



Doctoral Thesis

Completion constructions in homological algebra and finiteness conditions

Author(s):

Triulzi, Mauro

Publication Date:

1999

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-002077388> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 12921

Completion Constructions in Homological Algebra and Finiteness Conditions

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
MAURO TRIULZI
Dipl. Math. ETH
born February 18th, 1967
citizen of Pregassona (TI)

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. Guido Mislin, examiner
Prof. Dr. Urs Stammbach, co-examiner

1998

Abstract

This thesis has the following structure:

- The first two chapters introduce the basic matter, which constitutes the basis of the rest of the thesis.

Chapter 1 gives a brief and self-contained description of Tate cohomology. Chapter 2 gives an introduction to the class of groups $H\mathfrak{F}$ and contains some results about cohomological finiteness conditions for groups in this class.

- The results are exposed in the remaining chapters.

The third chapter contains a theorem which allows to express Tate cohomology of groups in a certain class as a product of Tate cohomology of certain of its subgroups. The proof of this theorem is fundamentally based on the fact that, for a group G in $H\mathfrak{F}$ such that $\iota(\mathbb{Z}G) < \infty$ (see theorem 2.2.3), the projective dimension of a G -module M is finite if and only if, for any finite subgroup H of G , the projective dimension of M as an H -module is also finite. We prove in chapter 4 the existence of two spectral sequences related to Tate cohomology. In Chapter 5 we apply P -completion (see definition 1.2.1) to ordinary equivariant cohomology and compare it with Tate equivariant cohomology for groups with finite virtual cohomological dimension or, more generally, for groups which admit a complete resolution (see definition 1.1.1). Some applications are given of the extension of Tate equivariant cohomology from groups with finite virtual cohomological dimension to groups which admit a complete resolution. Finally, in chapter 6 we consider the Vogel-Goichot homology. This is an homological functor $\tilde{H}_\bullet(G, -)$ which vanishes for injective modules and which comes equipped with a natural transformation

$$\tilde{H}_\bullet(G, -) \rightarrow H_\bullet(G, -).$$

We look at conditions for the Vogel-Goichot homology to satisfy a universal property, which is dual to the universal property satisfied by Tate cohomology (see definitions 6.1.1 and 1.2.1). This leads to the construction of J -completion of connected sequences of (covariant) functors (see proposition 6.1.2). Conditions are established so that the J -completion of ordinary homology is isomorphic to the Vogel-Goichot homology.

Riassunto

La tesi ha la struttura seguente.

- I primi due capitoli introducono i concetti basilari che costituiscono il comun denominatore del resto della tesi.

Il primo capitolo dà una breve descrizione della coomologia di Tate. Il secondo capitolo contiene un'introduzione alla classe di gruppi $H\mathfrak{F}$ e cita alcuni risultati utili in seguito, riguardanti condizioni di finitezza coomologica per gruppi in questa classe.

- I risultati sono esposti nei rimanenti capitoli.

Il terzo capitolo contiene un teorema che permette di esprimere la coomologia di Tate di gruppi in una certa classe come prodotto della coomologia di Tate di determinati sottogruppi. La dimostrazione di questo teorema è in definitiva basata sul fatto che per un gruppo G in $H\mathfrak{F}$ tale che $\iota(\mathbb{Z}G) < \infty$ (cf. il teorema 2.2.3) la dimensione proiettiva di un G -modulo è finita se e soltanto se, per ogni sottogruppo finito H di G , la dimensione proiettiva di M come H -modulo è pure finita. Nel quarto capitolo viene dimostrata l'esistenza di due sequenze spettrali in relazione con la coomologia di Tate. Nel quinto capitolo si è applicata la costruzione del P -completamento (cf. la definizione 1.2.1) alla coomologia equivariante e la si è confrontata con la coomologia equivariante di Tate nel caso di gruppi con dimensione coomologica virtuale finita o, più in generale, nel caso di gruppi che ammettono una risoluzione completa (cf. la definizione 1.1.1). Sono date alcune applicazioni dell'estensione della coomologia equivariante di Tate da gruppi con dimensione coomologica virtuale finita a gruppi che ammettono una risoluzione completa. Per finire, nel capitolo 6 viene considerata l'omologia di Vogel-Goichot. Si tratta di un funtore omologico $\tilde{H}_\bullet(G, -)$ che si annulla per moduli iniettivi, dalla cui definizione si può desumere una trasformazione naturale canonica

$$\tilde{H}_\bullet(G, -) \rightarrow H_\bullet(G, -).$$

Vengono studiate condizioni affinché l'omologia di Vogel-Goichot soddisfi una proprietà universale duale a quella soddisfatta dalla coomologia di Tate (cf. le definizioni 6.1.1 e 1.2.1). Questo conduce alla

costruzione dello J -completamento di una sequenza connessa di funtori (cf. la proposizione 6.1.2). Sono date condizioni affinché lo J -completamento dell'omologia ordinaria sia isomorfo all'omologia di Vogel-Goichot.