An intersection formula for finite energy half cylinders

Author(s):
Kriener, Markus

Publication Date:
1998

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001955883

Diss. ETH No. 12565

An Intersection Formula for Finite Energy Half Cylinders

A dissertation submitted to the

SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by

Markus Kriener

Dipl. Math. University of Tübingen
born December 14, 1965
citizen of the Federal Republic of Germany

accepted on the recommendation of
Prof. Helmut Hofer, examiner
Prof. Eduard Zehnder, co-examiner

1998

Abstract

In this work we investigate the asymptotic behaviour of finite energy cylinders

$$\tilde{u}: [R, \infty) \times S^1 \to \mathbf{R} \times M$$

in the symplectisation $\mathbf{R} \times M$ of a contact manifold M. Due to work of H. Hofer the M-part of such a cylinder converges to a periodic orbit of the Reeb vectorfield of M. In the main part of this work we assume the cylinder $\tilde{u}$ to be embedded and construct maps v_i which describe the "differences" between the "sheets" of the image of $\tilde{u}$. Since these difference maps v_i vanish asymptotically in C^∞, we cannot extract any information from them directly. It turns out that they have a normal form whose main ingredient is an eigenvector E_i of an asymptotic operator B_∞ which carries geometric information about the periodic orbit in question. This can be applied by using the winding numbers $\mathrm{wind}(E_i)$ of these eigenvectors in order to compute the selfintersection number $\mathrm{int}(S, S^Z)$ of the image S of $\tilde{u}$ with the manifold S^Z. This is the manifold which we get by shifting S by means of a vectorfield Z which is normal to S at each point.

In Appendix A we show that a finite energy cylinder which is not embedded can be factorized by an embedded one. This is used in order to compute the selfintersection number $\mathrm{int}(S, S^Z)$ in the nonembedded case as well.

In Appendix B we give a characterization of the Conley-Zehnder index of a path of symplectic matrices from a winding intervall point of view which seems to be new.

Finally in Appendix C we prove a fact which suggests that finite energy surfaces can be viewed as nonintegrable generalizations of algebraic curves: We prove that there is a 1-1-correspondence between irreducible algebraic curves in $\mathbf{C}^2$ and finite energy surfaces $\tilde{u}: \dot{S} \to \mathbf{R} \times S^3$. Here $\dot{S}$ is a Riemannian surface with a finite number of points removed and S^3 carries the standard contact structure.

Zusammenfassung

In dieser Abhandlung untersuchen wir das asymptotische Verhalten von Zylindern endlicher Energie

$$\tilde{u}\colon [R,\infty) \times S^1 \to \mathbf{R} \times M$$

in der Symplektisierung $\mathbf{R} \times M$ einer Kontaktmannigfaltigkeit M. H. Hofer hat gezeigt, dass die M-Komponente eines solchen Zylinders gegen einen periodischen Orbit des Reebvektorfeldes von M konvergiert. Im Hauptteil dieser Arbeit betrachten wir eingebettete Zylinder und konstruieren Abbildungen v_i, welche die "Differenzen" der "Blätter" des Bildes von $\tilde{u}$ beschreiben. Da diese Differenzen-Abbildungen mit allen Ableitungen asymptotisch verschwinden, liefern sie direkt zunächst keine Informationen. Es stellt sich aber heraus, dass sie eine Normalform haben, dessen Hauptkomponente ein Eigenvektor E_i eines asymptotischen Operators B_∞ ist, der geometrische Information über den periodischen Orbit enthält. Wir benutzen die Windungszahlen $\mathrm{wind}(E_i)$ dieser Eigenvektoren, um die Selbstschnittzahl $\mathrm{int}(S, S^Z)$ des Bildes S des Zylinders mit der Mannigfaltigkeit S^Z zu berechnen. Diese Mannigfaltigkeit entsteht durch Verschieben von S mit einem Vektorfeld Z, dass einen Schnitt in das Normalenbündel von S in $\mathbf{R} \times M$ darstellt.

In Appendix A zeigen wir, dass sich ein nichteingebetter Zylinder durch einen eingebetten faktorisieren lässt. Das wird benutzt, um die Selbstschnittzahl $\mathrm{int}(S, S^Z)$ auch im nichteingebetteten Fall zu berechnen.

In Appendix B charakterisieren wir den Conley-Zehnder Index eines Weges von symplektischen Matrizen mit Hilfe des "Windungsintervalles" dieses Weges.

Schliesslich beweisen wir in Appendix C eine Tatsache, die es erlaubt, Flächen mit endlicher Energie im Sinne von Hofer als nichtintegrable Verallgemeinerungen von algebraischen Kurven aufzufassen: Wir zeigen, dass eine 1-1-Korrespondenz zwischen irreduziblen algebraischen Kurven und Flächen endlicher Energie $\tilde{u}\colon \dot{S} \to \mathbf{R} \times S^3$ besteht. Dabei ist $\dot{S}$ eine kompakte Riemannsche Fläche, aus der man endlich viele Punkte entfernt hat, und S^3 trägt die Standardkontaktstruktur.