfälle systematischer Natur bis zur kumulativen Testzeit t_n aufgetreten (und die entsprechenden Ursachen \rightarrow Fehler korrigiert worden) sind, werden die Daten bis $50\% \cdot n$ und $75\% \cdot n$ (entsprechend ca. $10\text{-}30\% \cdot t_n$ und ca. $50\% \cdot t_n$) verwendet, um die Parameter der Modelle zu bestimmen (mittels Maximum-Likelihood Schätzung). Dann wird jeweils in den einzelnen Modellen die Testgrösse A^2 mit den wie oben geschätzten Parametern über den gesamten Zeitbereich berechnet und als Kriterium zur Bestimmung der Güte der Extrapolationen herangezogen. Je kleiner der Wert von A^2 wird, desto besser wird die entsprechende Extrapolation eingestuft.

Tab. 5 fasst die Resultate der Untersuchung der Extrapolationseigenschaften anhand der Originaldaten zusammen (zum Vergleich angegeben sind auch die Werte bei Zugrundelegen der vollständigen Daten). **Fett** angegeben sind die pro Datensatz kleinsten Werte der Testgrösse A^2 , was auf das in bezug auf die jeweilige Extrapolation beste Modell hinweist (geringste Extrapolationsabweichung).

Das erste neue Modell

$$M_5(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

erweist sich mit Ausnahme vom Software-Datensatz NTDS als den anderen Modellen überlegen, da es die zukünftige Entwicklung des Ausfallverhaltens am besten voraussagen kann (geringste Werte der Testgrösse A^2 , d.h. geringste Unterschiede zwischen der empirischen Verteilung und der vorausgesagten "Modellverteilung", vgl. Abschnitt 4.2.). Interessanterweise ist dies auch beim Datensatz MIL der Fall, obwohl dort das Modell beim Vergleich des grundsätzlichen Verhaltens (Abschnitt 4.4.) nicht besser als einige der bekannten Modelle abgeschnitten hat.

Das zweite neue Modell

$$M_6(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma} \right) \cdot e^{-t/\gamma} \right]$$

weist hingegen beim Vergleich der Extrapolationseigenschaften keine Vorteile gegenüber den bekannten Modellen auf.

Der Datensatz NTDS zeigt im Gegensatz zu den anderen Datensätzen die Besonderheit, dass die Ausfalldaten bis 75%-n (bedingt durch den S-förmigen Verlauf, vgl. Abschnitt 4.1.) nach *Zuverlässigkeitsverschlechterung* aussehen, so dass bis zu diesem Zeitpunkt keine vernünftige Voraussage des gesamthaft auftretenden *Zuverlässigkeitswachstums* möglich ist. Es sind deshalb bei diesem Datensatz im folgenden die Werte für 85%-n angeben.

Die beiden Modelle

$$M_2(t) = \alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$$

und

$$M_3(t) = a \cdot (1 - e^{-t/b})$$

weisen beim Datensatz NTDS bei der Voraussage bis 75%-n einen nahezu linearen Verlauf auf (β bzw. $b \gg t_{\max}$), so dass die Abweichungen (Testgrösse A^2) zu den vollständigen Daten begrenzt bleiben. Ein ähnliches Verhalten dieser Modelle ist auch bei den Datensätzen von Kraut bei einer Voraussage bis 50%-n zu beobachten.

Datensatz		MIL	Kraut Tab.3	Kraut Tab.4	NTDS
Modell M(t)					
100%-n	$\gamma \cdot t^\delta$	0.807	4.470	2.966	2.758
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	0.351	2.412	1.621	1.773
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.301	5.441	5.607	1.485
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	1.155	17.261	20.954	0.939
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.417	1.810	1.417	1.126
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	0.517	1.004	0.857	0.770
75%-n (85%-n bei NTDS)	$\gamma \cdot t^\delta$	2.248	6.679	3.067	5.994
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	1.692	2.415	1.717	3.547
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	1.775	15.095	13.845	3.268
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	1.124	28.227	32.647	0.804
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.424	1.773	1.475	1.738
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	1.431	6.678	2.585	0.848
50%-n	$\gamma \cdot t^\delta$	2.773	64.242	34.304	15.740
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	2.814	28.420	26.253	4.227
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	2.856	28.420	26.253	4.227
	$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	5.063	15.337	79.570	11.783
	$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	0.585	10.378	2.066	12.049
	$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	1.418	45.341	33.608	15.211

Tab. 5 Extrapolationseigenschaften auf Basis der Originaldaten

Aus obiger Untersuchung ist ersichtlich, dass *frühe* Extrapolationen (50%-n, entsprechend ca. 10-30%·t_n) mit recht grossen Fehlern verbunden sein oder sogar zu Fehlinterpretationen führen können! Die Extrapolationen sollten deshalb nicht vorbehaltlos übernommen, sondern bei Vorliegen zusätzlicher Daten verifiziert und ggf. revidiert werden. In den vorliegenden Fällen wurden vernünftige Extrapolationen ab ca. 75%-n (entsprechend ca. 50%·t_n) erhalten.

In Tab. 6 sind die zusammengefassten Resultate der Simulationen enthalten. Angegeben sind, bezogen auf die erzeugten Realisierungen (jeweils 1000 Realisierungen für jeden der zugrundegelegten Datensätze), die Mittelwerte (oben) und die Standardabweichungen (unten) der berechneten Testgrösse A². **Fett** angegeben sind jeweils die pro Datensatz kleinsten Werte der obigen Grössen.

Datensatz		MIL	Kraut Tab.3	Kraut Tab.4	NTDS
Modell M(t)					
75%-n (85%-n bei NTDS)	$\gamma \cdot t^\delta$	3.335	15.810	4.763	10.838
		3.035	13.960	4.982	8.383
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	2.007	6.950	2.551	4.449
		1.723	7.302	1.615	2.059
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	2.005	11.130	13.491	4.439
		1.737	6.613	4.512	2.078
$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	2.493	22.550	32.466	6.394	
	2.325	7.316	6.064	7.333	
$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	1.363	3.270	2.354	4.921	
	1.583	2.062	1.463	5.433	
$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	2.345	10.944	4.054	7.854	
	2.790	11.082	4.044	8.151	
50%-n	$\gamma \cdot t^\delta$	4.969	55.013	31.076	18.579
		4.389	33.240	18.323	11.733
	$\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$	2.489	22.905	15.560	4.845
		1.847	13.458	12.442	1.790
	$a \cdot (1 - e^{-t/b})$	2.883	24.114	25.530	4.840
		2.207	12.932	16.491	1.794
$c \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{d}\right) \cdot e^{-t/d}\right]$	7.799	45.632	95.390	12.040	
	7.027	31.627	43.567	8.764	
$a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$	2.009	11.242	3.521	8.114	
	2.660	15.274	2.780	7.589	
$\alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma}\right) \cdot e^{-t/\gamma}\right]$	3.654	40.560	24.216	15.345	
	4.015	33.477	17.048	11.026	

Tab. 6 Extrapolationseigenschaften (zusätzlich erzeugte Datensätze)

Die Aussagen im Zusammenhang mit der Untersuchung der Extrapolationseigenschaften anhand der Originaldaten werden somit durch die Simulationen bestätigt.

4.6. Schlussfolgerungen

Ziel von Kapitel 4 war es, bekannte und neue (im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene) Modelle zu vergleichen. Dies geschah anhand von Originaldaten aus Zuverlässigkeitswachstums-Programmen und darauf aufbauend zusätzlich erzeugten Datensätzen, um die Robustheit der getroffenen Modellwahl gegenüber leichten Veränderungen der Daten zu überprüfen.

Die nachfolgenden Aussagen gelten offensichtlich nur in bezug auf das vorliegende Datenmaterial (siehe Anhang D). Da das Datenmaterial aus unterschiedlichen Quellen stammt, darf eine gewisse Übertragbarkeit der Aussagen auch auf weitere Anwendungsfälle erwartet werden.

Sowohl bei der Untersuchung der Original-Datensätze mit Hilfe der Vergleichsgrößen D , W^2 und A^2 sowie der maximalen Werte der Likelihood Funktionen (vgl. Tab. 1 und 2) wie auch beim Modellvergleich anhand von Testverfahren (Anderson-Darling Statistik A^2) bezogen auf die zusätzlich erzeugten Realisierungen (vgl. Tab. 4), erweist sich das zweite neue Modell

$$M_6(t) = \alpha \cdot t^\beta \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\gamma} \right) \cdot e^{-t/\gamma} \right]$$

als das zu bevorzugende Modell zur Abschätzung des erreichten Zuverlässigkeitswachstums komplexer, reparierbarer Systeme (im Mittel über alle Datensätze geringster Unterschied zwischen den empirischen Verteilungen und der entsprechenden Modellverteilung, in den meisten Fällen grösster Wert der Likelihood-Funktion und geringste Anzahl Ablehnungen bei den Anpassungstests).

Auch das erste neue Modell (logarithmisch-exponentielles Poisson-Modell)

$$M_5(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

schneidet bei diesen Vergleichen insgesamt besser ab als die untersuchten bekannten Modelle.

In bezug auf die Extrapolationseigenschaften (statistische Vorhersage über den weiteren Verlauf aufgrund von bereits vorliegenden Testerfahrungen, vgl. Tab. 5 und 6) ist das Modell $M_5(t)$ dann aber allen anderen untersuchten Modellen (inkl. zweitem neuem Modell) überlegen, da es die zukünftige Entwicklung des Ausfallverhaltens am besten voraussagen kann.

Da im Zusammenhang mit der Untersuchung von Zuverlässigkeitswachstum die Voraussage einen hohen Stellenwert einnimmt, empfehlen wir das Modell $M_5(t)$ als das allgemein zu verwendende "Standard"- bzw. "Referenz"-Modell, gegen das allfällige weitere Modelle zu messen sind. Es weist im übrigen wie die anderen untersuchten bekannten Modelle auch nur zwei freie Parameter auf.

5. Aufstellung einer Prozedur zur Modellauswahl

Für den Anwender in der Praxis stellt sich das Problem, aus dem Katalog der möglichen Modelle das geeignete Modell für einen gegebenen Datensatz auszuwählen. Dazu soll im folgenden eine Prozedur zur Modellauswahl aufgestellt werden. Verschiedene Modelle wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingehend untersucht, andere lassen sich entwickeln. Für das vorliegende Datenmaterial konnte die optimale Modellwahl begründet werden (vgl. Abschnitt 4.6.). Das entsprechende Modell wird als "Standard"- bzw. "Referenz"-Modell vorgeschlagen. Leider ist es aber nicht möglich, ein einzelnes Modell festzulegen, welches unter allen Umständen zu optimalen Resultaten führt, und nach unserer Erfahrung ist es auch nicht möglich, das geeignete Modell für eine bestimmte Anwendung im voraus zu bestimmen.

Die im Bild 31 dargestellte Prozedur zur Modellauswahl basiert auf folgendem Vorgehen: Auf die vorliegenden Ausfalldaten werden ein oder mehrere Modelle angewandt, indem das grundsätzliche Verhalten (Anpassung an die Daten, Anwendung zur Abschätzung der momentanen Zuverlässigkeit bzw. des aktuell erreichten Zuverlässigkeitswachstums) und/oder die Extrapolationseigenschaften der Modelle (Voraussage der/des in Zukunft erreichbaren Zuverlässigkeit/Zuverlässigkeitswachstums) untersucht werden. Diese Schritte werden wiederholt, wenn zusätzliche Daten vorliegen, sodass sich allmählich das geeignete Modell herauskristallisiert. Um eine gültige Voraussage zu erreichen, gilt es sicherzustellen, dass der beobachtete Ausfallprozess mit dem vorauszusagenden (möglichst weitgehend) übereinstimmt. Insbesondere wenn die Zuverlässigkeit unter Betriebsbedingungen aufgrund von Testdaten aus einem Zuverlässigkeitswachstums-Programm abgeschätzt werden soll, ist dafür zu sorgen, dass die Testbedingungen für die Betriebsbedingungen repräsentativ sind.

Im folgenden seien die einzelnen Schritte der Prozedur in Bild 31 näher erläutert.

Tätigkeiten 1 und 7 - [Zusätzliche] Daten erfassen:

Im Zusammenhang mit der Untersuchung eines Zuverlässigkeitswachstums sind nur die systematischen Ausfälle, welche auf Entwicklungs- und Konstruktionsfehler, auf Schnittstellenprobleme oder Fehler im Fertigungs- und Prüfablauf zurückzuführen und mittels Korrekturmaßnahmen wie Design-, Komponenten- oder Prozessänderungen zu beseitigen sind, zu betrachten. Deshalb müssen jeweils mittels eingehender Ausfallanalyse allfällige nicht zu Zuverlässigkeitswachstum führende Frühausfälle und Ausfälle mit konstanter Ausfallrate vom Datenmaterial entfernt werden. Voraussetzung für ein erfolgreiches Zuverlässigkeitswachstums-Programm ist im weiteren eine detaillierte und saubere Testdatenerfassung. Das Erfassen von möglichst viel Hintergrundinformationen zu den einzelnen Ausfällen erleichtert/verbessert die nachfolgende Auswertung. Näheres dazu siehe Abschnitt 2.2.

Tätigkeiten 2 und 8 - Daten überprüfen:

Es sollte keine Untersuchung begonnen werden, bevor nicht die Qualität der Daten überprüft worden ist. Zuerst ist die Datenerfassung an sich zu verifizieren. Ziel hierbei ist es, allfällige Ungereimtheiten an den Daten zu erkennen. Dies geschieht am besten mittels graphischer Visualisierung der Testdaten wie im Abschnitt 4.1. beschrieben. Im weiteren ist sicherzustellen, dass aufgrund der systematischen Ausfälle wirklich Korrekturmaßnahmen eingeleitet werden, welche die Ursachen der Ausfälle beseitigt haben und dass durch diese Massnahmen keine neuen Ausfallursachen eingefügt wurden.

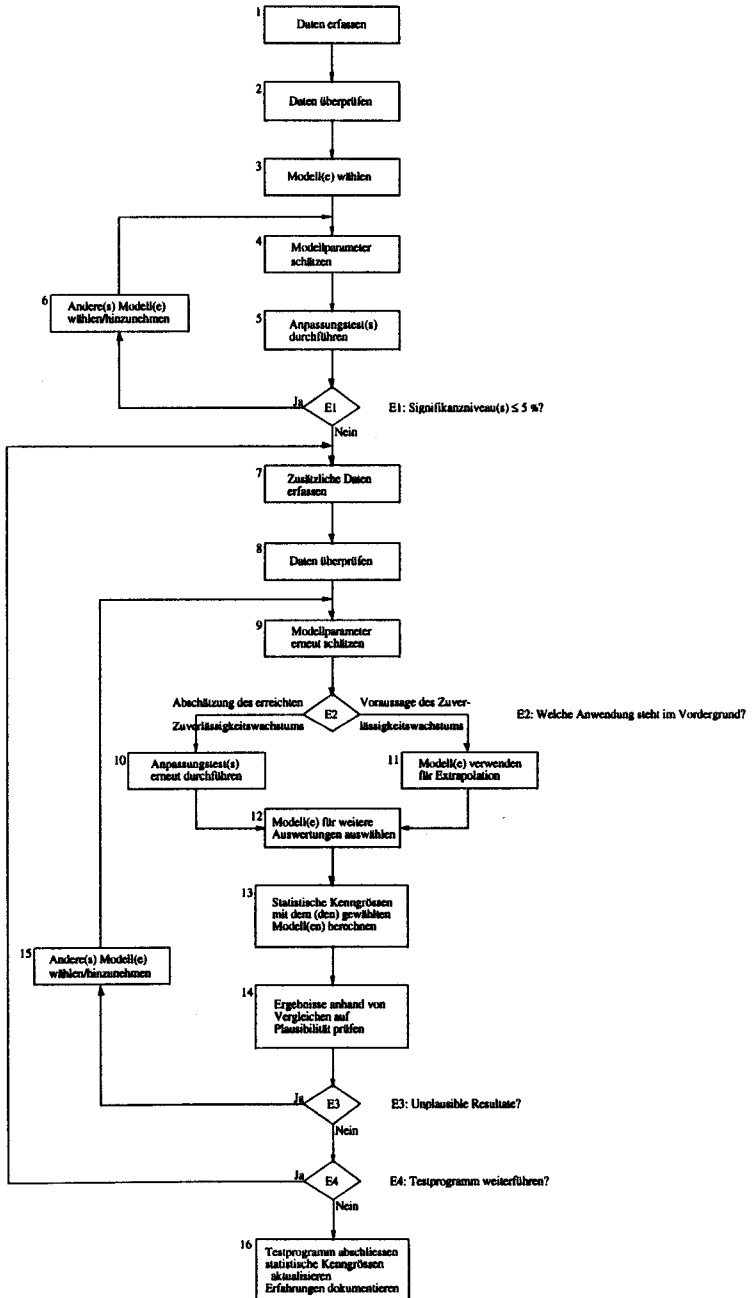


Bild 31 Prozedur zur Modellauswahl (Erläuterungen dazu sind im Text enthalten)

Tätigkeiten 3, 6 und 15 - [Andere(s)] Modell(e) wählen/hinzunehmen:

Für die Modellwahl stehen verschiedene bekannte Modelle sowie eine Anzahl neuer Modelle, die sich mittels dem im Abschnitt 3.3. beschriebenen Vorgehen entwickeln lassen, zur Verfügung. Da in der Praxis normalerweise der Umfang vorhandener Testdaten systematischer Ausfälle zu gering für eine vernünftige Anpassung vieler freier Modellparameter ist, scheint es angebracht, sich dabei auf zwei- und dreiparametrische Modelle zu beschränken. Hilfreich für eine erste Abschätzung der Anpassung verschiedener Modelle an vorliegende Daten ist die im Abschnitt 4.2. enthaltene Darstellung der empirischen Verteilung und der "Modellverteilungen" (vgl. Bild 16). Eine quantifizierbare Überprüfung der Anpassung der Modelle an die jeweiligen Daten geschieht bei den Tätigkeiten 5 sowie 10 bzw. 11.

Tätigkeiten 4 und 9 - Modellparameter [erneut] schätzen:

Verschiedene Methoden sind in der Literatur bekannt (siehe dazu auch Anhang B). Am weitesten verbreitet ist die Maximum-Likelihood-Schätzung, welche über gute statistische Eigenschaften verfügt. Als Alternative erscheint die Methode der kleinsten Quadrate, die aber im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht verwendet wurde, da sie bei Modellen mit einem begrenzten $M^{(\infty)}$ z.T. zu unrealistischen Resultaten geführt hat (vgl. dazu Abschnitt 3.2.). Die an die Daten angepassten Modelle erhält man anschliessend durch Einsetzen der geschätzten Parameter in die jeweiligen Modellgleichungen. Das Verhalten der verschiedenen Modelle wird somit durch die Modellgleichungen einerseits und das Schätzverfahren (hier einheitlich Maximum-Likelihood) andererseits bestimmt.

Tätigkeiten 5 und 10 - Anpassungstest(s) [erneut] durchführen:

Bei den Tätigkeiten 3, 6 und 15 wurde mittels graphischer Darstellung eine erste qualitative Überprüfung der Güte der Anpassung der einzelnen Modelle an die jeweiligen Daten vorgenommen. Um zu einer objektiveren Entscheidungsmöglichkeit zu kommen, werden im weiteren numerische Verfahren zur Beurteilung herangezogen. Dabei werden die theoretischen Modelle mit den realen Werten verglichen. Die hierzu verwendeten Anpassungstests liefern ein Mass für die Übereinstimmung zwischen den Testdaten und einer gewählten "Modellverteilung". Verschiedene Testverfahren sind in der Literatur bekannt (siehe dazu auch Anhang B). Mit diesem Vorgehen wird für jedes Modell ein Zahlenwert (Testgrösse) ermittelt, der eine Aussage über die Güte der Anpassung zulässt. Das Modell mit dem niedrigsten Zahlenwert ist aus numerischer Sicht das am besten angepasste. Mit Hilfe der Testgrössen für die einzelnen Modelle sollte im weiteren jeweils das Signifikanzniveau α (Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art) bestimmt werden. Der Wert dieser Grösse kann ebenfalls zur Beurteilung des jeweiligen Modells und zum Vergleich der Modelle untereinander herangezogen werden. Ein hohes Signifikanzniveau kennzeichnet eine gute Modellanpassung. Bei einem Signifikanzniveau $\leq 5\%$ sind Zweifel angebracht, ob sich das Modell zur Beschreibung der vorliegenden Daten überhaupt eignet. Hierbei ist zu beachten, dass die tabellierten kritischen Werte der einzelnen Testverfahren nur für vollständig gegebene Verteilungsfunktionen gelten und somit nicht exakt für den Fall, wo Parameter der Verteilungsfunktion geschätzt werden müssen. Als Ausnahme erscheint hier der χ^2 -Test, der auch im Falle einer Verteilungsfunktion mit unbekanntem Parametern einen allgemein gültigen Zugang bietet. Innerhalb der im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten Gruppe von Anpassungstests, die auf der empirischen Verteilungsfunktion basieren (Kolmogorow-Smirnow, Cramér-von Mises, Anderson-Darling) und auch im Vergleich zum χ^2 -Anpassungstest, zeigten sich keine gravierenden Unterschiede in bezug auf das jeweils vorzuziehende Modell. Die Beschränkung auf die in der Literatur als sehr

empfindlich reagierend beschriebene Anderson-Darling Statistik erscheint deshalb angebracht, ist jedoch nicht zwingend. Als Ergebnis der Testverfahren erhält man Aussagen von der Form "Das Modell wird abgelehnt" (Testgrösse > kritischer Wert bei entsprechendem Signifikanzniveau α) oder "Es spricht nichts gegen das Modell" (Testgrösse \leq kritischer Wert bei entsprechendem Signifikanzniveau α). Näheres zum Vorgehen ist im Abschnitt 4.4. beschrieben.

Entscheid E1 - Signifikanzniveau(s) $\leq 5\%$?

Nur Modelle, für die sich ein Signifikanzniveau > 5% ergibt, sollten weiterverfolgt werden.

Tätigkeit 11 - Modell(e) verwenden für Extrapolation:

Bei diesem Schritt geht es darum, die Modelle bezüglich ihrer Eigenschaften der Voraussage der zukünftigen Entwicklung des Ausfallverhaltens zu bewerten/vergleichen. Dazu werden die Testgrössen (z.B. A^2) über den gesamten Datenbereich (d.h. inkl. der bei der Tätigkeit 7 zusätzlich erfassten Daten) berechnet; für die Modellparameter werden diejenigen Werte verwendet, die aufgrund eines Teils der Daten (d.h. denjenigen Daten, die bei Tätigkeit 1 zur Verfügung stehen, ohne die Daten von Tätigkeit 7) geschätzt wurden. Dasjenige Modell, das die geringsten Werte der Testgrössen liefert, ist das für den jeweils vorliegenden Datensatz bestgeeignete Modell. Mit guter Chance darf man dann erwarten, dass es dies beim betrachteten System auch weiter bleiben wird, wobei man nicht blindlings darauf vertrauen muss, da man bei Vorliegen zusätzlicher Daten das Verhalten des gewählten Modells erneut überprüfen kann. Gemäss unserer Erfahrung empfehlen wir, das Modell

$$M_5(t) = a \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{b}\right) \cdot (1 - e^{-t/b})$$

jeweils sozusagen als "Standardmodell" in die Vergleiche der Voraussageeigenschaften miteinzubeziehen. Näheres zum Vorgehen bei der Untersuchung der Extrapolationseigenschaften ist im Abschnitt 4.5. enthalten.

Entscheid E2 - Welche Anwendung steht im Vordergrund?

Je nachdem, ob die Modelle zur Abschätzung des bisher erreichten Zuverlässigkeitswachstums oder zur Voraussage der zukünftigen Entwicklung des Ausfallverhaltens verwendet werden sollen, gelangen unterschiedliche Untersuchungsvarianten zur Anwendung (Tätigkeiten 10 bzw. 11).

Tätigkeit 12 - Modell(e) für weitere Auswertungen auswählen:

Hier gilt es, das (die) Modell(e) auszuwählen, welche(s) bei der vorangegangenen Untersuchung zu der (den) geringsten Abweichung(en) zu den im Einzelfall vorliegenden Daten geführt hat (haben).

Tätigkeit 13 - Statistische Kenngrössen mit dem (den) gewählten Modell(en) berechnen:

In diesem Schritt werden die statistischen Kennwerte ausgehend vom (von den) ausgewählten Modell(en) berechnet als Basis für die nachfolgenden Entscheidungen. Eine solche mögliche Kenngrösse ist die mittlere Zeit bis zum nächsten Ausfall T_{mittl} . (Vorwärts-Wiederkehrzeit). Siehe dazu Anhang A.

Tätigkeit 14 - Ergebnisse anhand von Vergleichen auf Plausibilität prüfen:

Die berechneten Kenngrößen dürfen keinesfalls als "absolut richtig" angesehen werden, ein Überprüfen auf "logische Richtigkeit" ist stets erforderlich. Dies kann über Plausibilitätsprüfungen geschehen, indem die erhaltenen Resultate mit den Erfahrungen bei ähnlich komplexen Systemen verglichen bzw. alternative Berechnungen und zusätzliche Tests durchgeführt werden.

Entscheid E3 - Unplausible Resultate?

Im Falle unplausibler Werte der obigen Kenngrößen werden (vorausgesetzt die Datenerfassung war in Ordnung, d.h. die Daten weisen keine Defekte auf) andere Modelle für die Auswertung hinzugezogen.

Entscheid E4 - Testprogramm weiterführen?

Das eigentliche Ziel der Modellierung des Zuverlässigkeitswachstums ist es, zu entscheiden, wann das Entwicklungsvorhaben bezüglich des betrachteten komplexen, reparierbaren Systems abgeschlossen werden kann. Diese Entscheidung wird gefällt basierend auf den Informationen, welche in den vorangehenden Tätigkeiten gesammelt wurden.

Tätigkeit 16 - Testprogramm abschliessen, statistische Kenngrößen aktualisieren, Erfahrungen dokumentieren:

Dieser Schritt dient der Konsolidierung der erhaltenen Resultate. Insbesondere ist es wichtig, die Erfahrungen derart zu dokumentieren, dass sie für nachfolgende Projekte verwendet werden können.

Anhang A: Inhomogene Poisson-Prozesse

Der *inhomogene Poisson-Prozess* (NonHomogeneous Poisson-Process, *NHPP*) erscheint als Unterklasse der zufälligen *Punktprozesse* [Ger195, Gned68, Thom88]. Diese Prozesse sind nützlich zur Beschreibung von Situationen, wo in zufälligen Zeitpunkten ein bestimmtes Ereignis (hier Ausfall eines Systems) eintritt. Modelliert wird demnach eine zufällige Punktfolge bzw. ein zufälliger Fluss von Ereignissen. Interessiert ist man an der Anzahl des Eintretens der Ereignisse in einem Zeitintervall $(0, t]$. Diese Anzahl sei mit $N(t)$ bezeichnet. $N(t)$ lässt sich durch eine *Zählfunktion* darstellen (Bild A.1). Entsprechend wird der $(N(t), t \geq 0)$ zugeordnete stochastische Prozess auch *Zählprozess* genannt, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sein müssen:

- (1) $N(t) \geq 0$
- (2) $N(t)$ nimmt nur ganzzahlige Werte an
- (3) Für $s < t$ wird $N(s) \leq N(t)$
- (4) Für $s < t$ stellt $N(t) - N(s)$ die Anzahl der Ereignisse dar, welche im Intervall $(s, t]$ aufgetreten sind.

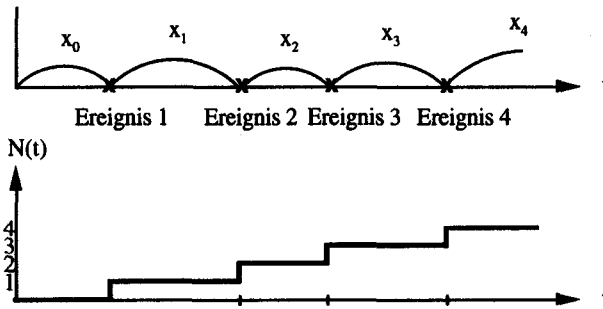


Bild A.1 Punktprozess und zugeordnete Zählfunktion

Bei einem allgemeinen Punktprozess sind die *Zeiten* zwischen den Ereignissen ($x_i, i = 0, 1, \dots$) beliebig verteilt. Sind die *Zeiten* $x_i, i = 1, 2, \dots$, statistisch unabhängig und weisen sie die gleiche Verteilungsfunktion auf, so hat man es mit einem *Erneuerungsprozess* zu tun. Als einfachster Prozess dieser Klasse erscheint der *homogene Poisson-Prozess* (*Homogeneous Poisson-Process, HPP*, oder einfach *Poisson-Prozess*). Er ist durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

- Stationarität: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von k Ereignissen in einem Zeitintervall $(t, t+t']$ hängt nicht von t , sondern nur von k und t' ab.
- Nachwirkungs-freiheit: Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von k Ereignissen im Zeitintervall $(t, t+t']$ hängt nicht davon ab, wieviele Ereignisse bis zum Zeitpunkt t eingetreten sind.
- Ordinarität: Das Eintreten von zwei oder mehr Ereignissen in einem Zeitabschnitt $\delta t \rightarrow 0$ geschieht mit Wahrscheinlichkeit $o(\delta t)$.

Die Eigenschaften des homogenen Poisson-Prozesses bleiben mit Ausnahme der Stationarität auch für den *inhomogenen Poisson-Prozess* gültig. Bei diesem handelt es sich aber nicht mehr um einen Erneuerungsprozess.

Zur mathematischen Beschreibung des Poisson-Prozesses sei die folgende Notation eingeführt:

$N(t)$ = Anzahl Ereignisse in $(0,t]$ → Zählprozess

$M(t)$ = Mittelwertfunktion = $E\{N(t)\}$ = erwartete Anzahl Ereignisse in $(0,t]$

$$M(t) = \int_0^t m(\tau) d\tau$$

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt} = \text{Intensität (Häufigkeit) der Ereignisse.}$$

Damit lässt sich der *inhomogene Poisson-Prozess* charakterisieren durch:

- (1) $N(0) = 0$
- (2) $(N(t), t \geq 0)$ weist unabhängige Zuwächse auf
- (3) Die Anzahl Ereignisse in einem beliebigen Intervall (t_1, t_2) weist eine Poisson-Verteilung mit Mittelwert

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t) dt$$

auf. Damit gilt für alle $t_2 > t_1 \geq 0$ und $k \geq 0$

$$\Pr\{\text{genau } k \text{ Ereignisse in } (t_1, t_2]\} = \Pr\{N(t_2) - N(t_1) = k\}$$

$$= \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} m(t) dt \right]^k}{k!} \cdot e^{-\int_{t_1}^{t_2} m(t) dt} = \frac{[M(t_2) - M(t_1)]^k}{k!} \cdot e^{-[M(t_2) - M(t_1)]} \quad (\text{A.1})$$

Aus der Bedingung (3) folgt

$$E\{N(t_2) - N(t_1)\} = \int_{t_1}^{t_2} m(t) dt = M(t_2) - M(t_1), \quad (\text{A.2})$$

wobei die Funktion $m(t)$ den zeitlichen Verlauf der Intensität der Ereignisse (Häufigkeit des Auftretens) beschreibt (gilt $m(t) = m = \text{konst.}$ und somit $M(t) = m \cdot t$, so erhält man den *homogenen Poisson-Prozess* als Spezialfall).

Eine äquivalente Definition des *inhomogenen Poisson-Prozesses* lautet wie folgt:

- (i) $N(0) = 0$
- (ii) $(N(t), t \geq 0)$ weist unabhängige Zuwächse auf
- (iii) $\Pr\{N(t+h) - N(t) = 1\} = m(t) \cdot h + o(h), h \rightarrow 0$
- (iv) $\Pr\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h), h \rightarrow 0.$

wobei eine Funktion f als $o(h)$ bezeichnet wird, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Für die Verteilungsfunktion der Zeit bis zum ersten Ereignis gilt

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t m(\tau) d\tau}, \quad t > 0.$$

Beim inhomogenen Poisson-Prozess sind die Zeiten zwischen aufeinanderfolgenden Ereignissen im Gegensatz zum homogenen Poisson-Prozess **nicht unabhängig und identisch verteilt**.

Es lässt sich zeigen, dass für ein komplexes System, welches aus einer grossen Zahl von Einzelteilen besteht, die nur mit kleinen Wahrscheinlichkeiten und unabhängig voneinander ausfallen, die Systemausfälle näherungsweise durch einen (homogenen oder inhomogenen) Poisson-Prozess modelliert werden können (die Überlagerung von vielen einzelnen unabhängigen Punkt-Prozessen kann durch einen Poisson-Prozess angenähert werden [Ger195, Gned68]).

Die Ausfallintensität $m(t)$ lässt sich wie folgt interpretieren (vgl. Bedingung (iii) oben):

Für δt infinitesimal klein ist

$$m(t) \cdot \delta t$$

näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass das System in $(t, t+\delta t]$ ausfällt.

Bezogen auf den Prozess des Zuverlässigkeitswachstums erwartet man eine Abnahme dieser Ausfallwahrscheinlichkeit und somit eine Abnahme von $m(t)$ in Funktion zunehmender kumulativer Testzeit t . Dies entspricht dann einer stochastischen Zunahme der Zeiten zwischen den Ausfällen mit wachsender Zeit t .

Da für den inhomogenen Poisson-Prozess die Zeiten zwischen den Ausfällen nicht mehr identisch verteilt sind, kann das Konzept der MTBF (basiert auf der Annahme einer konstanten Ausfallintensität, somit ist auch die mittlere Zeit zwischen den Ausfällen unabhängig von der Testzeit und von der Anzahl Ausfälle) nicht direkt übernommen werden. Als Lösung für die Praxis bietet sich die mittlere Zeit bis zum nächsten Ausfall nach dem Zeitpunkt t (Vorwärts-Wiederkehrzeit) an. $T_{\text{mittl.}}$ lässt sich für den inhomogenen Poisson-Prozess wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} T_{\text{mittl.}}(t) &= \int_0^{\infty} \Pr\{N(t+\tau) - N(t) = 0\} d\tau = \int_0^{\infty} e^{-[M(t+\tau) - M(t)]} d\tau \\ &= e^{M(t)} \int_0^{\infty} e^{-M(t+\tau)} d\tau \stackrel{t+\tau=x}{=} e^{M(t)} \int_t^{\infty} e^{-M(x)} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für den Spezialfall, wo $m(t)$ für $t > t_0$ konstant und gleich m_0 ist, gilt für ein Intervall $(t_0, t_0+\tau]$:

$$\begin{aligned} \Pr\{N(t_0 + \tau) - N(t_0) = 0\} &= e^{-m_0 \cdot \tau} \\ T_{\text{mittl.}}(t_0) &\approx \int_0^{\infty} e^{-m_0 \cdot \tau} d\tau = \frac{1}{m_0}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Gleichung (A.4) beschreibt für den inhomogenen Poisson-Prozess nur eine Näherung. Hingegen für den homogenen Poisson-Prozess gilt sie exakt.

Anhang B: Parameterschätzung und Anpassungstests

B.1. Maximum-Likelihood-Schätzung

Die *Methode der Maximum-Likelihood-Punktschätzung* geht auf R.A. Fisher [Fish21] zurück und findet heute breite Anwendung in der Statistik. Sie kann hier benützt werden zur Schätzung der unbekannt Parameter der Mittelwertfunktion $M(t)$ eines inhomogenen Poisson-Prozesses (oder entsprechend der Übergangsraten eines Todesprozesses).

Gegeben sind n Wertepaare bestehend aus den Zeitpunkten der einzelnen Ausfälle während eines Zuverlässigkeitstests und der Anzahl der bis zu diesen Zeitpunkten aufgetretenen Ausfälle: $(t_i, N^*(t_i))$.

Gesucht ist die Maximum-Likelihood-Schätzung der (unbekannten) Parameter der Mittelwertfunktion $M(t)$ eines inhomogenen Poisson-Prozesses (bzw. der Übergangsraten bei einem Todesprozess).

Die beobachteten Daten sind Elemente des Raumes der Beobachtungen. Ihre Auftretswahrscheinlichkeit, z.B. die Wahrscheinlichkeit $\Pr\{\tau \leq t_i\}$ ist allgemein eine Funktion der unbekannt Parameter. Die Grundidee der Maximum-Likelihood-Methode lässt sich wie folgt beschreiben [Biro91]:

Bildet t_1, \dots, t_n die Realisierung (Beobachtung) einer Stichprobe der *diskreten* Zufallsgrösse τ , so ist die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Realisierung durch

$$L(t_1, \dots, t_n, \theta) = \prod_{i=1}^n p_i(\theta) \quad \text{mit } p_i(\theta) = \Pr\{\tau = t_i\} \quad (\text{B.1})$$

gegeben; als Schätzung für den unbekannt Parameter θ wird derjenige Parameter $\hat{\theta}$ gewählt, welcher die Wahrscheinlichkeit der beobachteten Realisierung maximiert.

Unter relativ allgemeinen Voraussetzungen werden damit Punktschätzungen erhalten, die *konsistent, asymptotisch* ($n \rightarrow \infty$) *erwartungstreu, asymptotisch wirksam und asymptotisch normalverteilt* sind. Existiert für den Parameter eine wirksame Schätzung, so hat die Likelihood-Gleichung $\partial L / \partial \theta = 0$ eine eindeutige Lösung. Eine Schätzung ist ferner dann und nur dann erschöpfend, wenn die Likelihood-Funktion (Gleichung (B.1) bzw. (B.2)) in zwei Faktoren zerlegt werden kann, wobei der eine von θ , der andere von den Beobachtungen t_1, \dots, t_n abhängt. Es wird stillschweigend angenommen, dass die in dieser Arbeit betrachteten Funktionen obige Voraussetzungen erfüllen.

Die zu maximierende Wahrscheinlichkeit wird als *Likelihood-Funktion* L bezeichnet. Im Falle einer *stetigen* Zufallsgrösse wird in der Gleichung (B.1) die Dichtefunktion $f(t_i, \theta)$ benutzt

$$L(t_1, \dots, t_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(t_i, \theta) . \quad (\text{B.2})$$

Die mathematische Handhabung wird oft erleichtert, wenn statt der Likelihood-Funktion die *Log-Likelihood-Funktion* $\ln L$ verwendet wird.

Für den Fall von mehreren Parametern entspricht die Maximum-Likelihood-Schätzung $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)$ demjenigen Vektor $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, welcher die Likelihood-Funktion und damit auch die Log-Likelihood-Funktion *maximiert*. Normalerweise lässt sich dieses Maximum bestimmen durch Differenzieren der Log-Likelihood-Funktion nach den einzelnen Parametern und Nullsetzen dieser Ableitungen.

Hier sei speziell der Fall von zwei freien Parametern (α, β) kurz betrachtet.

Die Maximum-Likelihood-Schätzwerte $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ lassen sich bestimmen als Lösung der *Likelihood-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} &= 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} \Big|_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}} &= 0. \end{aligned} \tag{B.3}$$

Nur in Einzelfällen sind diese Gleichungen analytisch lösbar. Allgemein ist eine Lösung z.B. mit Hilfe der im Anhang C beschriebenen Newton-Raphson-Methode oder dem Verfahren von Nelder-Mead (vgl. Methode der kleinsten Quadrate, Maximierung von $\ln L$ entspricht dabei Minimierung von $-\ln L$) möglich. Selbstverständlich brauchen die Gleichungen (B.3) nicht erfüllt zu sein, wenn das Maximum auf einem Rand der Parameterebene (α, β) angenommen wird.

Für die später folgenden Betrachtungen ist zwischen den *zeitgestutzten* (Abbruch der Zuverlässigkeits-Tests nach einer vorher festgelegten Zeit, demnach ist also n eine Zufallsgrösse) und den *ausfallgestutzten* (Abbruch nach einer bestimmten Anzahl Ausfälle, entsprechend ist t_n eine Zufallsgrösse) Tests zu unterscheiden.

Nachfolgend seien basierend auf Anhang A die grundlegenden Beziehungen für den *inhomogenen Poisson-Prozess* zuerst für den Fall *zeitgestutzter* Daten hergeleitet.

Ausgehend von den Beziehungen

$$\begin{aligned} \Pr\{\text{kein Ausfall in } (0, t_1] \cap \text{Ausfall in } (t_1, t_1 + \delta t_1]\} \\ &= e^{-[M(t_1) - M(0)]} \cdot m(t_1) \cdot \delta t_1 \\ \Pr\{\text{kein Ausfall in } (t_1, t_2] \cap \text{Ausfall in } (t_2, t_2 + \delta t_2]\} \\ &= e^{-[M(t_2) - M(t_1)]} \cdot m(t_2) \cdot \delta t_2 \\ &\vdots \\ \Pr\{\text{kein Ausfall in } (t_{n-1}, t_n] \cap \text{Ausfall in } (t_n, t_n + \delta t_n]\} \\ &= e^{-[M(t_n) - M(t_{n-1})]} \cdot m(t_n) \cdot \delta t_n \\ \Pr\{\text{kein Ausfall in } (t_n, T]\} &= e^{-[M(T) - M(t_n)]} \end{aligned}$$

lässt sich die *Likelihood-Funktion* schreiben als

$$\begin{aligned} L &= e^{-[M(t_1)-M(0)]} \cdot m(t_1) \cdot e^{-[M(t_2)-M(t_1)]} \cdot m(t_2) \cdot \dots \cdot e^{-[M(T)-M(t_n)]} \\ &= e^{-M(T)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) . \end{aligned} \quad (\text{B.4a})$$

Für den *ausfallgestutzten* Fall fällt der Term

$$\Pr\{\text{kein Ausfall in } (t_n, T]\} = e^{-[M(T)-M(t_n)]}$$

weg, und somit folgt für die *Likelihood-Funktion*

$$L = e^{-M(t_n)} \cdot \prod_{i=1}^n m(t_i) . \quad (\text{B.4b})$$

Es sei hier noch der Fall behandelt, wo die zur Verfügung stehenden Daten nicht Informationen über die einzelnen Ausfallzeitpunkte, sondern über die kumulative Anzahl Ausfälle in bestimmten Zeitintervallen $(0, T_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n$), enthalten (entspricht einem *zeitgestutzten* Fall).

Für die *Likelihood-Funktion* gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} L &\equiv \Pr\{N^*(T_1) = k_1, N^*(T_2) = k_2, \dots, N^*(T_n) = k_n\} \\ &= \Pr\{N^*(T_1) = k_1 \text{ und } N^*(T_2) = k_2 \text{ und } \dots \text{ und } N^*(T_n) = k_n\} \\ &= \frac{[M(T_1) - M(0)]^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-[M(T_1) - M(0)]} \cdot \frac{[M(T_2) - M(T_1)]^{(k_2 - k_1)}}{(k_2 - k_1)!} \cdot e^{-[M(T_2) - M(T_1)]} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \frac{[M(T_n) - M(T_{n-1})]^{(k_n - k_{n-1})}}{(k_n - k_{n-1})!} \cdot e^{-[M(T_n) - M(T_{n-1})]} \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{[M(T_i) - M(T_{i-1})]^{(k_i - k_{i-1})}}{(k_i - k_{i-1})!} \right) \cdot e^{-M(T_n)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

und für die *Log-Likelihood-Funktion*

$$\ln L = \sum_{i=1}^n \left((k_i - k_{i-1}) \cdot \ln(M(T_i) - M(T_{i-1})) - \ln[(k_i - k_{i-1})!] \right) - M(T_n) . \quad (\text{B.6})$$

Im folgenden seien die grundlegenden Beziehungen für den *Todesprozess* (siehe z.B. [Biro91], [Gerl95]) hergeleitet. Hierbei gilt es zu berücksichtigen, dass die Zeiten x_1, x_2, \dots zwischen aufeinanderfolgenden Ausfällen gemäss Voraussetzung exponentiell verteilt sind (Gedächtnislosigkeit des Markoff-Prozesses), womit für die entsprechenden Verteilungsdichten folgt

$$f(x) = v_i \cdot e^{-v_i \cdot x} \quad (\text{B.7})$$

Für den ausfallgestutzten Fall lässt sich die *Likelihood-Funktion* schreiben als

$$L = \prod_{i=0}^{n-1} v_i \cdot e^{-v_i \cdot x_i}, \quad (\text{B.8})$$

und somit folgt für die *Log-Likelihood-Funktion*

$$\ln L = \sum_{i=0}^{n-1} (\ln v_i - v_i \cdot x_i). \quad (\text{B.9})$$

Die direkte Maximierung in Funktion der Parameter v_i

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial v_i} \right|_{\hat{v}_i} = \frac{1}{\hat{v}_i} - x_i \stackrel{!}{=} 0, \quad (\text{B.10})$$

liefert als Resultat

$$\hat{v}_i = \frac{1}{x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (\text{B.11})$$

Eine Schätzung der einzelnen Parameter v_i jeweils nur aufgrund einer *einzig* Beobachtung erscheint als nicht praktikabel von einem statistischen Standpunkt aus gesehen. Auch wenn zusätzlich die Erfüllung der Bedingungen $v_i \leq v_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, (Zuverlässigkeitswachstum!) gefordert wird (nichtlineare Optimierung mit Nebenbedingungen), werden keine sinnvollen Schätzwerte für die Parameter v_i erhalten. Naheliegender ist deshalb die Beschreibung der Folge der v_i durch eine *parametrische* Funktion, so dass die gesamten Testdaten zur Schätzung der (vergleichsweise wenigen) freien Parameter verwendet werden können, also

$$v_i = v_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) \quad (\text{B.12})$$

Die Gleichung (B.10) wird demzufolge modifiziert zu

$$\left. \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_j} \right|_{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m} = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} - \frac{\partial v_i}{\partial \theta_j} \cdot x_i \right) \Bigg|_{\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m} \stackrel{!}{=} 0. \quad (\text{B.13})$$

B.2. Methode der kleinsten Quadrate

Gegeben sind n Wertepaare bestehend aus den Zeitpunkten der einzelnen Ausfälle während eines Zuverlässigkeitstests und der Anzahl der bis zu diesen Zeitpunkten aufgetretenen Ausfälle: $(t_i, N^*(t_i))$.

Gesucht ist die optimale Wahl der Parameter in einer Funktion $M(t)$ derart, dass eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen den Datenpunkten und den Funktionswerten von $M(t)$ zu den Zeitpunkten $t = t_i$ erreicht wird.

Es ist davon auszugehen, dass die Anzahl Wertepaare n grösser als die Anzahl der freien Parameter in der Funktion $M(t)$ (normalerweise zwei oder drei) ist, und somit wird nur in Ausnahmefällen eine vollständige Übereinstimmung auf dem ganzen Gitter von $N^*(t_i)$ und $M(t_i)$ zu erreichen sein. Das Gleichungssystem

$$M(t_i) = N^*(t_i), \quad i = 1 \dots n \quad (\text{B.14})$$

hat demnach mehr Gleichungen als Unbekannte und ist damit *überbestimmt*. Die Gleichungen lassen sich nur approximativ erfüllen.

Eine wichtige Methode zur Behandlung von überbestimmten Gleichungssystemen ist die *Methode der kleinsten Quadrate* [Hoid81]. Eingeführt wurde dieses Verfahren in einem Wahrscheinlichkeitszusammenhang (Methode der maximalen Wahrscheinlichkeit) von C.F. Gauss. Auf die Situation hier übertragen bedeutet es, dass die Parameter der Funktion $M(t)$ so bestimmt werden, dass die *euklidische Seminorm*

$$\|M(t_i) - N^*(t_i)\|_2^2 = \sum_{i=0}^n (M(t_i) - N^*(t_i))^2, \quad (\text{B.15})$$

so klein wie möglich wird.

Eine einfache Lösung des Problems wird möglich, wenn sich die Beziehung (B.14) auf eine lineare Form

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{B.16})$$

transformieren lässt, wobei der Vektor \mathbf{x} als Elemente die unbekannt Parameter enthält. Die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate lautet in diesem Fall:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{B.17})$$

Die Matrix $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$ ist eine symmetrische $m \times m$ Matrix, und (B.17) liefert m lineare Gleichungen für die m unbekannt Komponenten von \mathbf{x} .

Komplizierter wird der Fall, wo eine Funktion behandelt werden soll, welche sich nicht linearisieren lässt. Als Methode für die Bestimmung der Parameter wurde in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren von J.A. Nelder und R. Mead [Neld65] verwendet, basierend auf einem Simplex-Algorithmus zur Minimierung einer nichtlinearen Funktion mehrerer Variablen mit der euklidischen Seminorm als Kriterium. Das Verfahren ist als Funktion im Programmpaket *MATLAB* realisiert und soll hier nicht weiter beschrieben werden.

B.3. Anpassungstests für eine vollständig gegebene Verteilungsfunktion

Ausgehend von der Realisierung t_1, \dots, t_n (bzw. von der entsprechenden geordneten Realisierung $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$) einer Stichprobe der Zufallsgrösse τ soll eine Regel zur Prüfung der Nullhypothese

$$H_0: \text{die Verteilungsfunktion von } \tau \text{ ist } F_0(t) \quad (\text{B.18})$$

gegen die Alternativhypothese

$$H_1: \text{die Verteilungsfunktion von } \tau \text{ ist nicht } F_0(t) \quad (\text{B.19})$$

aufgestellt werden. $F_0(t)$ sei hier vollständig bekannt. Weit verbreitete Methoden zur Lösung dieses Problems sind die Tests von Kolmogorow-Smirnow, Cramér-von Mises und Anderson-Darling sowie der χ^2 -Anpassungstest, wobei letzterer hier nicht weiterbehandelt wird. Die Hypothese H_0 soll im Falle "zu grosser" Abweichungen abgelehnt werden.

Die *empirische Verteilungsfunktion*

$$\hat{F}_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < t_{(1)} \\ \frac{i}{n} & \text{für } t_{(i)} \leq t < t_{(i+1)} \\ 1 & \text{für } t \geq t_{(n)} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

stellt als beobachtete relative Häufigkeit des Ereignisses $\{\tau \leq t\}$ eine gut motivierte Schätzung der Verteilungsfunktion $F_0(t) = \Pr\{\tau \leq t\}$ dar.

1. Der Test von Kolmogorow-Smirnow nutzt die Testgrösse

$$D = \sup_t |\hat{F}_n(t) - F_0(t)| = \max(D^+, D^-), \quad (\text{B.21})$$

$$\text{wobei } D^+ = \sup_t \{\hat{F}_n(t) - F_0(t)\}$$

$$D^- = \sup_t \{F_0(t) - \hat{F}_n(t)\}.$$

2. Die Tests der Cramér-von Mises Familie gehen von der Testgrösse

$$Q = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \{\hat{F}_n(t) - F_0(t)\}^2 \cdot \psi(t) \cdot dF_0(t) \quad (\text{B.22})$$

aus, wobei $\psi(t)$ eine geeignete Gewichtsfunktion darstellt.

Für $\psi(t) = 1$ folgt die Cramér-von Mises Statistik, üblicherweise mit W^2 bezeichnet, und für $\psi(t) = \left[\frac{F_0(t)}{1 - F_0(t)} \right]^1$ die Anderson-Darling Statistik A^2 .

Die Berechnung der obigen Testgrößen kann mit Hilfe der Transformation $z_i = F_0(t_i)$ erfolgen, wobei $F_0(t)$ die Verteilung von τ darstellt [DAgo86]. Unter Berücksichtigung der geordneten Werte $z_{(1)} < z_{(2)} < \dots < z_{(n)}$ gilt:

$$\begin{aligned} D^+ &= \max_i \left\{ \frac{i}{n} - z_{(i)} \right\}, \\ D^- &= \max_i \left\{ z_{(i)} - \frac{i-1}{n} \right\}, \\ D &= \max(D^+, D^-) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$W^2 = \frac{1}{12 \cdot n} + \sum_i \left\{ z_{(i)} - \frac{2 \cdot i - 1}{2 \cdot n} \right\}^2 \quad (\text{B.24})$$

$$A^2 = -n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_i \left[(2 \cdot i - 1) \cdot \ln z_{(i)} + \{2 \cdot n + 1 - 2 \cdot i\} \cdot \ln(1 - z_{(i)}) \right]. \quad (\text{B.25})$$

Die Summen und die Maxima laufen alle über $1 \leq i \leq n$.

Ist τ stetig, so sind die Verteilungen der Testgrößen unter der Hypothese H_0 unabhängig von $F_0(t)$. Bei vorgegebenem Fehler 1. Art α muss die Hypothese H_0 für Testgröße $>$ Kritischer Wert $_{1-\alpha}$ abgelehnt werden. Dabei sind die kritischen Werte gemäss

$$\Pr\{\text{Testgröße} > \text{Kritischer Wert}_{1-\alpha} | H_0 \text{ ist wahr}\} = \alpha \quad (\text{B.26})$$

in Abhängigkeit von n und α für die drei oben erwähnten Teststatistiken in [DAgo86] gegeben. Es soll betont werden, dass sich die Fehlerwahrscheinlichkeit α auf die Ablehnung der wahren Hypothese H_0 bezieht. Über die Fehlerwahrscheinlichkeit β (Fehler 2. Art) der Annahme einer falschen Hypothese H_1 kann im allgemeinen Fall nichts ausgesagt werden. Zur Berechnung dieser Fehler ist die Vorgabe einer konkreten (wahren) Alternativhypothese H_1 : $F(t) = F_1(t)$ notwendig.

B.4. Anpassungstests für eine Verteilungsfunktion mit unbekanntem Parametern

In Fällen, wo ein bestimmter Typ von Verteilungsfunktion $F(t)$, nur die Parameter sind unbekannt, überprüft werden soll, lassen sich die Tests von Kolmogorow-Smirnow, Cramér-von Mises und Anderson-Darling im allgemeinen nicht anwenden. Eine Möglichkeit zur Eliminierung von unbekanntem Parametern bietet die Methode der halben Stichprobe (siehe Abschnitt 4.4.2.1.).

Anhang C: Newton-Raphson-Näherungsverfahren

Das *Newton-Raphson-Näherungsverfahren* ist eine Verallgemeinerung der Newtonschen Näherungsmethode zur Bestimmung der Nullstellen von Funktionen und basiert auf einer Linearisierung durch Taylorentwicklung. Die vollständige Taylor-Reihe zur Entwicklung einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 lautet (Voraussetzung: die Funktion $f(x)$ sei beliebig oft differenzierbar):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} \cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot f''(x_0) + \dots$$

Eine Näherung wird erhalten, wenn die Taylor-Reihe nach dem zweiten Glied abgebrochen wird. Es sei die Lösung von $f(x) = 0$ gesucht. Demnach wird (Newton-Verfahren)

$$(x-x_0) \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \approx -f(x_0).$$

Angenommen, die Lösung $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ des folgenden nichtlinearen Gleichungssystems sei zu bestimmen:

$$g(\alpha, \beta) = 0; \quad h(\alpha, \beta) = 0.$$

Die erste Schätzung für die Lösung sei (α_0, β_0) . Eine Linearisierung ist wie oben beschrieben mittels der Taylorentwicklung möglich (übertragen auf den zweidimensionalen Fall):

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta) &\approx g(\alpha_0, \beta_0) + (\alpha - \alpha_0) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0, \beta_0} + (\beta - \beta_0) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial \beta} \right|_{\alpha_0, \beta_0} \\ h(\alpha, \beta) &\approx h(\alpha_0, \beta_0) + (\alpha - \alpha_0) \cdot \left. \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0, \beta_0} + (\beta - \beta_0) \cdot \left. \frac{\partial h}{\partial \beta} \right|_{\alpha_0, \beta_0}. \end{aligned}$$

Weil

$$g(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0; \quad h(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = 0$$

gelten soll, folgt

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} & -\frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \\ -\frac{\partial h(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} & -\frac{\partial h(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \end{bmatrix}_{\alpha_0, \beta_0}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} g(\alpha, \beta) \\ h(\alpha, \beta) \end{bmatrix}_{\alpha_0, \beta_0}. \quad (\text{C.1})$$

Ausgehend von der Schätzung (α_0, β_0) wird die Beziehung (C.1) so oft zur Berechnung einer verbesserten Schätzung verwendet, bis eine vorgegebene Genauigkeit erreicht wird.

Anhang D: Datenmaterial

Die verwendeten Daten stammen aus frei zugänglichen Quellen der Literatur. Allgemein war es schwierig, entsprechende Daten direkt von der Industrie zu erhalten. Viele der angesprochenen Firmen waren ausserstande, entsprechende Testdaten bereitzustellen. Die Anwendung eines formalen Programms zur Verbesserung der Zuverlässigkeit könnte hier Abhilfe schaffen. Wo Daten in einem Fall vorhanden waren, war die Anzahl der systematischen Ausfälle zu gering für eine sinnvolle Auswertung (5 bzw. 6 systematische Ausfälle).

Nachfolgend seien die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Ausfalldaten kurz zusammengestellt (das Datenmaterial enthält jeweils nur Angaben zu systematischen Ausfällen).

Eine erste Quelle war das MIL-HDBK-189 [MIL189, S.131]. Dieses Dokument enthält die Grundlagen zum AMSAA-Modell. Die Daten stammen gemäss Angaben von einem Test zweier Prototypen eines mechanischen Systems.

MIL-HDBK-189 1981					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]
1	2.6	10	70.6	19	147.7
2	16.5	11	73.0	20	149.0
3	16.5	12	77.7	21	167.2
4	17.0	13	93.9	22	190.7
5	21.4	14	95.5	23	193.0
6	29.1	15	98.1	24	198.7
7	33.3	16	101.1	25	251.9
8	56.5	17	132.0	26	282.5
9	63.1	18	142.2	27	286.1

In einem 1990 erschienenen Beitrag von D.O.Fieni und E.D.Valette [Fien90] sind weitere Daten enthalten, diesmal aus einem Zuverlässigkeitstest eines Radar-Systems bei der Firma Westinghouse. Für die Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden nur die ersten 15 Ausfälle berücksichtigt (siehe dazu Abschnitt 4.1.).

Fieni/Valette 1990					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]
1	1	9	588	[17	2929]
2	6	10	894	[18	2977]
3	38	11	958	[19	2992]
4	40	12	1182	[20	3012]
5	48	13	1498	[21	3079]
6	146	14	1814	[22	3290]
7	150	15	2788	[23	3618]
8	154	[16	2813]	[24	3780]

Eine ergiebige Quelle für Felddaten zur Modellierung eines Zuverlässigkeitswachstums stellt eine 1987 veröffentlichte Arbeit von W.Kraut dar [Krau87]. Testobjekt war ein automatisches Testsystem (ATE), welches zum Prüfen von NAVY Flugzeugelektronik-Baugruppen verwendet worden ist.

Kraut Tabelle 3 1987					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]
1	226	19	1761	37	4658
2	611	20	1780	38	5338
3	639	21	1911	39	5759
4	665	22	1926	40	5828
5	684	23	1929	41	10742
6	721	24	1930	42	12797
7	722	25	2270	43	13673
8	749	26	2272	44	14362
9	1007	27	2283	45	15437
10	1178	28	3334	46	17481
11	1187	29	3616	47	21979
12	1203	30	3624	48	22045
13	1312	31	3654	49	23351
14	1332	32	3713	50	23580
15	1373	33	3715	51	23851
16	1426	34	3747	52	23872
17	1445	35	4297	53	24514
18	1725	36	4328	54	25020

Kraut Tabelle 4 1987					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]
1	167	26	3579	51	20988
2	681	27	3952	52	21498
3	689	28	4024	53	24586
4	751	29	4317	54	24838
5	1224	30	4463	55	25088
6	1237	31	4654	56	25104
7	1237	32	4789	57	26172
8	1398	33	4789	58	27345
9	1398	34	4789	59	28203
10	1398	35	4943	60	32470
11	1569	36	5034	61	32526
12	1645	37	5244	62	33279
13	1663	38	5329	63	33318
14	1663	39	6914	64	35473
15	1695	40	7773	65	35706
16	1709	41	7832	66	38075
17	1726	42	8417	67	40810
18	1743	43	9384	68	40883
19	1898	44	9567	69	42110
20	2300	45	9567	70	42581
21	2418	46	9786	71	42728
22	3063	47	11028	72	42728
23	3244	48	14611	73	44203
24	3477	49	17630		
25	3529	50	17737		

In einer als Fallstudie eines TAAF-Programms bezeichneten Veröffentlichung von J.M.Clarke und W.P.Cougan (General Electric Company) [Clar78] werden Ausfallzeiten eines Radar-Datenverarbeitungssystems aufgeführt.

Clarke/Cougan 1978					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [h]
1	68	7	233	13	646
2	155	8	320	14	723
3	169	9	333	15	1082
4	174	10	369	16	1536
5	190	11	479		
6	231	12	552		

Abschliessend seien noch die Ausfalldaten einer Echtzeit-, Multicomputer-Software aufgeführt, welche verschiedentlich für Modellvergleiche verwendet wurden [Hoss93].

NTDS 1971					
Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [d]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [d]	Ausfall-Nr.	Kumulative Testzeit [d]
1	9	10	70	19	104
2	21	11	71	20	105
3	32	12	77	21	116
4	36	13	78	22	149
5	43	14	87	23	156
6	45	15	91	24	247
7	50	16	92	25	249
8	58	17	95	26	250
9	63	18	98		

Literaturverzeichnis

- [Bain78] Bain L.J.: Statistical Analysis of Reliability and Life-Testing Models, 1978 Marcel Dekker Inc., New York and Basel
- [Bain80] Bain L.J., Engelhardt Max: Inferences on the Parameters and Current System Reliability for a Time Truncated Weibull Process, 1980 August, Vol. 22, No. 3, Technometrics, S.421-426
- [Bala78] Balaban H.S.: Reliability Growth Models, 1978 January/February The Journal of Environmental Sciences, S.11-18
- [Beac77] Beachler D.E., Chapman W.A.: Reliability Proving for Commercial Products, 1977 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S. 89-94
- [Beza75] Bezat A., Norquist V., Montague L.: Growth Modeling Improves Reliability Predictions, 1975 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S.317-322
- [Biro91] Birolini A.: Qualität und Zuverlässigkeit technischer Systeme: Theorie, Praxis, Management, 3. Auflage 1991 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo
- [Chen87] Chenoweth H.B.: Reliability Growth Data in Duane Coordinates - A Beginning, 1987 Proceedings Institute of Environmental Sciences, S.184-191
- [Clar79] Clarke J.M.: No-Growth Growth Curves, 1979 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S.407-412
- [Clar78] Clarke J.M., Cougan W.P.: RPM - A recent Real Life Case History, 1978 Reliability Growth Management, Testing, and Modeling Seminar Proceedings, S.10-17
- [Codi68] Codier E.O.: Reliability Growth in Real Life, 1968 Proceedings Annual Symposium on Reliability, S.458-469
- [Corm81] Cormbe R.C., Merrill R.A.: Industrial Process Control Instrumentation System's Reliability Assurance Program, Reliability Growth and Field Results, 1981 Quality Assurance Vol. 7, S. 55-58
- [Cox66] Cox D.R., Lewis P.A.W.: Statistical Analysis of Series of Events, 1966 Methuen London
- [Crow75] Crow L.H.: On Tracking Reliability Growth, 1975 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S.438-443
- [Crow74] Crow L.H.: Reliability Analysis for Complex, Repairable Systems, 1974 Reliability and Biometry, ed. F. Proschan, R.J. Serfling, S. 379-410, SIAM, Philadelphia
- [Crow82] Crow L.H.: Confidence Interval Procedures for the Weibull Process with Applications to Reliability Growth, 1982 February, Vol. 24, No. 1, Technometrics, S.67-72
- [Crow78] Crow L.H.: On the AMSAA Reliability Growth Model, 1978 Reliability Growth Management, Testing, and Modeling Seminar Proceedings, S.28-31
- [DAgo86] D'Agostino R.B., Stephens M.A., Goodness-Of-Fit Techniques, 1986 Marcel Dekker Inc., New York and Basel
- [Dhil80] Dhilon B.S.: Reliability Growth: A Survey, 1980 Microelectronics and Reliability Vol.20, S.743-751
- [Duan64] Duane J.T.: Learning Curve Approach to Reliability Monitoring, 1964 April IEEE Transactions on Aerospace Vol.2 No.2, S.563-566
- [Fien90] Fieni D.O., Valette E.D.: Reliability Growth - A State of the Art Approach, 1990 Proceedings Institute of Environmental Sciences, S.762-766

- [Fink76] Finkelstein J.M.: Confidence Bounds on the Parameters of the Weibull Process, 1976 February, Vol. 18, No. 1, Technometrics, S.115-117
- [Fink79] Finkelstein J.M.: Starting & Limiting Values for Reliability Growth, 1979 June IEEE Transactions on Reliability Vol.R-28 No.2, S.111-114
- [Fink85] Finkelstein J.M.: Planning and Monitoring Reliability Growth in Accordance with MIL-STDs and Handbooks, 1985 Proceedings Institute of Environmental Sciences, S.283-287
- [Fink88] Finkelstein J.M.: Reliability Growth Models, a brief History, 1988 IES National Conference and Workshop on Reliability Growth Processes and Management, S.62-67
- [Fish21] Fisher R.A.: The Mathematical Foundations of Theoretical Statistics, 1921 Phil. Trans. A 222, S. 309-368
- [Gerl95] Gerlach B.: Punktprozesse in der Zuverlässigkeitstheorie, 1995 Bericht ZT1 Professur für Zuverlässigkeitstechnik, Eidgenössische technische Hochschule Zürich
- [Gned68] Gnedenko B.W., Beljajew J.K., Solowjew A.D. (dt. W. Franken): Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie I, 1968 Akademie-Verlag, Berlin
- [Goel79] Goel A.L., Okumoto K.: Time-dependent Error-detection rate Model for Software Reliability and other Performance Measures, 1979 IEEE Transactions on Reliability Vol. R-28, S. 206-211
- [Herd78] Herd G.R.: Comparisons of Reliability Growth Experience, 1978 Reliability Growth Management, Testing, and Modeling Seminar Proceedings, S.65-69
- [Hoid81] Hoidn H.P.: Lineare Algebra, 1981 Verlag der Fachvereine an den Schweizerischen Hochschulen und Techniken, Zürich
- [Hoss93] Hossain S.A., Dahiya R.C.: Estimating the Parameters of a Non-homogeneous Poisson-Process Model for Software Reliability, 1993 December IEEE Transactions on Reliability Vol. 42 No. 4, S. 604-612
- [Hula90] Hulamm V.T., Chenoweth H.B.: Parameter Estimation Methods for NHPP Weibull Intense Reliability Growth Models, 1990 Proceedings Institute of Environmental Sciences, S.758-761
- [IEC1164] IEC 1164: Reliability growth - Statistical test and estimation methods, 1995
- [Imai79] Imai J., Karasawa H., Machida H.: Reliability Learning Model: Application to Colour TV, 1979 Microelectronics and Reliability Vol. 19, S. 73-80
- [Jääs82] Jääskeläinen P.: Reliability Growth and Duane Learning Curves, 1982 June IEEE Transactions on Reliability Vol.R-31 No.2, S.151-154
- [Jaya76] Jayachandran T., Moore L.R.: A Comparison of Reliability Growth Models, 1976 April IEEE Transactions on Reliability Vol.R-25 No.1, S.49-51
- [Jewe86] Jewell W.S.: A General Framework for Learning-Curve Reliability Growth Models, 1986 Theory of Reliability North-Holland Amsterdam Oxford New York Tokyo, S. 426-449. Auch erschienen in Operations Research Vol.32 No.3 1984, S.547-558
- [Krau87] Kraut W.: Reliability Growth Applications for Aviation Support Equipment, 1987 Proceedings Institute of Environmental Sciences, S.154-164
- [Lee78] Lee L., Lee S.K.: Some Results on Inference for the Weibull Process, 1978 February, Vol.20, No.1, Technometrics, S.41-45

- [Mala91] Malaiya Y.K., Srimani P.K.: Software Reliability Models: Theoretical Developments, Evaluation and Applications, 1991 IEEE Computer Society Press, Los Alamitos (CA) Washington Brussels Tokyo
- [Mead75] Mead P.H.: Reliability Growth of Electronic Equipment, 1975 Microelectronics and Reliability Vol.14, S.439-443
- [Mead77] Mead P.H.: Duane Growth Model: Estimation of final M.T.B.F. with Confidence Limits using a Hand Calculator, 1977 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S. 269-274
- [MIL189] MIL-HDBK-189 "Reliability Growth Management", 1981
- [MIL338] MIL-HDBK-338: Appendix B Growth Models, 1984
- [MIL2055] MIL-STD-2055 "Failure Reporting, Analysis, and Corrective Action System"
- [Mora75] Moranda P.: Predictions of Software Reliability during Debugging, 1975 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S. 327-332
- [Musa84] Musa J.D., Okumoto K.: A Logarithmic Poisson Execution Time Model for Software Reliability Measurement, 1984 Proceedings International Conference on Software Engineering (7), S.230-238
- [Musa87] Musa J.D.: Software Quality and Reliability Basics, 1987 Proc. Computer Conf. Dallas Oct. 25-29, S. 114-115
- [Neld65] Nelder J.A., Mead R.: A Simplex Method for Function Minimization, 1965 Computer Journal 7, S. 308-313
- [Peac75] Peacore E.J.: Reliability Developments - AWACS, 1975 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S. 383-389
- [Poll74] Pollack A.S., Nulk R.A.: Reliability and Choosing Number of Prototypes, 1974 Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, S.84-90
- [Pras74] Prasad P.S.K.: Reliability Prediction and Growth Studies - How accurate and useful?, 1974 Microelectronics and Reliability Vol. 13, S. 195-202
- [Rook90] Rook P. (ed.): Software Reliability Handbook, 1990 Elsevier Applied Science, London and New York
- [Shan83] Shanthikumar J.G.: Software Reliability Models: A Review, 1983 Microelectron. Reliability Vol. 23 No. 5, S. 903-943
- [Stan85] Stannard R.: Duane, Prince of Faultland, 1985 June IEEE Transactions on Reliability Vol.R-34 No.2, S.106
- [Step78] Stephens M.A.: On the Half-sample Method for Goodness-of-Fit, 1978 Journal Royal Statistical Society B40, S. 64-70
- [Thom81] Thompson W.A.: On the Foundations of Reliability, 1981 February, Vol. 23, No. 1, Technometrics, S.1-13
- [Thom88] Thompson W.A.: Point Process Models with Applications to Safety and Reliability, 1988 Chapman and Hall, New York London
- [VDI4009] VDI Verein Deutscher Ingenieure: VDI-Richtlinie VDI 4009 Blatt 8 Zuverlässigkeitswachstum bei Systemen, 1985 VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf
- [Wrig36] Wright J.P.: Factors Affecting the Cost of Airplane, 1936 The Journal of Aeronautical Science
- [Xie91] Xie M.: Software Reliability Modelling, 1991 World Scientific, Singapore New Jersey London Hong Kong
- [Yama83] Yamada S., Osaki S.: Reliability Growth Models for HW and SW Systems based on Nonhomogeneous Poisson Processes: a Survey, 1983 Microelectronics and Reliability Vol.23 No.1, S.91-112

Lebenslauf

- 1962 Geboren am 13. April 1962 in Solothurn, Bürger von Solothurn (SO)
- 1969-1975 Primarschule in Solothurn
- 1975-1977 Bezirksschule in Solothurn
- 1977-1981 Oberrealschule in Solothurn, Matura Typus C
- 1981-1986 Studium an der Abteilung für Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) Zürich, Abschluss als Dipl. El.-Ing. ETH
- 1986-1991 Assistent an der Professur für Zuverlässigkeitstechnik der ETH Zürich
- 1991-heute Anstellung bei der Georg Fischer Rohrleitungssysteme AG, Schaffhausen im Bereich Qualitätsmanagement. Während dieser Zeit entstand auch im wesentlichen die hier vorliegende Arbeit.