



Doctoral Thesis

## **3D Voronoi skeletons a semi-continuous implementation of the 'symmetric Axis transform' in 3D euclidean space**

**Author(s):**

Näf, Markus

**Publication Date:**

1996

**Permanent Link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-001790398> →

**Rights / License:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 11974

**3D Voronoi Skeletons**  
**A semi-continuous Implementation**  
**of the 'Symmetric Axis Transform'**  
**in 3D Euclidean Space**

A dissertation submitted to the  
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of  
Doctor of Technical Sciences

presented by  
MARKUS NÄF  
Dipl. Informatik-Ing. ETH,  
ETH - Swiss Federal Institute of Technology  
born 12<sup>th</sup> of December, 1965  
citizen of St. Gallen-Straubenzell and Erlen(TG)

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Olaf Kübler, examiner  
Prof. Dr. Leila De Floriani, co-examiner  
Dr. Gabor Székely, co-examiner

November 1996



## Abstract

In Computer Vision shape takes a fundamental place. It can be regarded to be the result of the low-level image processing stages and at the same time it forms the basis for high-level vision primarily concentrating on scene analysis and interpretation. This thesis investigates the description of highly complex biological shape in 3D Euclidean space. The method goes back to a suggestion of Blum who argued that natural shape is the result of growth processes which can be captured by local object symmetries. The resulting shape description method is well known in computer vision under the terms skeleton, stick figure, thinned shape, medial axis transform or symmetric axis transform (SAT) – the term used in this thesis. Blum gave an intuitive definition of the SAT in the continuum with the prairie-fire analogy: The object to be analyzed is modeled by a patch of grass and its boundary is set on fire. The skeleton is the locus where the firefronts meet and quench. This definition can be naturally extended to any dimension. The challenge lies in the implementation of the concept, which is defined in the continuum, on the discrete image raster. While in 2D many implementations of the SAT have been proposed, their generalization to 3D has still not been solved satisfactorily. This thesis presents the generalization of the 2D Voronoi skeletons – a specific implementation of the SAT – to 3D and describes the power and the weakness of the SAT concept in 3D. With our method it is for the first time possible to generate reasonable 3D skeletons of highly complex biological shape, e.g. of the white brain matter.

Voronoi skeletons exploit the intimate relation between the Voronoi diagram – one of the most fundamental data structures in computational geometry – of the boundary points of an object and its skeleton. The generation of Voronoi skeletons includes three steps: extraction of a sufficiently dense set of boundary points, computation of the Voronoi diagram of these points and extraction of the skeleton as a subgraph of the Voronoi diagram. Since the Voronoi diagram takes a fundamental place in the presented implementation of the SAT an overview of the state of the art in the computation of Voronoi diagrams is given. One of the key problems addressed in this thesis is a technical one: the lack of efficient procedures to generate the Voronoi diagram of several 100'000 points. The presented algorithm is an extension of standard procedures of computational geometry which is not only able to deal with such an amount of data but also with the fact that most of the points are in degenerate position. The extraction of the skeleton from the Voronoi diagram – commonly called regularization – and the problems thereby encountered is another essential part of this thesis. The regularization iteratively reduces the Voronoi diagram to the Voronoi skeleton by removing 'unimportant' parts. The regularization needs a mean to guarantee at every moment that the reduced Voronoi diagram is homotopically equivalent to the initial one. We have developed such homotopy checks based on local information of the Voronoi diagram. Additionally the regularization relies on importance measures expressing the significance of skeletal parts. We distinguish between local and global importance measures. While local measures basically make explicit the 'amount' of local object symmetry a skeletal part represents, global ones additionally take into account what part of the overall shape depends on that skeletal part. In this context we identify the reason why it has been relatively easy to define global measures in 2D and no way has been found up to now to generalize them to 3D. It lies in the special topological structure of the 2-dimensional Voronoi diagram. As a consequence the hierarchic organization of 3D shape cannot be made explicit by automatic procedures similar as in 2D.

Finally we propose a postprocessing of the resulting Voronoi skeletons to compile the many microscopic Voronoi faces into larger unbranched skeletal sheets and to establish a shape hierarchy by manual interaction. The developed tools are assessed on synthetic objects, as well as on some very complex biomedical shapes extracted from MR data.

## Zusammenfassung

Formbeschreibung spielt eine wichtige Rolle in der Bildverarbeitung. Sie beruht auf den untersten Stufen eines Bildverarbeitungs-Systems und bildet gleichzeitig die Grundlage der höherliegenden Stufen, welchen vor allem die Analyse und Interpretation einer Bildszene zukommt. Diese Arbeit befasst sich mit der Beschreibung äusserst komplexer biologischer Formen im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Die Methode geht auf eine Beobachtung Blum's zurück. Er hielt fest, dass natürliche Formen das Resultat von Wachstumsprozessen sind und mittels lokaler Objektsymmetrien beschrieben werden können. Die daraus entstandene Formbeschreibungsmethode ist in der Bildverarbeitung unter verschiedenen Namen bekannt: Skelett, Strichfigur, Verdünnung, Mittelachsen-Transformation oder Symmetrieachsen-Transformation (SAT). Blum gab eine anschauliche Definition der SAT im Kontinuum mit der sogenannten Präriefeuer Analogie: Man stelle sich das Objekt als homogene, dürre Grasfläche vor, deren Rand gleichzeitig unter Feuer gesetzt wird. Das Skelett besteht dann aus denjenigen Orten, wo die Feuerfronten aufeinander treffen und sich gegenseitig auslöschen. Diese Definition ist einfach erweiterbar auf höherdimensionale Formen. Die Herausforderung liegt in der Implementation dieses im kontinuierlichen Raum einfachen Konzepts auf dem diskreten Bildraster. Während es im 2D viele Implementationen der SAT gibt, existiert noch keine zufriedenstellende im 3D. Diese Arbeit befasst sich mit der Verallgemeinerung der Voronoi Skelette – eine der existierenden SAT Implementationen – vom 2D auf den 3D. Daneben werden die Stärken und Schwächen des SAT Konzepts im 3D aufgezeigt. Die beschriebene Methode ermöglicht zum ersten Mal die Generierung 'vernünftiger' 3D Skelette äusserst komplexer biologischer Formen, wie z. Bsp. der weissen Hirnsubstanz.

Voronoi Skelette nutzen die enge Verbindung zwischen dem Voronoi Diagramm (VD) – eine der grundlegenden Datenstrukturen der Computational Geometry – der Oberflächenpunkte eines Objekts und dessen Skelett aus. Die Erzeugung von Voronoi Skeletten lässt sich in drei Phasen gliedern: Bestimmung einer genügend dichten Menge von Oberflächenpunkte, Berechnung des VDs dieser Punkte und Extraktion des Skeletts als Teilgraphen des VDs. Da das VD für diese Methode grundlegend ist, wird der aktuelle Stand der Forschung auf diesem Gebiet dargelegt. Ein Schlüsselproblem, welches im Rahmen dieser Arbeit gelöst werden musste, ist technischer Natur und besteht im Fehlen effizienter Methoden zur Erzeugung von VDs im Bereich von mehreren 100'000 Punkten. Der vorgestellte Algorithmus ist eine Erweiterung von Standardprozeduren. Er kann nicht nur eine so grosse Menge an Punkten bewältigen, sondern trägt gleichzeitig der Tatsache Rechnung, dass die meisten dieser Punkte nicht in allgemeiner Position liegen. Die Extraktion des Skeletts aus dem VD – im allgemeinen als Regularisierung bezeichnet – und die dabei auftretenden Probleme bilden einen anderen wesentlichen Teil dieser Arbeit. Die Regularisierung reduziert das VD schrittweise auf das Voronoi Skelett durch Entfernen 'unwichtiger' Teile. Die Regularisierung muss jederzeit garantieren, dass das reduzierte VD homotopisch äquivalent zum ursprünglichen ist. Die dafür entwickelten Homotopie Kontrollmechanismen benötigen nur lokale Informationen über das VD. Ausserdem stützt sich die Regularisierung auf Wichtigkeitsmasse, welche die Signifikanz von Skeletteilen widerspiegeln. Dabei unterscheidet man lokale und globale Masse. Während lokale Masse grundsätzlich den 'Grad' an lokaler Objektsymmetrie eines Skeletteils aufzeigen, berücksichtigen globale Masse zusätzlich, welcher Teil des Objekts vom betreffenden Skelettast abhängt. In diesem Zusammenhang wird aufgezeigt, wieso es im 2D relativ einfach war, globale Wichtigkeitsmasse zu definieren, während im 3D bis heute noch keine solchen existieren. Der Grund dafür liegt in der speziellen topologischen Struktur des zweidimensionalen VDs. Als Folge davon kann die hierarchische Organisation dreidimensionaler Formen nicht automatisch bestimmt werden, wie das im 2D möglich war.

Schliesslich wird eine Nachbearbeitung der Voronoi Skelette beschrieben, welche einerseits die vielen, oft mikroskopisch kleinen Voronoi Polygone zu grösseren unverzweigten Skelettflächen zusammenfasst und es andererseits erlaubt, interaktiv eine Formhierarchie zu erstellen. Die entwickelten Werkzeuge wurden getestet anhand künstlich erzeugter Objekte und anhand einiger höchst komplexer biologischer Formen, welche aus MR Daten extrahiert wurden.