Set theory and category theory in combinatory algebras

Author(s):
Darms, Daniel

Publication Date:
1998

Permanent Link:
https://doi.org/10.3929/ethz-a-001999586

Diss. ETH No. 12666

Set Theory and Category Theory in Combinatory Algebras

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
DANIEL DARMS
Dipl. Math. ETH
born June 4, 1967
citizen of Flond, GR

accepted on the recommendation of
Prof. E. Engeler, examiner
Prof. G. Jäger, co-examiner

1998

Abstract

This thesis is intended as a contribution to the "combinatory programme", developed by E. Engeler and his research group at the ETH Zurich. The monograph "The Combinatory Programme" ([Eng95]) gives an overview of this research programme, which puts the mathematical structure of (sufficiently rich) combinatory algebras in the center of the algorithmic approach to many areas of mathematics and computer science. In [Eng96], Engeler initiates the application of this programmatic viewpoint to the set-theoretical foundations of mathematics, where the investigations of the "computing aspects of set theory" are enabled by a representation theorem for relational structures in the graph model $\mathcal{D}_A$.

In a first step, we work out the task of representing set theory in $\mathcal{D}_A$ in more detail, i. e. we have some closer look at the properties of the embedded models. Subsequently, we propose a generalization of the obtained results by specifying a class of combinatory algebras which allow the (inner) representation of set theory. To do this, we carry out an axiomatization programme by postulating those features with obviously fundamental character as axioms. It turns out that a special kind of set theory, called ZFC^+, is particularly suitable for this purpose. ZFC^+ is the formulation of Zermelo-Fraenkel set theory in the language of second-order logic in such a way, that the quantification in the replacement axiom ranges over all functional subsets of the model.

The second main point of this work is the representation problem of another topic that plays a central part in the endeavors of founding mathematics, namely category theory. In fact, we can prove for the small categories a similar representation theorem as for the relational structures. A generalization of this theorem is realized by the axiomatic definition of a class of combinatory algebras in which the elementary category theory is representable.

Kurzfassung

Die vorliegende Dissertation ist als ein Beitrag zum "kombinatorischen Programm" gedacht, welches von E. Engeler und seiner Forschungsgruppe an der ETH Zürich entwickelt wurde. Die Monographie "The Combinatory Programme" ([Eng95]) gibt einen Überblick über dieses Forschungsprogramm, welches die mathematische Struktur von (genügend reichhaltigen) kombinatorischen Algebren ins Zentrum des algorithmischen Zugangs zu vielen Gebieten der Mathematik und Informatik stellt. In [Eng96] leitet Engeler die Anwendung dieses programmatischen Standpunkts auf die mengentheoretischen Grundlagen der Mathematik ein, wobei die Untersuchungen der "Berechenbarkeits-Aspekte der Mengenlehre" durch einen Darstellungssatz für relationale Strukturen im Graph-Modell $\mathcal{D}_A$ ermöglicht werden.

In einem ersten Schritt arbeiten wir die Aufgabe, die Mengenlehre in $\mathcal{D}_A$ darzustellen, detaillierter aus, d. h. wir betrachten etwas genauer die Eigenschaften der eingebetteten Modelle. Anschliessend schlagen wir eine Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate vor, indem wir eine Klasse von kombinatorischen Algebren angeben, welche die (innere) Darstellung der Mengenlehre erlauben. Dazu führen wir ein Axiomatisierungsprogramm durch, wobei wir diejenigen Eigenschaften mit offensichtlich grundlegendem Charakter als Axiome postulieren. Es stellt sich heraus, dass eine spezielle Art von Mengenlehre, genannt ZFC^+, besonders geeignet ist für diesen Zweck. ZFC^+ ist die Formulierung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre in der Sprache der Logik zweiter Stufe, und zwar so, dass sich die Quantifizierung im Ersetzungsaxiom über alle funktionalen Teilmengen des Modells erstreckt.

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit ist das Darstellungsproblem eines anderen Gebietes, welches bei den Bestrebungen der Grundlegung der Mathematik eine zentrale Rolle spielt, nämlich die Kategorientheorie. Tatsächlich kann man für die kleinen Kategorien einen ähnlichen Darstellungssatz beweisen wie für die relationalen Strukturen. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes wird durch die axiomatische Definition einer Klasse von kombinatorischen Algebren realisiert, in welchen die elementare Kategorientheorie dargestellt werden kann.