A Riemann-Roch theorem for infinite genus Riemann surfaces with applications to inverse spectral theory

Author(s):
Merkl, Franz

Publication Date:
1997

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001896919

Diss. ETH No. 12469

A Riemann–Roch Theorem for Infinite Genus Riemann Surfaces with Applications to Inverse Spectral Theory

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doktor der Mathematik

presented by
FRANZ MERKL
Dipl. Math. / Dipl. Phys. Univ. München
born August 19th, 1966
citizen of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Horst Knörrer, examiner
Prof. Dr. Eugene Trubowitz, co-examiner

1997

Abstract

Let X be the spectral variety parametrising all complex Bloch solutions of the heat equation

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V\psi$$

with a real external $\mathcal{C}^r$ potential V ($r < \infty$) which is periodic in space and time. X is called "heat curve". In this thesis, the inverse spectral problem for this equation is solved: The class of all isospectral real potentials is shown to be in a natural one–to–one correspondence with the real part of the Jacobi variety of X. As a main ingredient, a Riemann–Roch theorem is derived for the infinite genus Riemann surfaces X and divisors of infinite degree, the points of the divisors being asymptotically associated to the handles of the surface.

As an example of Jacobian flows on the class of isospectral potentials, the Kadomcev-Petviashvilli (KP) equation with real periodic $\mathcal{C}^r$ initial data is globally solved explicitly in terms of an asymptotic expansion of meromorphic functions on the heat curve in the "high momentum" region.

Zusammenfassung

Es sei X die Spektralvarietät, die alle komplexen Blochlösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = V\psi$$

mit einem reellen, äußeren, in Raum und Zeit periodischen $\mathcal{C}^r$–Potential V ($r < \infty$) parametrisiert. X wird "Wärmeleitungs-Kurve" genannt. In dieser Dissertation wird das inverse Spektralproblem für diese Gleichung gelöst: Es wird gezeigt, daß die Klasse aller isospektralen reellen Potentiale in einer natürlichen eineindeutigen Beziehung mit dem reellen Teil der Jacobivarietät von X steht. Als ein Haupthilfsmittel wird ein Riemann–Roch Theorem für die Riemannsche Fläche X von unendlichem Geschlecht und Divisoren von unendlichem Grad hergeleitet, wobei die Punkte der Divisoren asymptotisch den Henkeln der Fläche zugeordnet sind.

Als Beispiel für die Jacobischen Flüsse auf der Klasse der isospektralen Potentiale wird die Kadomcev-Petviashvilli (KP) Gleichung mit reellen periodischen $\mathcal{C}^r$–Anfangswerten explizit global durch eine asymptotische Entwicklung bei "hohen Impulsen" von meromorphen Funktionen auf der Wärmeleitungs-Kurve gelöst.