



Doctoral Thesis

Consistency problems for HJM interest rate models

Author(s):

Filipović, Damir

Publication Date:

2000

Permanent Link:

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-003882242> →

Rights / License:

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#) →

This page was generated automatically upon download from the [ETH Zurich Research Collection](#). For more information please consult the [Terms of use](#).

Diss. ETH No. 13603

Consistency Problems for HJM Interest Rate Models

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Dr. sc. math.

presented by
DAMIR FILIPOVIĆ
Dipl. Math. ETH
born March 26, 1970
citizen of Schmiedrued AG

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. F. Delbaen, examiner
Prof. Dr. P. Embrechts, co-examiner

2000

Abstract

This thesis brings together estimation methods and stochastic factor models for the term structure of interest rates within the HJM framework. It is based on the complex of consistency problems introduced by Björk and Christensen [7].

There exist commonly used methods for fitting the current term structure. Any curve fitting method can be represented as a parametrized family of smooth curves $\mathcal{G} = \{G(\cdot, z) \mid z \in \mathcal{Z}\}$ with finite dimensional parameter set \mathcal{Z} . A lot of cross-sectional data z is available, and one may ask for a suitable stochastic model for z which provides accurate bond option prices. However, this requires the absence of arbitrage. We characterize all consistent \mathcal{Z} -valued state space Itô processes Z which, by definition, provide an arbitrage-free model when representing the parameter z . Obviously, $G(T - t, Z_t)$ has to satisfy the HJM drift condition. It turns out that selected common curve fitting methods do not go well with the HJM framework.

We then consider the preceding consistency problem from a geometric point of view, as proposed by Björk and Christensen [7]. We extend the HJM framework to incorporate an infinite dimensional driving Brownian motion. We then perform the change of parametrization due to Musiela [37] and arrive at a stochastic equation in a Hilbert space H , describing the arbitrage-free evolution of the forward curve. The family \mathcal{G} can be treated as a subset of H and the above consistency considerations yield a stochastic invariance problem for the previously derived stochastic equation. Under the assumption that \mathcal{G} is a regular submanifold of H , we derive sufficient and necessary conditions for its invariance. Expressed in local coordinates they turn out to equal the HJM drift condition.

Classical models, such as the Vasicek [48] and CIR [17] short rate model, and the popular BGM [12] LIBOR rate model, are shown to fit well into that framework. By their very definition, affine HJM models are consistent with finite dimensional linear submanifolds of H . A straight application of our results yields a complete characterization of them, as obtained by Duffie and Kan [21].

In conclusion, we provide a general tool for exploiting the interplay between curve fitting methods and HJM factor models.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Zusammenhang zwischen Schätzmethoden und HJM-Faktormodellen für die Zinsstrukturkurve. Sie ist motiviert durch den Themenkomplex von Konsistenzproblemen, welcher von Björk und Christensen [7] eingeführt wurde.

Es gibt geläufige Methoden, um die aktuelle Zinsstrukturkurve zu schätzen. Jede dieser Methoden führt zu einer parametrisierten Familie von glatten Kurven $\mathcal{G} = \{G(\cdot, z) \mid z \in \mathcal{Z}\}$ mit einer endlichdimensionalen Parametermenge \mathcal{Z} . Eine Fülle von täglichen Schätzdaten für z ist erhältlich und man mag daher nach einem geeigneten stochastischen Modell für den Parameter z verlangen, welches entsprechend genaue Bondoptionspreise liefert. Dies setzt allerdings Arbitragefreiheit voraus. Wir charakterisieren alle konsistenten \mathcal{Z} -wertigen Zustandsraum-Itôprozesse Z , dadurch definiert, dass $G(T-t, Z_t)$ ein arbitragefreies Modell erzeugt. Notwendigerweise hat $G(T-t, Z_t)$ die HJM-Driftbedingung zu erfüllen. Es stellt sich heraus, dass sich häufig verwendete Schätzmethoden schlecht mit diesen Rahmenbedingungen vertragen.

Wir betrachten anschliessend das vorhergehende Konsistenzproblem aus geometrischer Sicht, wie von Björk und Christensen [7] vorgeschlagen. Wir erweitern den HJM-Rahmen durch Einbeziehung einer unendlichdimensionalen zugrundeliegenden Brownschen Bewegung. Wir führen Musielas [37] Parameterwechsel durch und leiten eine stochastische Gleichung in einem Hilbertraum H her, welche die arbitragefreie Evolution der Zinskurve beschreibt. Die Familie \mathcal{G} kann als Untermenge von H aufgefasst werden, wodurch obige Konsistenzbetrachtungen ein stochastisches Invarianzproblem für die eben hergeleitete stochastische Gleichung hervorrufen. Unter der Annahme, dass \mathcal{G} eine reguläre Untermannigfaltigkeit von H ist, leiten wir hinreichende und notwendige Bedingungen für ihre Invarianz her. Ausgedrückt in lokalen Koordinaten stellen sich letztere gerade als HJM-Driftbedingung heraus.

Klassische Modelle wie diejenigen von Vasicek [48] und CIR [17] oder das bekannte BGM [12] LIBOR-Modell sind im vorliegenden Rahmen enthalten. Affine Modelle sind definitionsgemäss konsistent mit endlichdimensionalen linearen Untermannigfaltigkeiten von H . Unsere Resultate können daher direkt angewendet werden und ergeben eine vollständige Charakterisierung der affinen Modelle nach Duffie und Kan [21].

Zusammengefasst vermitteln wir eine allgemeine Methode zur Untersuchung des Zusammenspiels zwischen Kurvenschätzverfahren und HJM-Faktormodellen.