

Diss. ETH No. 13119

Generalized Modular Decompositions and the Recognition of Classes of Perfectly Orderable Graphs

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Technical Sciences

presented by
THOMAS RASCHLE
Dipl. Informatik-Ing. ETH
born 1.5.1960
citizen of Bütschwil, Switzerland

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. K. Simon, examiner
Prof. Dr. A. Hertz, co-examiner

1999

Abstract

A great many problems are naturally formulated in terms of objects and connections between them and are therefore best modeled as graphs. To solve these problems on a computer, efficient algorithms are required. Unfortunately, there are many graph problems for which no efficient algorithm has been found. Classical examples are the determination of the clique number and the calculation of the chromatic number. These examples are NP-complete, and it is widely believed that no NP-complete problem can be solved efficiently.

On the other hand, many graphs arising from real world problems have a special structure, which often makes solving the problem easier. For instance, the clique number and the chromatic number can be found in linear time if the graph is perfectly orderable and a perfect order is given. Recognizing perfectly orderable graphs, however, is NP-complete.

In this thesis, new algorithms for recognizing subclasses of perfectly orderable graphs are developed. To begin with, a recognition algorithm for triangulated graphs is presented which is linear in the size of the complement. Next, classical results on comparability graphs are reviewed. These results are then generalized in two ways.

First, modules are generalized such that divide and conquer methods are still applicable to solve graph problems. In particular, two types of generalized modules are further investigated. These investigations lead to a new unique graph decomposition, which refines the modular decomposition. Second, GALLAI's results on the P_3 -structure are translated into analogous results on the P_4 -structure. The arising theorems are then used to design efficient algorithms for recognizing and orienting P_4 -comparability graphs and similar classes of perfectly orderable graphs.

Another part of this thesis deals with the recognition of graphs with threshold dimension two. In 1982, IBARAKI AND PELED conjectured that a graph has threshold dimension two if and only if its conflict graph is bipartite. A proof of this conjecture is given based on a theorem on generalized modules. Furthermore, a linear time algorithm for recognizing cobithreshold graphs is presented.

Zusammenfassung

Viele Probleme sind durch Beziehungen zwischen Objekten charakterisiert und lassen sich deshalb sehr gut als Graphen modellieren. Zur Lösung dieser Probleme auf dem Computer werden effiziente Algorithmen benötigt. Leider wurde für viele Graphenprobleme bis heute kein effizienter Algorithmus gefunden. Klassische Beispiele dafür sind die Bestimmung der Cliquenzahl und die Berechnung der chromatischen Zahl. Diese Beispiele sind NP-vollständig, und es wird angenommen, dass kein NP-vollständiges Problem effizient gelöst werden kann.

Viele sich aus praktischen Anwendungen ergebende Graphen haben allerdings eine spezielle Struktur, die das Lösen des Problems oft einfacher macht. Beispielsweise kann die Cliquenzahl und die Färbungszahl in linearer Zeit gefunden werden, falls der gegebene Graph perfekt orientierbar ist und eine perfekte Ordnung gefunden ist. Die Erkennung perfekt orientierbarer Graphen ist aber wiederum NP-vollständig.

In dieser Arbeit werden neue Algorithmen zur Erkennung von Unterklassen perfekt orientierbarer Graphen entwickelt. Zunächst wird ein Erkennungsalgorithmus für Dreiecksgraphen vorgestellt, dessen Laufzeit linear in der Grösse des Komplements ist. Danach werden klassische Resultate über transitiv orientierbare Graphen besprochen. Diese Resultate werden dann auf zwei Arten verallgemeinert.

Erstens werden Module so verallgemeinert, dass Teile-und-Herrsche-Methoden zur Lösung von Graphenproblemen immer noch anwendbar sind. Zwei Typen von verallgemeinerten Modulen werden genauer untersucht. Diese Untersuchungen führen auf eine neue eindeutige Graphenzerlegung, welche eine Verfeinerung der Modulzerlegung darstellt. Zweitens werden GALLAI's Resultate über die P_3 -Struktur in analoge Resultate bezüglich der P_4 -Struktur übersetzt. Die sich daraus ergebenden Sätze werden unter anderem zur Konstruktion effizienter Algorithmen zur Erkennung und Orientierung P_4 -transitiv orientierbarer Graphen benutzt.

Ein weiterer Teil dieser Arbeit behandelt die Erkennung von Graphen mit Threshold Dimension zwei. Bereits 1982 äusserten IBARAKI UND PELED die Vermutung, dass ein Graph genau dann Threshold Dimension zwei hat, wenn sein Konfliktgraph zweifärbbar ist. Diese Vermutung wird basierend auf einem Satz über verallgemeinerte Module bewiesen. Auch wird ein linearer Algorithmus zur Erkennung von Co-bithresholdgraphen vorgestellt.